

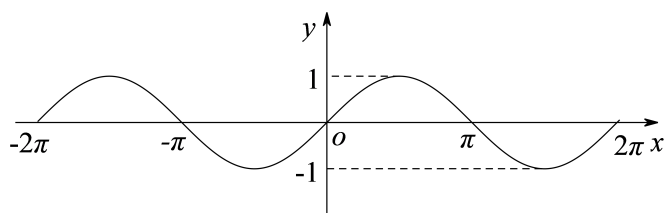
03标准三角函数图像及图像变换

1. 标准三角函数图像

🕒 正弦函数的图像与性质

$$y = \sin x$$

(1) 图象：



(2) 定义域：_____

(3) 值域：_____

(4) 最小正周期：_____

(5) 奇偶性：_____

(6) 单调性：_____；_____

(7) 对称性：对称轴_____；对称中心_____。

(8) 最大值轴：_____；最小值轴：_____。

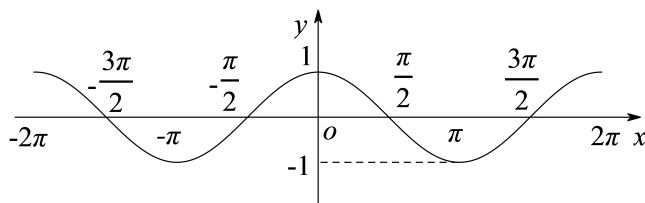
(9) 零点：_____；

升零点：_____；降零点：_____

🕒 余弦函数的图像与性质

$$y = \cos x$$

(1) 图象



(2) 定义域：_____

(3) 值域：_____

(4) 最小正周期：_____

(5) 奇偶性：_____

(6) 单调性：_____；_____

(7) 对称性：对称轴_____；对称中心_____。

(8) 最大值轴：_____；最小值轴：_____。

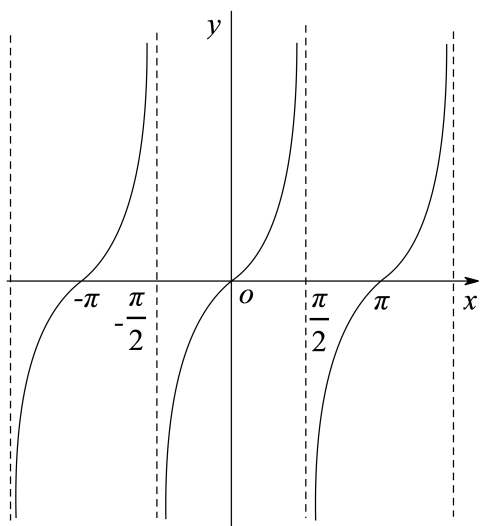
(9) 零点：_____；

升零点：_____；降零点：_____；

正切函数的图象与性质

$$y = \tan x$$

(1) 图象：



(2) 定义域：_____

(3) 值域：_____

(4) 最小正周期：_____

(5) 奇偶性：_____

(6) 单调性：_____

(7) 零点：_____

(8) 对称性：对称中心_____。

2. 利用标准三角函数图像求解简单问题

解不等式

1. 函数 $y = \sqrt{\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}}$ 的定义域为 _____。

精进不休 日新月异

2. 函数 $f(x) = \sqrt{1 + 2\cos x} + \lg(1 - \tan x)$ 的定义域是 _____。

比较大小

3. 已知 $a = \sin \frac{1}{2}$ ， $b = \sin \frac{\pi}{6}$ ， $c = \tan 2$ ，则 ()。

A. $a < b < c$

B. $a < c < b$

C. $c < a < b$

D. $c < b < a$

4. 设 $a = \sin 1$, $b = \cos 1$, $c = \tan 1$, 则 () .

A. $a < b < c$

B. $a < c < b$

C. $b < c < a$

D. $b < a < c$

|| 精进不休 日新月异

5. $\sin 5$, $\cos 5$, $\tan 5$ 的大小关系是 () .

A. $\sin 5 < \cos 5 < \tan 5$

B. $\cos 5 < \sin 5 < \tan 5$

C. $\sin 5 < \tan 5 < \cos 5$

D. $\tan 5 < \sin 5 < \cos 5$

|| 包罗万象 举一反三

6. 下列关系式中, 正确的是 () .

