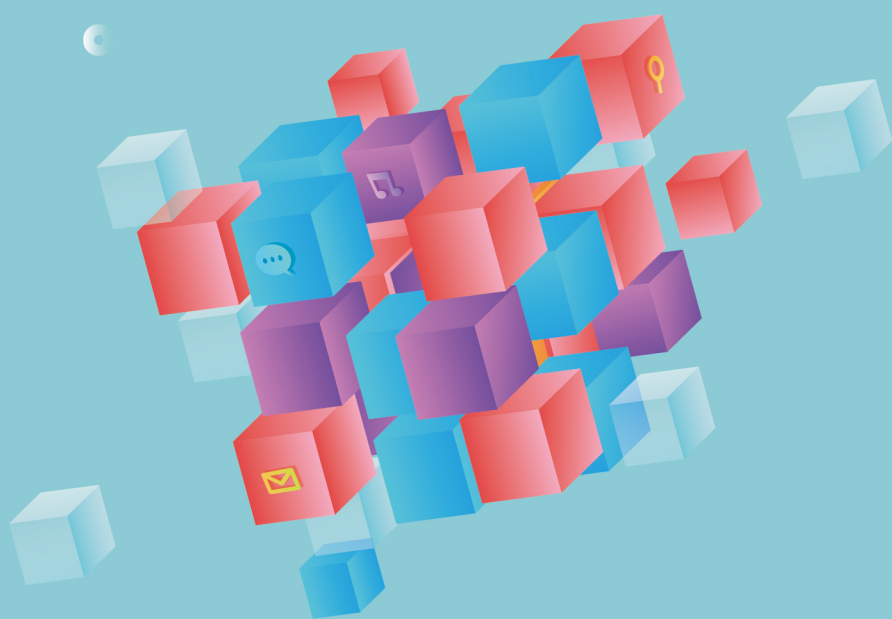


知识魔方

i 数学



总 主 编：马建明

本模块主编：吕金琳

教 研 团 队：吕金琳 严立

闫聪聪

封面设计：刘雅迪

前言

学而思一对一产品升级介绍

为进一步打造本地化产品，助力学生高考，学而思 1 对 1 产品团队打造了模块课系列产品，该产品旨在将高中阶段所有的知识点全部打散，再针对每一个学生的具体情况重新组合，制定个性化的学习方案，帮助学生进步。

随着模块课 1.0 版本的推进，无论是课程选择，还是内容学习上，学生有更多可以选择的空间，切实满足不同学生的个性化需求。本着“随需而变，才有未来”的精神，我们又推出了 2.0 版本《知识魔方·i 系列》，此系列涵盖《知识魔方·i 数学》、《知识魔方·i 物理》、《知识魔方·i 化学》、《知识魔方·i 生物》、《知识魔方·i 历史》多种学科，结合学科共性，统一产品逻辑，与此同时，兼顾到学科特色，创新学习形式，激发学生学习兴趣，做学习的主人。

本产品在设计上有三个突出的**特点**：

- (1) 模块产品，私人订制效果棒
- (2) 本地优化，海量资源覆盖广
- (3) 知识解构，新旧旧识尽入囊



扫描二维码，关注公众号，获取更多学习资料

高中数学课程产品设计

考点分析：以大数据方式分析考试重点难点，紧扣考试热点，让同学们的复习更具针对性。

知识导图：梳理知识结构，帮助同学们形成网络状的知识图谱，更有助于对知识点的理解记忆。

典型例题：分析考试情况，精选最新的考题，让同学们清楚每一个知识点的考法。

巩固练习：匹配同类型题目，讲练结合，锻炼提升解题能力。

本模块介绍

此讲设计的主要目的在于：让学生理解空间向量的概念并掌握其表示方法，并且能够在具体图形中完成空间向量的线性运算并正确使用运算律。而在这基础上，在进一步的学习后，能够用向量方法研究空间中的平行和垂直关系，并掌握利用空间向量求解空间角的求法。

目 录

第 1 讲 空间向量的基本概念..... 01

第 2 讲 空间向量的运算.....03

第 3 讲 空间向量在立体几何中的应用.....07



我们一起开始学习吧 o (*^_^*) o



第 1 讲

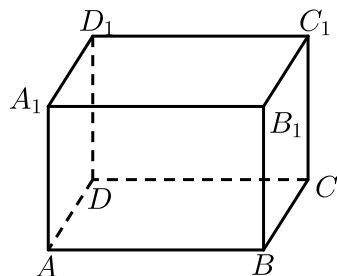
空间向量的基本概念





线性运算

- 1 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DD_1} = (\quad)$.

