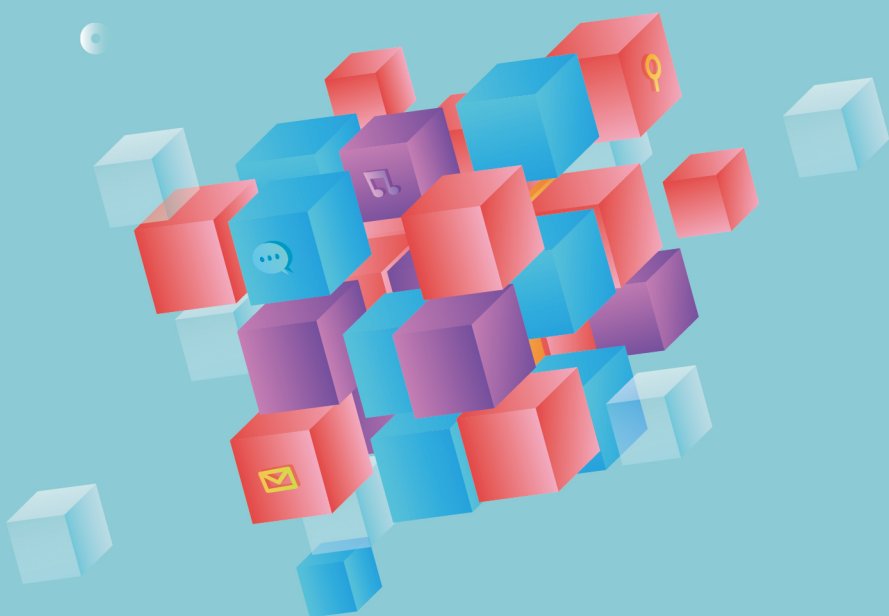


知识魔方

i 数学



总 主 编：马建明

本模块主编：吕金琳

教 研 团 队：吕金琳

封面设计：刘雅迪

前言

学而思一对一产品升级介绍

为进一步打造本地化产品，助力学生高考，学而思 1 对 1 产品团队打造了模块课系列产品，该产品旨在将高中阶段所有的知识点全部打散，再针对每一个学生的具体情况重新组合，制定个性化的学习方案，帮助学生进步。

随着模块课 1.0 版本的推进，无论是课程选择，还是内容学习上，学生有更多可以选择的空间，切实满足不同学生的个性化需求。本着“随需而变，才有未来”的精神，我们又推出了 2.0 版本《知识魔方·i 系列》，此系列涵盖《知识魔方·i 数学》、《知识魔方·i 物理》、《知识魔方·i 化学》、《知识魔方·i 生物》、《知识魔方·i 历史》多种学科，结合学科共性，统一产品逻辑，与此同时，兼顾到学科特色，创新学习形式，激发学生学习兴趣，做学习的主人。

本产品在设计上有三个突出的**特点**：

- (1) 模块产品，私人订制效果棒
- (2) 本地优化，海量资源覆盖广
- (3) 知识解构，新旧旧识尽入囊



扫描二维码，关注公众号，获取更多学习资料

高中数学课程产品设计

考点分析：以大数据方式分析考试重点难点，紧扣考试热点，让同学们的复习更具针对性。

知识导图：梳理知识结构，帮助同学们形成网络状的知识图谱，更有助于对知识点的理解记忆。

典型例题：分析考试情况，精选最新的考题，让同学们清楚每一个知识点的考法。

巩固练习：匹配同类型题目，讲练结合，锻炼提升解题能力。

本模块介绍

学习此模块，要求学生们能够掌握圆的标准方程和一般方程，并了解圆的相关性质，并且能够利用圆的性质求解与圆有关的问题。

掌握以上内容后，我们便会学习到直线与圆的位置关系的判断方法，并有能力解决常见的直线和圆的综合问题。

目 录

第 1 讲 圆的方程 01

- 知 识 点 1 圆的定义
- 知 识 点 2 圆的标准方程
- 知 识 点 3 圆的一般方程

第 2 讲 直线与圆的位置关系.....05

- 知 识 点 1 点与圆的位置关系
- 知 识 点 2 直线与圆的位置关系
- 知 识 点 3 直线与圆相交时的重点题型
- 知 识 点 4 直线与圆相切时的重点题型
- 知 识 点 5 综合问题