A. $\sin 159^\circ < \sin 22^\circ < \cos 20^\circ$

B. $\sin 159^\circ < \cos 20^\circ < \sin 22^\circ$

C. $\sin 22^\circ < \sin 159^\circ < \cos 20^\circ$

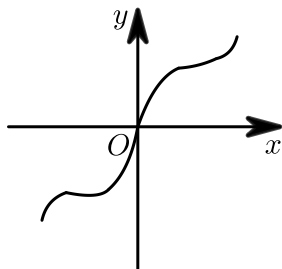
D. $\sin 22^\circ < \cos 20^\circ < \sin 159^\circ$

7. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上是增函数, 若 $a = f(\tan(-55^\circ))$, $b = f(\tan 47^\circ)$, $c = f(1)$, 则用“ $<$ ”将 a , b , c 从小到大排序为 _____ .

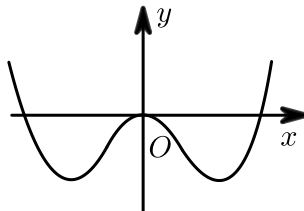
🧠 判断图像

8. 函数 $f(x) = x \sin x$ 的图象大致为 () .

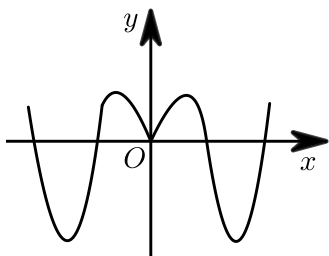
A.



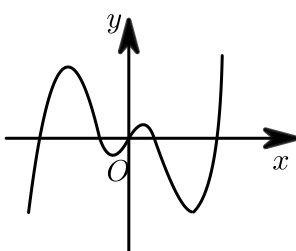
B.



C.

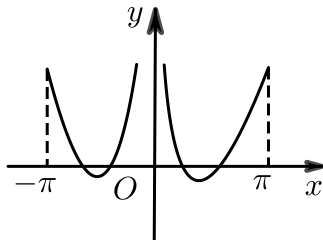


D.

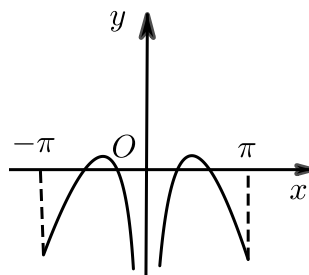


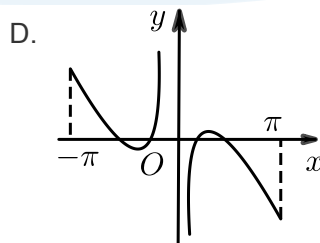
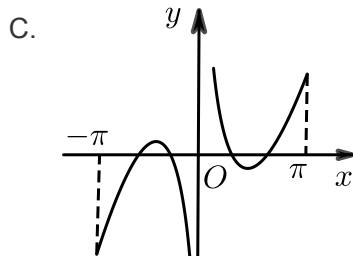
9. 函数 $f(x) = \left(x - \frac{1}{x}\right) \cos x$ ($-\pi \leq x \leq \pi$ 且 $x \neq 0$) 的图象可能为 () .

A.



B.





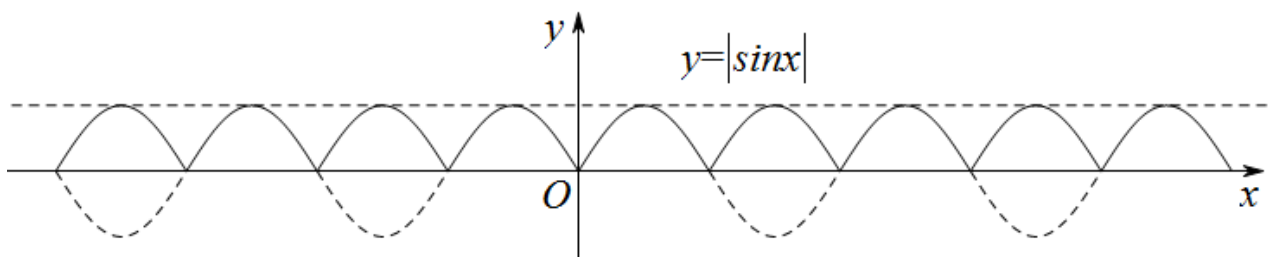
3. $y = |\sin x|$ 和 $y = |\cos x|$ 的周期

下面从数和形两个方面去考察 $y = |\sin x|$ 的周期：

(1) 对于函数 $y = f(x) = |\sin x|$ ，假设其周期为 T ，则有 $f(x) = f(x+T)$ 恒成立，即

$|\sin x| = |\sin(x+T)|$ ，因此有 $\sin(x+T) = \pm \sin x$ ，结合诱导公式，可以知道满足条件的 $T = k\pi (k \in \mathbb{Z})$ ，故原函数的最小正周期为 π 。