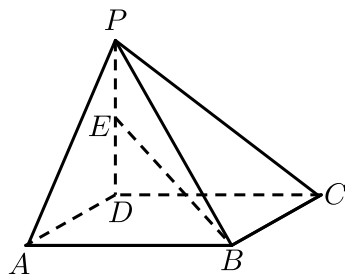


- A. $\overrightarrow{D_1B_1}$ B. $\overrightarrow{D_1B}$ C. $\overrightarrow{DB_1}$ D. $\overrightarrow{BD_1}$

- 2 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 M 为线段 B_1C_1 中点, 点 N 在线段 C_1D_1 上, 且 $\frac{C_1N}{ND} = 2$, 设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$, 则 $\overrightarrow{MN} = (\quad)$.

- A. $\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}$ B. $-\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{c}$
C. $\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{c}$ D. $-\frac{2}{3}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}$

- 3 如图, 在四棱锥 $P - ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是正方形, E 为 PD 中点, 若 $\overrightarrow{PA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{PB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{PC} = \vec{c}$, 则 $\overrightarrow{BE} = (\quad)$.



- A. $\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$ B. $\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$ C. $\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$ D. $\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{3}{2}\vec{c}$



基底

- 4 若 $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ 为空间的一组基底, 则下列各项中, 能构成基底的一组向量是 $(\quad)$.

- A. $\{\vec{a}, \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}\}$ B. $\{\vec{b}, \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}\}$
C. $\{\vec{c}, \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}\}$ D. $\{\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}, \vec{a} + 2\vec{b}\}$

第 2 讲

空间向量的运算





坐标运算

- 1 已知点 $A(-3, 1, -4)$, 则点 A 关于 x 轴对称的点的坐标为 ____.
- 2 已知向量 $\vec{a} = (2, 1, -3)$, $\vec{b} = (1, -1, 2)$, 则 $\vec{a} + 2\vec{b} = (\quad)$.
 A. $3\sqrt{2}$ B. $(4, -1, 1)$ C. $(5, 1, -4)$ D. $\sqrt{7}$



数量积的坐标运算

- 3 已知 $\vec{a} = (-3, 2, 5)$, $\vec{b} = (1, x, -1)$, 且 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2$, 则 x 的值是 ().
 A. 5 B. 4 C. 3 D. 6
- 4 已知向量 $\vec{a} = (2, -3, 1)$, $\vec{b} = (2, 0, 3)$, 则 $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = (\quad)$.
 A. 21 B. -21 C. 20 D. -20



平行垂直关系

- 5 已知向量 $\vec{a} = (2, 4, 5)$, $\vec{b} = (3, x, y)$, 分别是直线 l_1 、 l_2 的方向向量, 若 $l_1 // l_2$, 则 ().
 A. $x = 6, y = 15$ B. $x = 3, y = 15$ C. $x = \frac{8}{3}, y = \frac{10}{3}$ D. $x = 6, y = \frac{15}{2}$
- 6 已知空间向量 $\vec{a} = (2, 3, -2)$, $\vec{b} = (-1, 2, x)$, 若 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 则 $x = (\quad)$.
 A. -2 B. -1 C. 2 D. 4
- 7 已知向量 $\vec{a} = (3, -1, 2)$, $\vec{b} = (x, y, -4)$, 且 $\vec{a} // \vec{b}$, 则 $x + y = (\quad)$.
 A. 4 B. 8 C. -4 D. -8
- 8 已知空间向量 $\vec{a} = (-1, 1, 3)$, $\vec{b} = (2, -2, x)$, 若 $\vec{a} // \vec{b}$, 则实数 x 的值为 ().
 A. $\frac{4}{3}$ B. $-\frac{4}{3}$ C. -6 D. 6
- 9 已知向量 $\vec{a} = (1, -1, 0)$, $\vec{b} = (1, 0, 2)$, 若 $\vec{a} + k\vec{b}$ 与 $\vec{b}$ 垂直, 则 k 的值为 ____.



