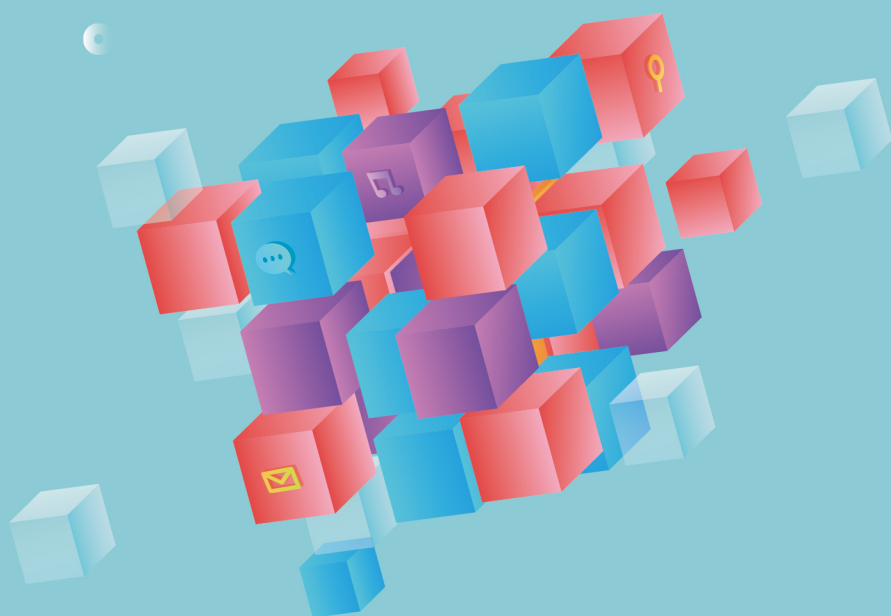


知识魔方

i 数学



总 主 编：马建明

本模块主编：吕金琳

教 研 团 队：吕金琳 严立

闫聪聪

封面设计：刘雅迪

前言

学而思一对一产品升级介绍

为进一步打造本地化产品，助力学生高考，学而思 1 对 1 产品团队打造了模块课系列产品，该产品旨在将高中阶段所有的知识点全部打散，再针对每一个学生的具体情况重新组合，制定个性化的学习方案，帮助学生进步。

随着模块课 1.0 版本的推进，无论是课程选择，还是内容学习上，学生有更多可以选择的空间，切实满足不同学生的个性化需求。本着“随需而变，才有未来”的精神，我们又推出了 2.0 版本《知识魔方·i 系列》，此系列涵盖《知识魔方·i 数学》、《知识魔方·i 物理》、《知识魔方·i 化学》、《知识魔方·i 生物》、《知识魔方·i 历史》多种学科，结合学科共性，统一产品逻辑，与此同时，兼顾到学科特色，创新学习形式，激发学生学习兴趣，做学习的主人。

本产品在设计上有三个突出的**特点**：

- (1) 模块产品，私人订制效果棒
- (2) 本地优化，海量资源覆盖广
- (3) 知识解构，新旧旧识尽入囊



扫描二维码，关注公众号，获取更多学习资料

高中数学课程产品设计

考点分析：以大数据方式分析考试重点难点，紧扣考试热点，让同学们的复习更具针对性。

知识导图：梳理知识结构，帮助同学们形成网络状的知识图谱，更有助于对知识点的理解记忆。

典型例题：分析考试情况，精选最新的考题，让同学们清楚每一个知识点的考法。

巩固练习：匹配同类型题目，讲练结合，锻炼提升解题能力。

本模块介绍

恭喜同学们完成了我们暑期的基础课程啦！是不是还意犹未尽呢？如果想要做一些更难更有挑战性的题目，而且迫不及待想要了解一下自己的掌握情况的话，不妨做一下这一模块设计的复习题和综合问题，不但可以帮助你了解自己的掌握情况，还可以通过计时提高自己的做题速度哟~

目 录

第 1 讲 直线与圆典型题型梳理..... 01

知 识 点 1 直线问题

知 识 点 2 直线与圆

第 2 讲 圆锥曲线专项测试卷.....07

第 3 讲 数列专项测试卷.....13



我们一起开始学习吧 o (*^_^*) o



第 1 讲

直线与圆典型题型梳理





直线问题



直线的倾斜角

- 1 (5分) 直线 $3x + \sqrt{3}y - 2 = 0$ 的倾斜角是 ().
A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{6}$
- 2 (5分) 过点 $A(3, 2)$, $C(0, -1)$ 的直线的倾斜角为 ____.