(2) 做出 $y = |\sin x|$ 的图象如下：



观察图象可以看出，最小正周期为 π 。

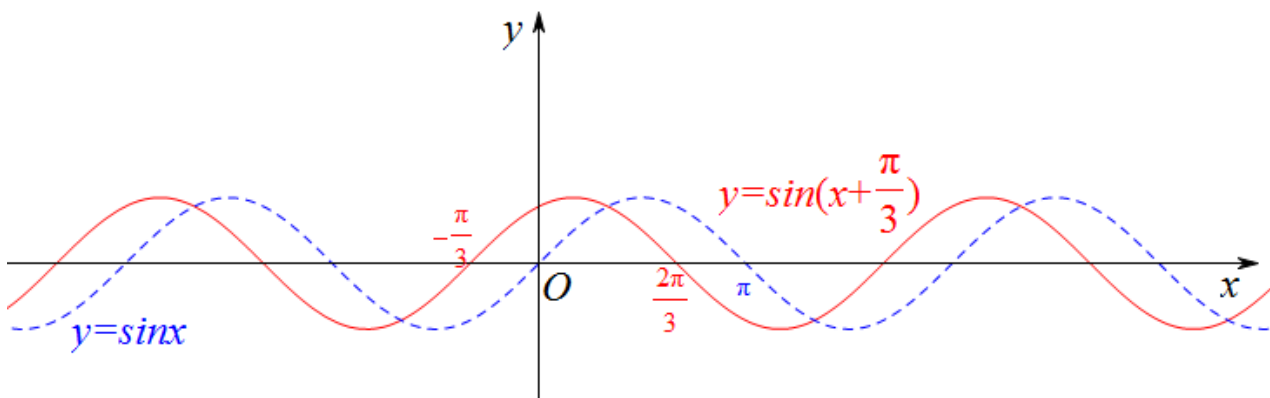
同理，对于 $y = |\cos x|$ ，其最小正周期也为 π 。

4. 正弦型三角函数的图像变换

🕒 φ 对 $y = \sin(x + \varphi)$ 的图象的影响

函数 $y = \sin(x + \varphi)$ ($\varphi \neq 0$) 的图象，可以看作是把 $y = \sin x$ 图象上的各点向左 ($\varphi > 0$) 或向右 ($\varphi < 0$) 平移 $|\varphi|$ 个单位而得到的。

如下图中的 $y = \sin x \rightarrow y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ ：

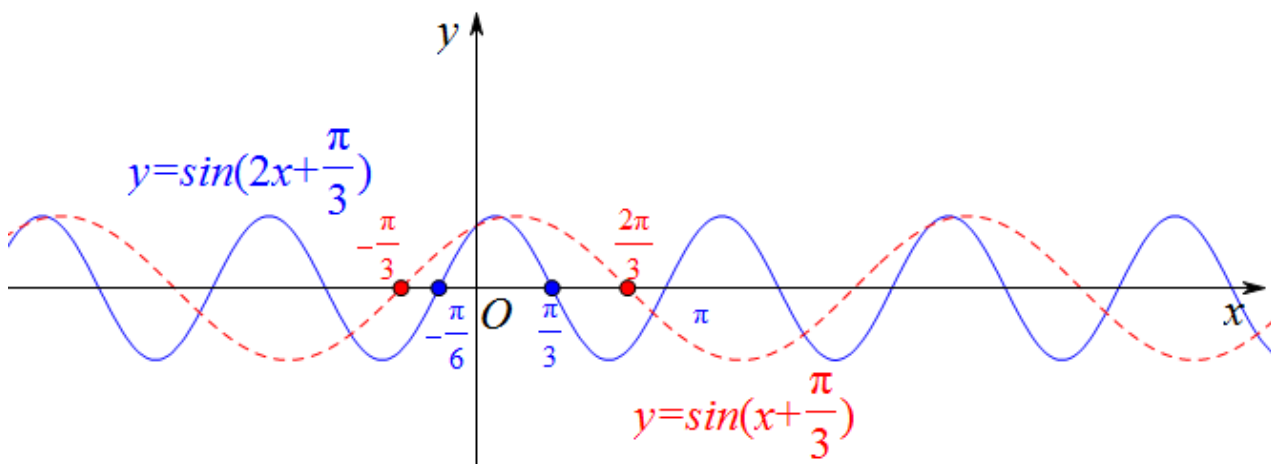


🕒 ω 对 $y = \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象的影响

函数 $y = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0$ 且 $\omega \neq 1$) 的图象，可以看作是把 $y = \sin(x + \varphi)$ 的图象上各点的横坐