第 2 讲 圆与圆的位置关系.....11

- 知 识 点 1 圆与圆的位置关系
- 知 识 点 2 两圆公切线条数的确定
- 知 识 点 3 两圆的公共弦



我们一起开始学习吧 o (*^_^*) o



第 1 讲

圆的方程





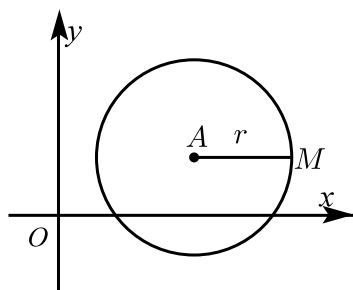
圆的定义

1. 圆的定义

平面内与定点的距离等于定长的点的集合(轨迹)是**圆**
(**定点为圆心**，**定长为半径**).

2. 对圆的分析

定位条件→圆心 定形条件→半径



圆的标准方程

圆的标准方程

圆心为 $C(a, b)$ ，半径为 r 的**圆的标准方程**是

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

特别地，圆心在坐标原点，半径为 r 的**圆的标准方程**是

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

- 1 圆心在 y 轴上，半径为 2，且过点 $(2, 4)$ 的圆的方程为 _____.
- 2 已知圆 C 过点 $(0, 1)$ ， $(-2, 3)$ 且圆心在 x 轴负半轴上，则圆 C 的标准方程为 _____.
- 3 求经过两点 $A(-1, 4)$ 、 $B(3, 2)$ 且圆心在 y 轴上的圆的方程；
- 4 已知圆 C 过 $A(1, 0)$ ， $B(0, -1)$ 两点，且圆心 C 在直线 $x - y + 2 = 0$ 上. 则圆 C 的标准方程为 _____.
- 5 圆心在直线 $2x - 3y - 1 = 0$ 上的圆与 x 轴交于 $A(1, 0)$ ， $B(3, 0)$ 两点，则圆的方程为 ()
 A. $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 2$ B. $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 2$
 C. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 2$ D. $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 2$
- 6 已知圆 C 的圆心在 x 轴的非负半轴上，点 $M(0, \sqrt{5})$ 在圆 C 上，且圆心到直线 $2x - y = 0$ 的距离为 $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ ，则圆 C 的方程为 _____.



- 7 已知直线 $l: (k-1)x - 2y + 5 - 3k = 0 (k \in \mathbf{R})$ 恒过定点 P , 圆 C 经过点 $A(5, -1)$ 和点 P , 且圆心在直线 $x - 2y + 2 = 0$ 上.

(1) 求定点 P 的坐标.

(2) 求圆 C 的方程.



圆的一般方程

1. 圆的一般方程

形如 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ 的 **二元二次方程**,

当 $D^2 + E^2 - 4F > 0$ 时, 叫做 **圆的一般方程**.

其中, 圆心为 $(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2})$, 半径为 $\frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$

2. 圆的一般方程的分析

(1) 对方程配方, 得 _____

所以圆心为 _____, 半径为 _____;

(2) 当 $D^2 + E^2 - 4F = 0$ 时, 方程表示 _____;

(3) 当 $D^2 + E^2 - 4F < 0$ 时, 方程没有实数解, 它 _____.

3. 圆的一般方程形式的特点

① x^2, y^2 的系数相同且不等于零;

② 不含 xy 项.

4. 扩展

形如 $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ 的方程表示圆的条件:

① $A = C \neq 0$; ② $B = 0$; ③ $(\frac{D}{A})^2 + (\frac{E}{A})^2 - \frac{4F}{A} > 0$, 即 $D^2 + E^2 - 4AF > 0$.



圆的一般方程求解

- 8 圆 $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 1$ 的圆心和半径分别是 ().

A. $(1, -1)$; 1

B. $(1, -1)$; $\sqrt{3}$

C. $(-1, 1)$; 1

D. $(-1, 1)$; $\sqrt{3}$

- 9 圆心在直线 $y = x$ 上, 且经过点 $A(-1, 1)$ 、 $B(3, -1)$ 的圆的一般方程是 _____.