模长计算

- 10 已知 $A(1, 0, 1)$, $B(0, -1, 1)$, 则 $|\vec{AB}| = \underline{\hspace{2cm}}$.
- 11 在空间直角坐标系中, 已知 $A(1, 0, -3)$, $B(4, -2, 1)$, 则 $|AB| = (\quad)$.
 A. $\sqrt{15}$ B. $\sqrt{29}$ C. $\sqrt{34}$ D. $\sqrt{149}$
- 12 已知空间向量 $\vec{a} = (1, -1, 0)$, $\vec{b} = (3, -2, 1)$, 则 $|\vec{a} + \vec{b}| = (\quad)$.
 A. $\sqrt{5}$ B. $\sqrt{6}$ C. 5 D. $\sqrt{26}$

- 13 已知向量 $\vec{a} = (2, 3, 1)$, $\vec{b} = (1, 2, 0)$, 则 $|\vec{a} - \vec{b}|$ 等于 ().
 A. 1 B. $\sqrt{3}$ C. 3 D. 9
- 14 在空间直角坐标系中, 点 $A(-3, 4, 0)$ 与点 $B(2, -1, 6)$ 的距离是 ().
 A. $2\sqrt{43}$ B. $2\sqrt{21}$ C. 9 D. $\sqrt{86}$



夹角计算

- 15 已知空间三点 $A(1, 1, 1)$, $B(-1, 0, 4)$, $C(2, -2, 3)$, 则 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CA}$ 的夹角 θ 的大小是 ____.
- 16 若向量 $\vec{a} = (1, \lambda, 1)$, $\vec{b} = (2, -1, 2)$, 且 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 夹角的余弦值为 $\frac{1}{3}$, 则 $\lambda =$ ____.
- 17 若向量 $\vec{a} = (1, \lambda, 0)$, $\vec{b} = (2, -1, 2)$, 且 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角余弦值为 $\frac{2}{3}$, 则实数 λ 等于 ().
 A. 0 B. $-\frac{4}{3}$ C. 0 或 $-\frac{4}{3}$ D. 0 或 $\frac{4}{3}$



综合坐标运算问题

- 18 已知向量 $\vec{a} = (-1, 2, 1)$, $\vec{b} = (3, x, y)$, 且 $\vec{a} \parallel \vec{b}$, 那么 $|\vec{b}| =$ ().
 A. $3\sqrt{6}$ B. 6 C. 9 D. 18
- 19 已知 $\vec{a} = (2, 1, 3)$, $\vec{b} = (-4, 2, x)$, 且 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 则 $|\vec{a} - \vec{b}| =$ ____.

第 3 讲

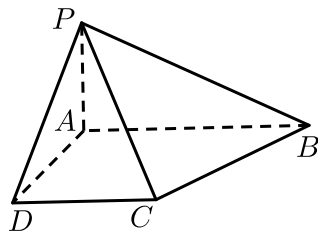
空间向量在立体几何中的运用





直线所成角

- 1 在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中, $A(1, 2-1)$, $B(1, 1, 1)$, $C(0, 1, 2)$, 则异面直线 OA 与 BC 所成角的余弦值为 _____.
- 2 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $AB \parallel DC$, $AD \perp AB$, $AD = AB = 2DC = 2PA = 2$, 则异面直线 PD 与 BC 所成角的余弦值为 ().

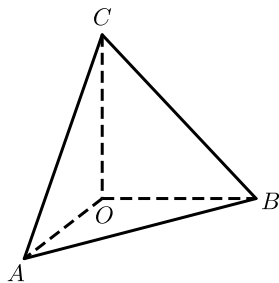


- A. $\frac{\sqrt{10}}{5}$ B. $\frac{4}{5}$ C. $\frac{\sqrt{10}}{10}$ D. $\frac{2\sqrt{2}}{5}$
- 3 已知正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中 $AA_1 = 2AB$, 则 B_1C 与 BD 所成角的正弦值等于 ().
- A. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ B. $\frac{\sqrt{10}}{10}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ D. $\frac{1}{3}$
- 4 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $BC = 1$, $AA_1 = \sqrt{2}$, 则异面直线 AD_1 与 B_1C 所成角的余弦值为 ().
- A. $\frac{1}{4}$ B. $-\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $-\frac{1}{3}$



平面与平面所成角

- 5 如图, 在四面体 $OABC$ 中, $OA = OB = OC$, $OA \perp OB$, $OB \perp OC$, $OC \perp OA$, 则二面角 $B-AC-O$ 的余弦值为 ().