定点问题

- 3 (5分) 求直线 $(2m-1)x - (m+3)y - (m-11) = 0$ 恒过定点的坐标 ____.



平行线间距离

- 4 (5分) 已知直线 $l_1: x + ay + 6 = 0$ 与 $l_2: (a-2)x + 3y + 2a = 0$ 平行, 则 l_1 与 l_2 间的距离为 ().
A. $\sqrt{2}$ B. $\frac{8\sqrt{2}}{3}$ C. $\sqrt{3}$ D. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$



平行垂直关系

- 5 (5分) 已知三条直线 $l_1: 2x + my + 2 = 0 (m \in \mathbf{R})$, $l_2: 2x + y - 1 = 0$, $l_3: x + ny + 1 = 0 (n \in \mathbf{R})$, 若 $l_1 // l_2$, $l_1 \perp l_3$, 则 $m + n$ 的值为 ____.



点到直线的距离

- 6 (5分) 若直线 $2x + y - 2 = 0$ 与直线 $x + my + 1 = 0$ 互相垂直, 则点 $A(m, m)$ 到直线 $x + y + 3 = 0$ 的距离为 ____.
- 7 (5分) 已知直线 l 经过直线 $2x - y = 5$ 和直线 $3x + 2y = 4$ 的交点, 且点 $(3, 2)$ 到直线 l 的距离等于 $\sqrt{5}$, 那么 l 的方程是 ().
A. $2x - y + 1 = 0$ B. $2x + y - 3 = 0$
C. $2x + y - 3 = 0$ 或 $x - 2y - 4 = 0$ D. $2x - y + 1 = 0$ 或 $x - 2y - 4 = 0$



求解直线方程

- 8 (11 分) 已知直线 $l_1: 2x - y + 1 = 0$ 和 $l_2: x - y - 2 = 0$ 的交点为 P .
- (1) (5 分) 若直线 l 经过点 P 且与直线 $l_3: 4x - 3y - 5 = 0$ 平行, 求直线 l 的方程.
- (2) (6 分) 若直线 m 经过点 P 且与 x 轴, y 轴分别交于 A, B 两点, P 为线段 AB 的中点, 求 $\triangle OAB$ 的面积. (其中 O 为坐标原点).
- 9 (15 分) 已知直线 $l_1: ax + y + 2 = 0$ ($a \in \mathbf{R}$).
- (1) (5 分) 若直线 l_1 的倾斜角为 45° , 求实数 a 的值.
- (2) (5 分) 若直线 l_1 在 x 轴上的截距为 -2 , 求实数 a 的值.
- (3) (5 分) 若直线 l_1 与直线 $l_2: 2x - y + 1 = 0$ 平行, 求两平行直线 l_1 与 l_2 之间的距离.



直线与圆



研究圆上点到直线距离

- 10 (5分) 若圆 $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0$ 上有且仅有三个点到直线 $ax - y + 1 = 0$ (a 是实数) 的距离为 1, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.



根据弦长求解圆的方程 + 求解圆的切线

- 11 (10分) 已知圆 C 的圆心坐标 $(1, 1)$, 直线 $l: y = -x + 1$ 被圆 C 截得弦长为 $\sqrt{2}$.
- (1) (5分) 求圆 C 的方程.
- (2) (5分) 过点 $P(2, 3)$ 作圆的切线, 求切线方程.



根据圆的位置求解圆的方程 + 求解弦长

- 12 (13分) 已知圆 C 经过点 $A(3, -2)$ 和 $B(1, 0)$, 且圆心在直线 $x + y + 1 = 0$ 上.
- (1) (5分) 求圆 C 的方程.
- (2) (8分) 直线 l 经过 $(2, 0)$, 并且被圆 C 截得的弦长为 $2\sqrt{3}$, 求直线 l 的方程.