- 10 在平面直角坐标系中, 圆的方程为 $x^2 + y^2 + 2x + 6y + 1 = 0$, 该圆的周长为 _____.



- 11 若直线 $3x + y + a = 0$ 过圆 $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$ 的圆心, 则 a 的值为 ().
 A. -1 B. 1 C. 3 D. -3
- 12 方程 $x^2 + y^2 + ax - 2by + c = 0$ 表示圆心为 $C(2, 2)$, 半径为 2 的圆, 则 a, b, c 的值依次为 ().
 A. 4, 2, 4 B. -4, 2, 4 C. -4, 2, -4 D. 4, -2, -4

包罗万象 举一千从

- 13 圆 $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 3 = 0$ 的圆心到直线 $x - ay + 1 = 0$ 的距离为 2, 则 $a =$ ____.
- 14 已知点 $P(2, 0)$ 及圆 $C: x^2 + y^2 - 6x + 4y + 4 = 0$.

若直线 l 过点 P 且与圆心 C 的距离为 1, 求直线 l 的方程.

圆的一般方程中参数满足的条件

- 15 若方程 $x^2 + y^2 - x + my + 2 = 0$ 表示圆, 则实数 m 的取值范围是 ____.
- 16 若方程 $x^2 + y^2 + 4mx - 2y + 5m = 0$ 表示的曲线为圆, 则 m 的取值范围是 ().
 A. $\frac{1}{4} < m < 1$ B. $m < \frac{1}{4}$ 或 $m > 1$ C. $m < \frac{1}{4}$ D. $m > 1$
- 17 “ $m > \frac{1}{2}$ ” 是 “ $x^2 + y^2 - 2mx - m^2 - 5m + 3 = 0$ 为圆的方程” 的 ().
 A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分又不必要条件

精进不休 日新月异

- 18 已知圆 $C: x^2 + y^2 + kx + 2y = -k^2$, 则 k 的取值范围为 ____, 当圆 C 的面积取最大值时, 圆心 C 的坐标为 ____.
- 19 圆 $C: x^2 + y^2 + 2x - 2my - 4 - 4m = 0 (m \in \mathbf{R})$, 则当圆 C 的面积最小时, 圆上的点到坐标原点的距离的最大值为 ().
 A. $\sqrt{5}$ B. 6 C. $\sqrt{5} - 1$ D. $\sqrt{5} + 1$

包罗万象 举一千从

- 20 若圆 $x^2 + y^2 + ax - by = 0$ 的圆心在第二象限, 则直线 $x + ay - b = 0$ 一定不经过 ().
 A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

第 2 讲

直线与圆的位置关系





点与圆的位置关系

1. 点与圆的位置关系

点在圆内、圆上、圆外.

2. 点与圆的位置关系的判定

①利用点到圆心的距离来判定:

由两点间的距离公式求出该点到圆心的距离, 再与圆的半径比较大小.

设点 $M(x_0, y_0)$ 到圆 $C: (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ 的圆心 C 的距离为 d , 则

$$d = |MC| = \sqrt{(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2}.$$

将所给点 M 到圆心 C 的距离和半径 r 作比较:

若 $|CM| = r$, 则点 M 在圆 C _____;

若 $|CM| > r$, 则点 M 在圆 C _____;

若 $|CM| < r$, 则点 M 在圆 C _____.

②利用圆的标准方程来判定:

点 $M(m, n)$ 在圆 C _____ $\Leftrightarrow (m-a)^2 + (n-b)^2 = r^2$;

点 $M(m, n)$ 在圆 C _____ $\Leftrightarrow (m-a)^2 + (n-b)^2 > r^2$;

点 $M(m, n)$ 在圆 C _____ $\Leftrightarrow (m-a)^2 + (n-b)^2 < r^2$.

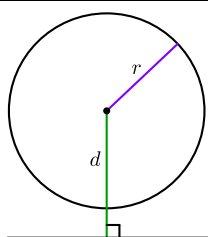
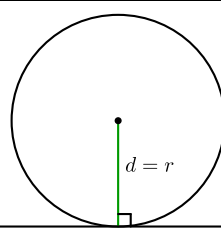
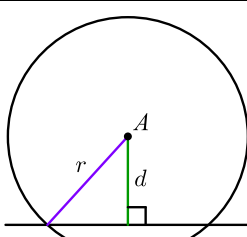


直线与圆的位置关系

1. 直线与圆的位置关系

直线和圆有相交、相切、相离三种位置关系.