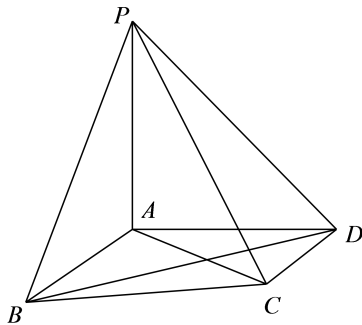


- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. 1 D. $\frac{1}{3}$



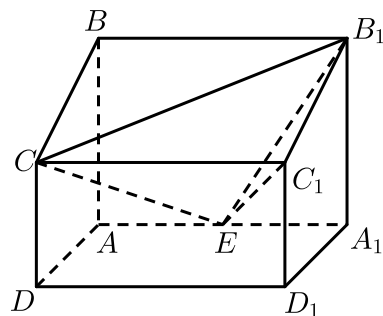
空间中平行垂直关系的判断与证明

- 6 设平面 α 的一个法向量为 $\vec{n}_1 = (1, 2, -2)$, 平面 β 的一个法向量为 $\vec{n}_2 = (-2, -4, k)$, 若 $\alpha // \beta$, 则 $k = (\quad)$.
- A. 2 B. -4 C. -2 D. 4
- 7 已知空间向量 $\vec{AB} = (2, 4, x)$, 平面 α 的一个法向量 $\vec{n} = (1, y, 3)$, 若 $AB \perp \alpha$, 则 $(\quad)$.
- A. $x = 6, y = 2$ B. $x = 2, y = 6$ C. $3x + 4y + 2 = 0$ D. $4x + 3y + 2 = 0$
- 8 已知 $\vec{AB} = (1, 5, -2)$, $\vec{BC} = (3, 1, z)$. 若 $\vec{AB} \perp \vec{BC}$, $\vec{BP} = (x - 1, y, -3)$, 且 $BP \perp$ 平面 ABC , 则实数 x, y, z 分别为 $(\quad)$.
- A. $\frac{33}{7}, -\frac{15}{7}, 4$ B. $\frac{40}{7}, -\frac{15}{7}, 4$ C. $\frac{40}{7}, -2, 4$ D. $4, \frac{40}{7}, -15$
- 9 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $AB // CD$, $AB \perp AD$, $PA = AB$, $AB : AD : CD = 2 : \sqrt{2} : 1$.



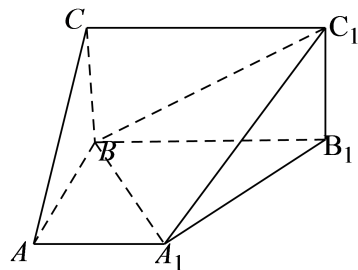
证明: $BD \perp PC$.

- 10 如图，四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，侧棱 $A_1A \perp$ 底面 $ABCD$ ， $AB \parallel DC$ ， $AB \perp AD$ ， $AD = CD = 1$ ， $AA_1 = AB = 2$ ， E 为棱 AA_1 的中点.



证明 $B_1C_1 \perp CE$.

- 11 已知如图，矩形 BCC_1B_1 所在平面与底面 ABB_1N 垂直，在直角梯形 ABB_1N 中， $AN \parallel BB_1$ ， $AB \perp AN$ ， $CB = BA = AN = 2$ ， $BB_1 = 4$.



- (1) 求证: $BC \parallel$ 平面 C_1B_1N .
- (2) 求证: $BN \perp$ 平面 C_1B_1N .

- 12 如图 5, 三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AA_1 \perp$ 平面 ABC , $BC \perp AC$, $BC = AC = 2$, $AA_1 = 3$, D 为 AC 的中点.

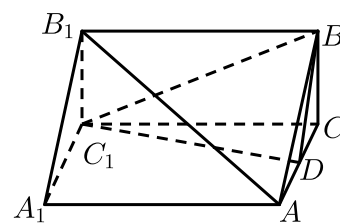
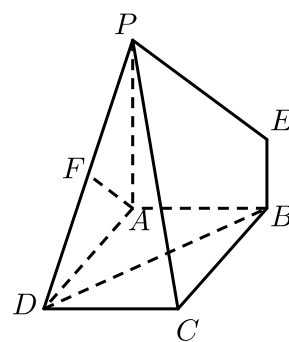


图 5

求证: $AB_1 \parallel$ 平面 BDC_1 .

- 13 如图, 四边形 $ABCD$ 是正方形, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $EB \parallel PA$, $AB = PA = 4$, $EB = 2$, F 为 PD 的中点.

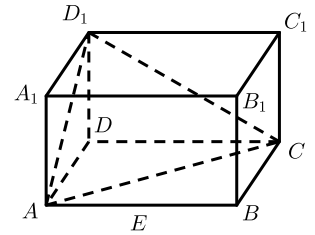


- (1) 求证: $AF \perp PC$.
- (2) 求证: $BD \parallel$ 平面 PEC .



距离问题

- 14 如图所示, 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AD = AA_1 = 2$, $AB = 4$, 点 E 是棱 AB 中点, 则点 E 到平面 ACD_1 的距离为 ().



- A. 1 B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\sqrt{2}$
- 15 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AD = AA_1 = 1$, $AB = 2$, 点 E 为 AB 的中点, 则点 B 到平面 D_1EC 的距离为 _____.