根据圆的位置关系求解圆的方程 + 求解圆的切线

13

(10分) 已知圆 C 的圆心在直线 $2x - y - 2 = 0$ 上, 且与直线 $l: 3x + 4y - 28 = 0$ 相切于点 $P(4, 4)$

(1) (5分) 求圆 C 的方程.

(2) (5分) 求过点 $Q(6, -15)$ 与圆 C 相切的直线方程.



圆与圆的位置关系 (外切) + 求解圆的切线

14

(10分) 已知圆 $C: x^2 + y^2 - 4x - 8y + 16 = 0$, 圆 O 是以原点为圆心, 半径为 r 的圆.

(1) (5分) 若圆 C 与圆 O 外切, 求半径 r .

(2) (5分) 求过原点且与圆 C 相切的直线方程.



求解圆的公共弦长

15

(11 分) 已知圆 $P: x^2 + y^2 - 4 = 0$, 圆 $Q: x^2 + y^2 - 4x + 4y - 12 = 0$.

- (1) (5 分) 分别写出这两个圆的圆心坐标和半径的长, 并求两个圆心的距离.
- (2) (6 分) 求这两个圆的公共弦的长.

第 2 讲

圆锥曲线专项测试卷





选择题 (共 8 题, 每题 5 分, 共 40 分)

- 1 (5 分) 椭圆 $\frac{y^2}{4} + \frac{x^2}{3} = 1$ 的焦点坐标为 ().
 A. $(-1, 0), (1, 0)$ B. $(-2, 0), (2, 0)$ C. $(0, -2), (0, 2)$ D. $(0, -1), (0, 1)$
- 2 (5 分) 已知抛物线 $x^2 = -\frac{1}{8}y$, 则它的准线方程是 ().
 A. $x = -2$ B. $x = 2$ C. $y = -\frac{1}{32}$ D. $y = \frac{1}{32}$
- 3 (5 分) 若双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的一条渐近线的倾斜角为 60° , 且与椭圆 $\frac{x^2}{5} + y^2 = 1$ 有相等的焦距, 则该双曲线的标准方程为 ().
 A. $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$ B. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{3} = 1$ C. $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ D. $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{9} = 1$
- 4 (5 分) 已知 $\triangle ABC$ 的顶点 B, C 在椭圆 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$, 顶点 A 是椭圆的一个焦点, 且椭圆的另外一个焦点在 BC 边上, 则 $\triangle ABC$ 的周长是 ().
 A. $2\sqrt{3}$ B. 12 C. 6 D. $4\sqrt{3}$
- 5 (5 分) 点 $A(2, 1)$ 到抛物线 $y^2 = ax$ 准线的距离为 1, 则 a 的值为 ().
 A. $-\frac{1}{4}$ 或 $-\frac{1}{12}$ B. $\frac{1}{4}$ 或 $\frac{1}{12}$ C. -4 或 -12 D. 4 或 12
- 6 (5 分) “直线与抛物线相切” 是 “直线与抛物线只有一个公共点” 的 ().
 A. 充分非必要条件 B. 必要非充分条件 C. 充要条件 D. 非充分非必要条件
- 7 (5 分) 已知 $M(x_0, y_0)$ 是双曲线 $C: \frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ 上的一点, F_1, F_2 是 C 的左、右两个焦点, 若 $\overrightarrow{MF_1} \cdot \overrightarrow{MF_2} < 0$, 则 y_0 的取值范围是 ().
 A. $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ B. $\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$ C. $\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ D. $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$
- 8 (5 分) 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 与抛物线 $y^2 = 4x$ 有一个公共的焦点 F , 且两曲线的一个交点为 P . 若 $|PF| = \frac{5}{2}$, 则双曲线的渐近线方程为 ().
 A. $y = \pm \frac{1}{2}x$ B. $y = \pm 2x$ C. $y = \pm \sqrt{3}x$ D. $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$



填空题 (共 6 题, 每题 5 分, 共 30 分)

- 9 (5 分) 已知椭圆 G 的中心在坐标原点, 焦距为 4, 且椭圆上一点到椭圆焦点的最小距离为 6, 则椭圆的离心率为 ____.