2. 直线与圆位置关系的判定

判定方法	位置关系	相离	相切	相交
	图形			
法一： 代数法	二元二次方程组解的情况	无解	仅有一组解	有两组不同的解
	消元后得到的一元二次方程根的情况	无实数根 ($\Delta < 0$)	有两个相等的实数根 ($\Delta = 0$)	有两个不相等的实数根 ($\Delta > 0$)
法二： 几何法	圆心到直线的距离 d 与圆的半径 r 的关系	$d > r$	$d = r$	$d < r$



3. 直线与圆相交的特殊判断方法——定点法

当直线上存在一个位于圆内的点时，该直线与圆相交。



判断直线与圆的位置关系

- 1 直线 $x + 2y + 3 = 0$ 与圆 $C: x^2 + (y + 1)^2 = 1$ 的位置关系是 () .
 A. 相交 B. 相切 C. 相离 D. 不确定
- 2 直线 $y = x + 1$ 与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 的位置关系是 () .
 A. 相切 B. 相交但直线不过圆心
 C. 相交且直线过圆心 D. 相离



根据直线与圆的位置关系求解参数

- 3 直线 $l: x - y + 1 = 0$ 与圆 $C: x^2 + y^2 + 2ay + a^2 - 2 = 0$ 有公共点，则实数 a 的取值范围是 _____ .
- 4 曲线 $C: x = -\sqrt{4y - y^2}$ 与直线 $l: x - y + m = 0$ 有两个交点，则实数 m 的取值范围是 () .
 A. $[2, 2\sqrt{2} + 2]$ B. $[2 - 2\sqrt{2}, 2\sqrt{2} + 2]$ C. $(2, 2\sqrt{2} + 2]$ D. $[2, 2\sqrt{2} + 2)$



圆上点到直线的距离问题

- 5 圆 $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 10 = 0$ 上的点到直线 $x + y - 14 = 0$ 的最大距离与最小距离的差是 ()
 A. 36 B. 18 C. $5\sqrt{2}$ D. $6\sqrt{2}$



直线与圆相交时的重点题型

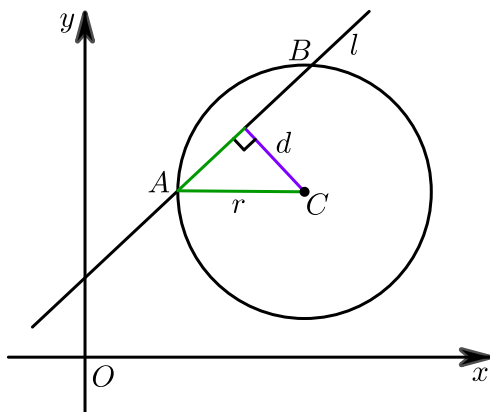


直线与圆相交的弦长的求法

1. 方法一：几何法

如图所示，直线 l 与圆 C 相交于 A, B 两点，线段 AB 的长即为 l 与圆相交的弦长。

设弦心距为 d ，半径为 r ，弦为 AB ，则有 $|AB| = 2\sqrt{r^2 - d^2}$ 。





2. 方法二：代数法

直线 l 与圆交于 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 直线 l 的斜率存在, 设为 k , 则联立直线方程和圆的方程得方程组.

方法一: 解方程组得点 A 、 B 的坐标, 再由两点间的距离公式求弦长 $|AB|$.

方法二: 消去一个未知数得到一个一元二次方程, 利用根与系数的关系可得弦长

$$|AB| = \sqrt{1+k^2}|x_1-x_2| = \sqrt{1+\frac{1}{k^2}}|y_1-y_2|, \text{ 其中 } k \text{ 为直线的斜率且 } k \neq 0.$$

特别地, 当 $k=0$ 时, 可直接利用 $|AB| = |x_1-x_2|$ 计算;

当 k 不存在时, 可直接利用 $|AB| = |y_1-y_2|$ 计算.