标都缩短 ($\omega > 1$) 或伸长 ($0 < \omega < 1$) 到原来的 $\frac{1}{\omega}$ 倍 (纵坐标不变) 而得到的.

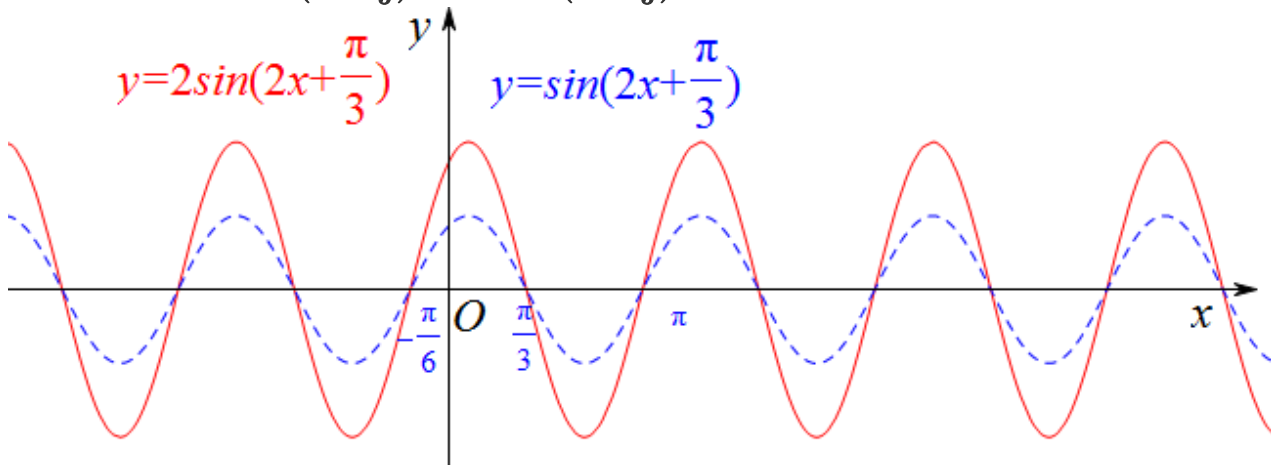
如下图中的 $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \rightarrow y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$:



🔔 A ($A > 0$) 对 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象的影响

函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0$ 且 $A \neq 1$) 的图象, 可以看作是 $y = \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象上各点的纵坐标都伸长 ($A > 1$) 或缩短 ($0 < A < 1$) 到原来的 A 倍 (横坐标不变) 而得到的.

如下图中的 $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \rightarrow y = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$:



5. 利用图象变换法作 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的流程

由 $y = \sin x$ 的图象变换得到 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的两套流程:

前提: 若 $A < 0$ 或者 $\omega < 0$ 则先将其化正.

🔔 流程一

相位变换: 将 $y = \sin x$ 的图象上的各点向左 ($\varphi > 0$) 或向右 ($\varphi < 0$) 平移 $|\varphi|$ 个单位 (纵坐标不变) 得到 $y = \sin(x + \varphi)$ 的图象.

周期变换: 将 $y = \sin(x + \varphi)$ 的图象上各点的横坐标都缩短 ($\omega > 1$) 或伸长 ($0 < \omega < 1$) 到原来的 $\frac{1}{\omega}$ 倍 (纵坐标不变) 得到 $y = \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象.