- 10 (5分) 已知定点 $A(3, 2)$, 若点 P 为抛物线 $y^2 = 2x$ 上的动点, 则当 P 到抛物线的焦点 F 的距离 $|PF|$ 与 $|PA|$ 之和最小时, 点 P 的坐标为 _____.
- 11 (5分) 已知倾斜角为 α 直线 l 经过抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点交抛物线于 A 、 B 两点, 并且 $|AF| = 4|BF|$, 则 $\cos \alpha =$ _____.
- 12 (5分) 与双曲线 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 有共同渐近线, 并且经过点 $(-3, 2\sqrt{3})$, 则双曲线方程为 _____.
- 13 (5分) 已知抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 准线与 x 轴的交点为 H , 点 A 在 C 上, 且 $|AH| = \frac{\sqrt{5}}{2}|AF|$, 则 $\triangle AFH$ 的面积为 _____.



解答题 (共 50 分)

- 14 (13分) 已知抛物线 C 的顶点在原点, 焦点在 x 轴的正半轴上, 且抛物线上有一点 $P(4, m)$ 到焦点的距离为 6.
- (1) (5分) 求抛物线 C 的方程.
- (2) (8分) 若抛物线 C 与直线 $y = kx - 2$ 相交于不同的两点 A , B , 且 AB 的中点横坐标为 2, 求 k 的值.



- 15 (14分) 已知双曲线 C 的离心率为 $\sqrt{3}$, 且过点 $(\sqrt{3}, 0)$, 过双曲线 C 的右焦点 F_2 , 作倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$ 的直线交双曲线于 A, B 两点, O 为坐标原点, F_1 为左焦点.
- (1) (5分) 求双曲线的标准方程.
- (2) (9分) 求 $\triangle AOB$ 的面积.

- 16 (13分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 该椭圆两个顶点和两个焦点构成的四边形面积为 $2\sqrt{2}$.
- (1) (5分) 求椭圆 C 的方程.
- (2) (8分) 过点 $M(1, 1)$ 的直线 l 与椭圆 C 交于 A, B 两点, 且点 M 恰为线段 AB 的中点, 求直线 l 的方程.



17 (15分) 已知抛物线 $C: y^2 = 2px$ 经过点 $P(2, 2)$, A, B 是抛物线 C 上异于点 O 的不同的两点, 其中 O 为原点.

(1) (5分) 求抛物线 C 的方程, 并求其焦点坐标和准线方程.

(2) (10分) 若 $OA \perp OB$, 求 $\triangle AOB$ 面积的最小值.

第 3 讲

数列专项测试卷





选择题

(本大题共 8 小题, 每题 5 分, 共 40 分)

- 1 (5 分) $\{a_n\}$ 是首项 $a_1 = 1$, 公差 $d = 3$ 的等差数列, 如果 $a_n = 2017$, 则序号 n 等于 ().
A. 667 B. 669 C. 671 D. 673
- 2 (5 分) 一个等比数列的第 1 项为 2, 第 3 项为 $\frac{1}{2}$, 则第 5 项为 ().
A. $\pm \frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\pm \frac{1}{8}$ D. $\frac{1}{8}$
- 3 (5 分) 设数列 $\{a_n\}$ 是等比数列, 若 $a_2 = 3$, $a_7 = 1$, 则数列 $\{a_n\}$ 的前 8 项的积为 ().
A. 56 B. 80 C. 81 D. 128
- 4 (5 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = n^2 - 1$, 则 ().
A. $a_n = 2n - 1$ B. $a_n = 2n + 1$
C. $a_n = \begin{cases} 0, n = 1 \\ 2n - 1, n > 1 \end{cases}$ D. $a_n = \begin{cases} 0, n = 1 \\ 2n + 1, n > 1 \end{cases}$
- 5 (5 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = -13$, $a_6 + a_8 = -2$, 且 $a_{n-1} = 2a_n - a_{n+1}$ ($n \geq 2$), 则数列 $\left\{\frac{1}{a_n a_{n+1}}\right\}$ 的前 13 项和为 ().
A. $\frac{1}{13}$ B. $-\frac{1}{13}$ C. $\frac{1}{11}$ D. $-\frac{1}{11}$
- 6 (5 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 4$, $a_2 = 2$, $a_3 = 1$, 又数列 $\{a_{n+1} - a_n\}$ 为等差数列, 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 ().
A. $a_n = 2^{3-n}$ B. $a_n = \frac{1}{2}(n^2 - 7n + 14)$
C. $a_n = \frac{1}{2}(n^2 - 2n + 9)$ D. $a_n = \frac{1}{2}(n^3 - 8n^2 + 13n + 2)$
- 7 (5 分) 已知正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项乘积 $T_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n^2 - 6n}$ ($n \in \mathbf{N}^*$), $b_n = \log_2 a_n$, 则数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n 的最大值为 ().
A. S_6 B. S_5 C. S_4 D. S_3
- 8 (5 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n = \begin{cases} a^{n-2}, n < 4 \\ (6-a)n - a, n \geq 4 \end{cases}$, 若对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$ 都有 $a_n < a_{n+1}$ 成立, 则实数 a 的取值范围为 ().
A. (1, 4) B. (2, 5) C. (1, 6) D. (4, 6)