求解弦长

- 6 直线 $2x-y-1=0$ 与圆 $x^2+y^2-6x-16=0$ 相交所得的弦长为 _____.
- 7 已知圆 $x^2+y^2+2x-2y+a=0$ 截直线 $x+y+2=0$ 所得弦的长度为 4, 则实数 a 的值是 ()
A. -10 B. -8 C. -4 D. -2
- 8 已知直线 l 经过点 $P(-4, 2)$, 且被圆 $(x+1)^2+(y+2)^2=25$ 截得的弦长为 8, 则直线 l 的方程是 ()
A. $7x+24y-20=0$ B. $4x+3y+25=0$
C. $4x+3y+25=0$ 或 $x=-4$ D. $7x+24y-20=0$ 或 $x=-4$
- 9 已知直线 l 经过两条直线 $2x-y-3=0$ 和 $4x-3y-5=0$ 的交点, 且与直线 $x+y-2=0$ 垂直.
(1) 求直线 l 的方程.
(2) 若圆 C 的圆心为点 $(3, 0)$, 直线 l 被该圆所截得的弦长为 $2\sqrt{2}$, 求圆 C 的标准方程.



最短弦长

- 10 过点 $(1, 1)$ 的直线与圆 $(x-2)^2+(y-3)^2=9$ 相交于 A, B 两点, 则 $|AB|$ 的最小值为 ().
A. $2\sqrt{3}$ B. 4 C. $2\sqrt{5}$ D. 5
- 11 在直角坐标系 xOy 中, 已知圆 $C: x^2+y^2-(8-2m)x-4my+5m^2-8m=0$, 直线 l 经过点 $(2, 1)$, 若对任意的实数 m , 直线 l 被圆 C 截得弦长为定值, 则直线 l 方程为 _____.
- 12 已知圆 $C: (x-2)^2+(y-3)^2=20$, 直线 $l: (2m+1)x+(m+1)y-5m-2=0$, 则直线 l 恒过定点 _____, 直线 l 被圆 C 截得的最短弦长为 _____.



点到直线距离为定值的点个数问题

- 13 已知圆 $x^2 + y^2 = 8$ ，直线 $l: y = x + b$ ，当圆上有且仅有 1 个点到直线 l 的距离等于 $\sqrt{2}$ 时 b 的值为 _____.
- 14 若圆 $x^2 + y^2 = r^2 (r > 0)$ 上仅有 4 个点到直线 $x - y - 2 = 0$ 的距离为 1，则 r 的取值范围为 ().
- A. $(\sqrt{2} + 1, +\infty)$ B. $(\sqrt{2} - 1, \sqrt{2} + 1)$ C. $(0, \sqrt{2} - 1)$ D. $(0, \sqrt{2} + 1)$
- 15 若圆 $C: x^2 + y^2 - 4x - 4y - 10 = 0$ 上至少有三个不同的点到直线 $l: x - y + c = 0$ 的距离为 $2\sqrt{2}$ ，则 c 的取值范围是 ().
- A. $[-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$ B. $(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ C. $[-2, 2]$ D. $(-2, 2)$



直线与圆相切时的重点题型

1. 过圆上一点的切线方程

与圆 $x^2 + y^2 = r^2$ 相切于点 (x_1, y_1) 的切线方程是 $x_1x + y_1y = r^2$;

与圆 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ 相切于点 (x_1, y_1) 的切线方程是 $(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = r^2$;

与圆 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ 相切于点 (x_1, y_1) 的切线方程是 $x_1x + y_1y + D \cdot \frac{x + x_1}{2} + E \cdot \frac{y + y_1}{2} + F = 0$.

2. 过圆外一点的切线方程

设 $P(x_0, y_0)$ 是圆 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ 外一点，求过 P_0 点的圆的切线方程.

方法一：设切点是 $P_1(x_1, y_1)$ ，解方程组

$$\begin{cases} (x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 = r^2, \\ (x_0 - a)(x_1 - a) + (y_0 - b)(y_1 - b) = r^2, \end{cases}$$

求出切点 P_1 的坐标，即可写出切线方程.