振幅变换：将 $y = \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象上各点的纵坐标都伸长 ($A > 1$) 或缩短 ($0 < A < 1$) 到原来的 A 倍 (横坐标不变) 得到 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象。

流程二

周期变换：将 $y = \sin x$ 的图象上各点的横坐标都缩短 ($\omega > 1$) 或伸长 ($0 < \omega < 1$) 到原来的 $\frac{1}{\omega}$ 倍 (纵坐标不变) 得到 $y = \sin \omega x$ 的图象。

相位变换：将 $y = \sin \omega x$ 的图象上的各点向左 ($\varphi > 0$) 或向右 ($\varphi < 0$) 平移 $\frac{|\varphi|}{\omega}$ 个单位 (纵坐标不变) 得到 $y = \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象。

振幅变换：将 $y = \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象上各点的纵坐标都伸长 ($A > 1$) 或缩短 ($0 < A < 1$) 到原来的 A 倍 (横坐标不变) 得到 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象。

6. 图像变换典型问题

题型1

10. 将函数 $y = \sin x$ 的图象上所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{3}$ 倍 (纵坐标不变)，再将所得的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位，得到的图象对应的解析式为 ()。

- A. $y = \sin\left(\frac{1}{3}x - \frac{\pi}{3}\right)$ B. $y = \sin\left(\frac{1}{3}x - \frac{\pi}{9}\right)$ C. $y = \sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right)$ D. $y = -\sin(3x)$

11. 将函数 $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍 (纵坐标不变)，再将所得的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位，得到的函数图象对应的解析式是 ()。

- A. $y = \sin \frac{1}{2}x$ B. $y = \sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{2}\right)$ C. $y = \sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{6}\right)$ D. $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$

12. 将函数 $f(x) = \sin x$ 图象上每一点的横坐标缩短为原来的一半，纵坐标不变，再向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得到函数 $g(x)$ 的图象，则 $g(x) =$ _____。

13. 将函数 $f(x) = \sin x$ 的图象上所有的点的横坐标和纵坐标同时扩大为原来的 3 倍，再将图象向右平移 π 单位长度，所得图象的函数解析式为 ()。

- A. $y = 3 \sin(3x - \pi)$ B. $y = 3 \sin(3x - 3\pi)$
C. $y = 3 \sin\left(\frac{1}{3}x - \pi\right)$ D. $y = 3 \sin\left(\frac{1}{3}x - \frac{\pi}{3}\right)$

14. 将函数 $y = \sin 2x$ 的图像向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位，再把 (平移后的) 图像上每一点的横坐标缩小为原来的 $\frac{1}{2}$ (纵坐标不变)，得到的图像的函数解析式为 ()。

- A. $y = \sin\left(4x + \frac{\pi}{6}\right)$ B. $y = \sin\left(4x + \frac{\pi}{3}\right)$ C. $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ D. $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

15. 将函数 $y = 2 \sin 2x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度，再将图象上每个点的横坐标和纵坐标都变为原来的 $\frac{1}{2}$ 倍，则所得图象的函数解析式为 _____。



题型2

16. 要得到函数 $y = \sin 4x$ 的图像, 只需将 $y = \sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right)$ 函数的图像 () .
- A. 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位
B. 向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位
C. 向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位
D. 向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位
17. 为了得到函数 $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象, 可以将函数 $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象 () .
- A. 向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度
B. 向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度
C. 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度
D. 向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度
18. 为了得到函数 $y = \sin(2x + 1)$ 的图象, 只需把函数 $y = \sin 2x$ 的图象上所有的点 () .
- A. 向左平行移动 $\frac{1}{2}$ 个单位长度
B. 向右平行移动 $\frac{1}{2}$ 个单位长度
C. 向左平行移动 1 个单位长度
D. 向右平行移动 1 个单位长度
19. 要得到 $y = \tan 2x$ 的图象, 只需把 $y = \tan\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象 () .
- A. 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位
B. 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位
C. 向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位
D. 向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位
20. 为了得到函数 $y = 3 \sin\left(2x - \frac{\pi}{5}\right)$ 的图象, 只要把函数 $y = 3 \sin\left(x - \frac{\pi}{5}\right)$ 图象上所有的点 () .
- A. 横坐标伸长到原来的 2 倍, 纵坐标不变
B. 横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$, 纵坐标不变
C. 纵坐标伸长到原来的 2 倍, 横坐标不变
D. 纵坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$, 横坐标不变
21. 为得到 $y = \sin\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象, 只需把函数 $y = \cos x$ 的图象上所有的点 () .
- A. 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度, 再把所得各点的横坐标扩大为原来的 3 倍
B. 向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度, 再把所得各点的横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{3}$
C. 横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{3}$, 再向左平移 π 个单位长度
D. 横坐标伸长到原来的 3 倍, 再向右平移 π 个单位长度