填空题

(本大题共 6 小题, 每题 5 分, 共 30 分)

- 9 (5 分) 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_n = (-1)^n \times 2a_{n-1}$, ($n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*$), 则 $a_5 =$ _____.



- 10 (5分) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = n^2 + n + 1$, 则 $a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} =$ _____.
- 11 (5分) 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 3$, $a_{n+1} = S_n + 1$, 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 _____.
- 12 (5分) 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = -2$, $a_{n+1}a_n - a_{n+1} + a_n + 1 = 0$, 则 $a_{2018} =$ _____.
- 13 (5分) 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, 且 $a_5a_6 + a_4a_7 = 18$, 则 $\log_3 a_1 + \log_3 a_2 + \cdots + \log_3 a_{10} =$ _____.
- 14 (5分) 已知两个等差数列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 的前项和分别为 S_n 、 T_n , 对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$ 都有 $\frac{S_n}{T_n} = \frac{n+1}{n-2}$, 则 $\frac{a_4}{b_5 + b_7} + \frac{a_8}{b_3 + b_9} =$ _____.



解答题

(本大题共 4 小题, 共 50 分)

- 15 (11分) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差不为零, $a_1 = 25$, 且 a_1, a_{11}, a_{13} 成等比数列.
- (1) (5分) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.
- (2) (6分) 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 求 S_n 的最大值.
- 16 (11分) 已知数列 $\{a_n\}$ 中 $a_1 = 5$ 且 $a_n = 2a_{n-1} + 2^n - 1 (n \geq 2 \text{ 且 } n \in \mathbf{N}^*)$.
- (1) (5分) 证明: 数列 $\left\{\frac{a_n - 1}{2^n}\right\}$ 为等差数列.
- (2) (6分) 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n .



- 17 (11分) 设 $\{a_n\}$ 是等差数列, 其前 n 项和为 $S_n (n \in \mathbf{N}^*)$, $\{b_n\}$ 是等比数列, 公比大于 0, 其前 n 项和为 $T_n (n \in \mathbf{N}^*)$, 已知 $b_1 = 1$, $b_3 = b_2 + 2$, $b_4 = a_3 + a_5$, $b_5 = a_4 + 2a_6$.
- (1) (6分) 求 S_n 和 T_n .
- (2) (5分) 若 $S_n + (T_1 + T_2 + \cdots + T_n) = a_n + 4b_n$, 求正整数 n 的值.

- 18 (17分) 公差为 0 的等差数列 $\{a_n\}$, $a_1 = 1$, 且 a_1, a_2, a_5 成等比数列.
- (1) (4分) 求 $\{a_n\}$ 的公差 d 及通项公式.
- (2) (6分) 求数列 $\left\{\frac{1}{a_n a_{n+1}}\right\}$ 的前 n 项和 P_n .
- (3) (7分) 设 $b_n = a_n - 10$, 求数列 $\{|b_n|\}$ 的前 n 项和 T_n .