方法二：当两条切线斜率都存在时，设切线方程是 $y - y_0 = k(x - x_0)$ ，即 $kx - y - kx_0 + y_0 = 0$ ，再由 $\frac{|ka - b - kx_0 + y_0|}{\sqrt{k^2 + 1}} = r$ 求出待定系数 k ，就可写出切线方程.

当有一条切线斜率不存在时，斜率不存在的切线方程为 $x = x_0$ ，切线斜率存在的切线方程的求法同上.



过定点作圆的切线

- 16 过点 $P(0, 1)$ 作圆 $x^2 + y^2 + 2x - 1 = 0$ 的切线，则切线方程为 ().
- A. $y = -x + 1$ B. $y = x + 1$ C. $y = -x + 2$ D. $y = x + 2$
- 17 过直线 $x + y - 2\sqrt{2} = 0$ 上的点 P 作圆 $x^2 + y^2 = 1$ 的两条切线，若两条切线的夹角是 60° ，则点 P 的坐标是 _____.



- 18 过点 $(1, 2)$ 总可以作两条直线与圆 $x^2 + y^2 + kx + 2y + k^2 - 15 = 0$ 相切, 则实数 k 的取值范围是 _____.
- 19 已知过点 $P(2, 2)$ 的直线与圆 $(x - 1)^2 + y^2 = 5$ 相切, 且与直线 $ax - y + 1 = 0$ 垂直, 则 $a =$ ().
- A. $-\frac{1}{2}$ B. 1 C. 2 D. $\frac{1}{2}$



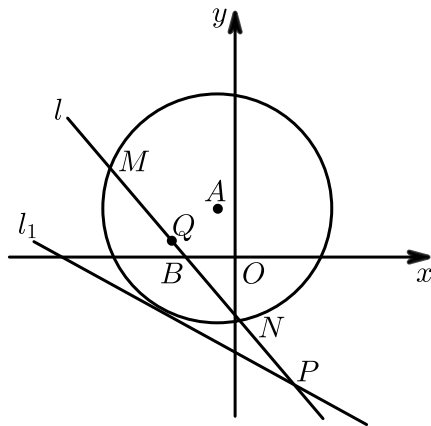
根据其他条件求解切线方程或圆的方程

- 20 平行于直线 $2x + y + 1 = 0$ 且与圆 $x^2 + y^2 = 5$ 相切的直线的方程是 ().
- A. $2x + y + 5 = 0$ 或 $2x + y - 5 = 0$ B. $2x + y + \sqrt{5} = 0$ 或 $2x + y - \sqrt{5} = 0$
- C. $2x - y + 5 = 0$ 或 $2x - y - 5 = 0$ D. $2x - y + \sqrt{5} = 0$ 或 $2x - y - \sqrt{5} = 0$
- 21 已知圆 $C: x^2 + 2x + y^2 = 0$ 的一条斜率为 1 的切线 l_1 , 若与 l_1 垂直的直线 l_2 平分该圆, 则直线 l_2 的方程为 _____.
- 22 与圆 $x^2 + (y - 2)^2 = 1$ 相切, 且在两坐标轴上截距相等的直线方程为 _____.



综合问题

- 23 已知圆 $C: x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$.
- (1) 过点 $P(1, 3)$ 的直线 l_1 被圆 C 截得的弦最短, 求 l_1 的方程.
- (2) 过点 $Q(-1, 0)$ 的直线 l_2 与圆 C 相切, 求 l_2 的方程.
- 24 如图所示, 已知以点 $A(-1, 2)$ 为圆心的圆与直线 $l_1: x + 2y + 7 = 0$ 相切, 过点 $B(-2, 0)$ 的动直线 l 与圆 A 相交于 M, N 两点, Q 是 MN 的中点, 直线 l 与 l_1 相交于点 P .



- (1) 求圆 A 的方程.
- (2) 当 $|MN| = 2\sqrt{19}$ 时, 求直线 l 的方程.
- (3) $\vec{BQ} \cdot \vec{BP}$ 是否为定值? 如果是, 求出其定值; 如果不是, 请说明理由.

第 3 讲

圆与圆的位置关系





圆与圆的位置关系

1. 圆与圆的位置关系

圆与圆有五种位置关系：**相交**、**外离**、**外切**、**内切**和**内含**。

2. 圆与圆的位置关系的判断方法

①利用**圆心距和两圆半径比较大小** (几何法):

设两圆 $(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = r_1^2$ 与 $(x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 = r_2^2$ 的圆心距为 d ，显然 $d = \sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2}$ ，则位置关系表示如下：

位置关系	关系式	图示	公切线
外离	$d > r_1 + r_2$		四条
外切	$d = r_1 + r_2$		三条
相交	$ r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2$		两条
内切	$d = r_1 - r_2 $		一条
内含	$0 \leq d < r_1 - r_2 $		无



②利用两圆的交点进行判断 (代数法):

设由两圆的方程组成的方程组为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0, \\ x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2 = 0. \end{cases}$$

由此方程组得:

有两组不同的实数解 $\Leftrightarrow$ 两圆_____;

有两组相同的实数解 $\Leftrightarrow$ 两圆_____;

无实数解 $\Leftrightarrow$ 两圆_____.



圆与圆位置关系的判定

- 1 已知圆 $C_1: x^2 + y^2 + 2x + 8y - 8 = 0$, 圆 $C_2: x^2 + y^2 - 4x - 4y - 2 = 0$, 则圆 C_1 与圆 C_2 的位置关系是_____.
- 2 圆 $C_1: x^2 + y^2 = 9$ 与圆 $C_2: (x-1)^2 + (y+2)^2 = 36$ 的位置关系是 ().
A. 相交 B. 相离 C. 内切 D. 内含
- 3 已知圆 $M: x^2 + y^2 - 2ay = 0 (a > 0)$ 截直线 $x + y = 0$ 所得线段的长度是 $2\sqrt{2}$, 则圆 M 与圆 $N: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ 的位置关系是 ().
A. 内切 B. 相交 C. 外切 D. 相离



根据位置关系求解方程

- 4 以 $(-1, 2)$ 为圆心, 且与圆 $C: (x-3)^2 + (y+1)^2 = 9$ 外切的圆的标准方程是_____.
- 5 已知以 $C(-4, 3)$ 为圆心的圆与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 相内切, 则圆 C 的方程为 ().
A. $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 36$ B. $(x+4)^2 + (y-3)^2 = 16$
C. $(x+4)^2 + (y-3)^2 = 36$ D. $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 16$



精进不休 日新月异

- 6 已知圆 $C: x^2 + y^2 - 8x + 15 = 0$, 若直线 $y = kx - 2$ 上至少存在一点, 使得以该点为圆心, 1 为半径的圆与圆 C 有公共点, 则 k 的最大值是 ().
A. $\frac{3}{2}$ B. $\frac{4}{3}$ C. $\frac{5}{3}$ D. $\frac{5}{4}$



两圆公切线条数的确定

1. 两圆公切线条数的确定

两圆的公切线的条数是由两圆的位置关系确定的

2. 求解办法

设两圆的圆心距为 d ，两圆的半径分别为 r_1, r_2 ，则：

当 $d > r_1 + r_2$ 时，两圆外离，此时有_____公切线；

当 $d = r_1 + r_2$ 时，两圆外切，此时有_____切线；

当 $r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2$ 时，两圆相交，有_____公切线；

当 $d = r_1 - r_2$ 时，两圆内切，此时有_____公切线；

当 $d < r_1 - r_2$ 时，两圆内含，此时_____公切线。



判断公切线条数

- 7 已知圆 $M: x^2 + y^2 - 4y = 0$ ，圆 $N: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ ，则圆 M 与圆 N 的公切线条数是 ()
 A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
- 8 两个圆 $C_1: (x+1)^2 + (y+1)^2 = 1$ 与圆 $C_2: x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$ 的公切线有且仅有 ()。
 A. 1 条 B. 2 条 C. 3 条 D. 4 条
- 9 圆 $C: x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$ 与圆 $M: x^2 + y^2 + 4x - 4y - 1 = 0$ 的公切线有_____条。



根据公切线条数求解参数取值范围

- 10 已知圆 $C_1: x^2 + (y+m)^2 = 2$ 与圆 $C_2: (x-m)^2 + y^2 = 8$ 恰有两条公切线，则实数 m 的取值范围是 ()。
 A. $1 < m < 3$ B. $-1 < m < 1$
 C. $m > 3$ D. $-3 < m < -1$ 或 $1 < m < 3$
- 11 两个圆 $C_1: x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$ 与 $C_2: x^2 + y^2 - 2mx + 4my + 5m^2 - 20 = 0$ 的公切线恰好有 2 条，则 m 的取值范围是 ()。
 A. $(-2, 0)$ B. $(-2, 0) \cup (2, 4)$ C. $(2, 4)$ D. $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$
- 12 圆 $C_1: x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0$ 与圆 $C_2: x^2 + y^2 - 4x - 8y + m = 0$ 恰有四条公切线，则实数 m 的取值范围为_____。
- 13 已知圆 $C_1: x^2 + y^2 - 2mx + 4y + m^2 - 5 = 0$ 与圆 $x^2 + y^2 + 2x = 0$ ，若两圆有三条公切线，求实数 m 的值。



包罗万象 举一千从

- 14 已知圆 $C_1: x^2 + y^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0$ 和 $C_2: x^2 + y^2 - 2by + b^2 - 4 = 0$ 恰有三条公切线, 则 $(a-3)^2 + (b-4)^2$ 的最小值为 ().
- A. $1 + \sqrt{2}$ B. 2 C. $3 - \sqrt{2}$ D. 4

精进不休 日新月异

- 15 已知圆 $C_1: (x-a)^2 + (y+2)^2 = 4$ 与圆 $C_2: (x+b)^2 + (y+2)^2 = 1$ 有四条公切线, 则直线 $x+y-1=0$ 与圆 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = 1$ 的位置关系是 _____.



两圆的公共弦

1. 两圆的公共弦的定义

当两圆相交时, 必有两个交点, 那么过这两个交点的弦称为两圆的**公共弦**.

2. 公共弦所在直线方程

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0 \text{ ①} \\ x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2 = 0 \text{ ②} \end{cases}$$

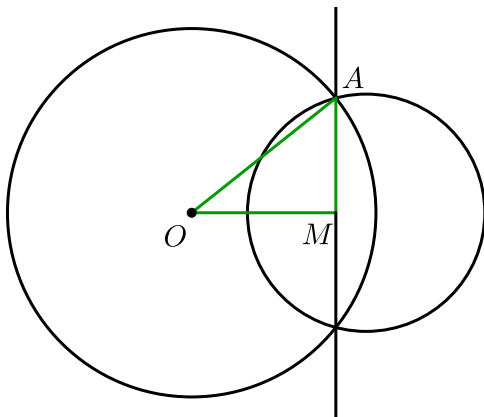
$$\text{①}-\text{②} \text{ 得 } (D_1 - D_2)x + (E_1 - E_2)y + F_1 - F_2 = 0 \text{ ③}$$

圆 C_1 与 C_2 相交, ③为公共弦所在的直线方程.

3. 两圆公共弦长的求法

方法一: 将两圆的方程联立, 解出两交点的坐标, 利用两点间的距离公式求弦长;

方法二: 求出公共弦所在直线的方程, 利用勾股定理理解如图所示的 $Rt \triangle OAM$, 求出弦长.



求解公共弦长

- 16 两圆 $x^2 + y^2 - 4 = 0$ 与 $x^2 + y^2 + 6x + 8y + 6 = 0$ 的公共弦长为 _____.
- 17 已知两圆 $x^2 + y^2 - 2x + 10y - 24 = 0$ 和 $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 8 = 0$ 相交, 则公共弦的长度为 _____.



- 18 已知圆 $C_1: x^2 + y^2 = 4$ 和圆 $C_2: x^2 + y^2 + 2ay - 6 = 0 (a > 0)$ 的公共弦长为 2, 则实数 a 的值为 ().

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\sqrt{3}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\sqrt{2}$



求解公共弦所在直线方程

- 19 已知圆 $C: x^2 + y^2 = 4$ 与圆 $D: x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0$ 相交于 A, B 两点, 则两圆公共弦线所在的直线方程为 _____, 公共弦 AB 的长为 _____.
- 20 两圆 $x^2 + y^2 - 4 = 0$, $x^2 + y^2 - 4x + 4y - 12 = 0$ 的公共弦所在的直线方程为 _____, 公共弦长为 _____.