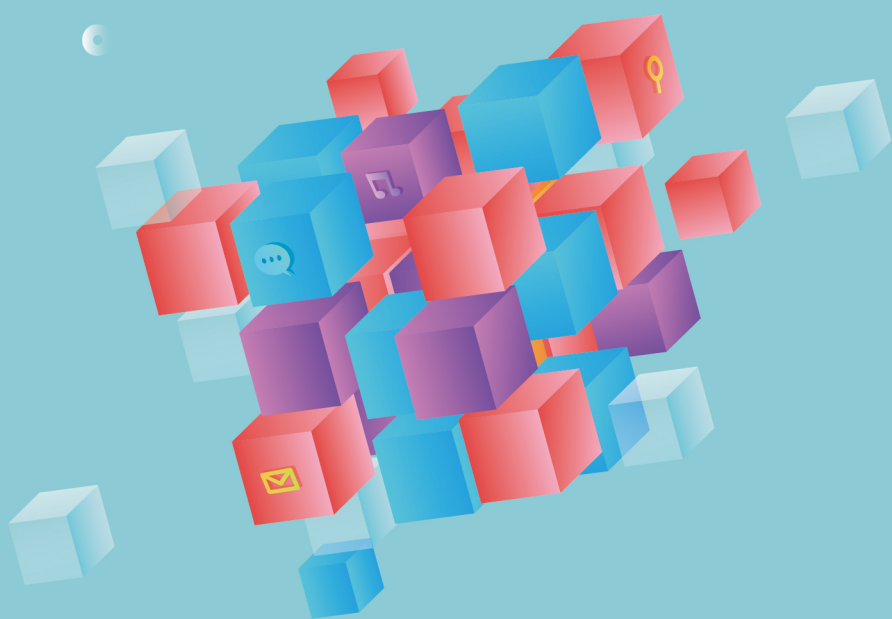


知识魔方

i 数学



总 主 编：马建明

本模块主编：吕金琳

教 研 团 队：吕金琳 严立

闫聪聪

封面设计：刘雅迪

前言

学而思一对一产品升级介绍

为进一步打造本地化产品，助力学生高考，学而思 1 对 1 产品团队打造了模块课系列产品，该产品旨在将高中阶段所有的知识点全部打散，再针对每一个学生的具体情况重新组合，制定个性化的学习方案，帮助学生进步。

随着模块课 1.0 版本的推进，无论是课程选择，还是内容学习上，学生有更多可以选择的空间，切实满足不同学生的个性化需求。本着“随需而变，才有未来”的精神，我们又推出了 2.0 版本《知识魔方·i 系列》，此系列涵盖《知识魔方·i 数学》、《知识魔方·i 物理》、《知识魔方·i 化学》、《知识魔方·i 生物》、《知识魔方·i 历史》多种学科，结合学科共性，统一产品逻辑，与此同时，兼顾到学科特色，创新学习形式，激发学生学习兴趣，做学习的主人。

本产品在设计上有三个突出的**特点**：

- (1) 模块产品，私人订制效果棒
- (2) 本地优化，海量资源覆盖广
- (3) 知识解构，新旧旧识尽入囊



扫描二维码，关注公众号，获取更多学习资料

高中数学课程产品设计

考点分析：以大数据方式分析考试重点难点，紧扣考试热点，让同学们的复习更具针对性。

知识导图：梳理知识结构，帮助同学们形成网络状的知识图谱，更有助于对知识点的理解记忆。

典型例题：分析考试情况，精选最新的考题，让同学们清楚每一个知识点的考法。

巩固练习：匹配同类型题目，讲练结合，锻炼提升解题能力。

本模块介绍

目 录

第 1 讲 数列的概念..... 01

第 2 讲 等差数列.....05

第 3 讲 等比数列.....07

第 4 讲 数列求通项.....11

第 5 讲 数列求和..... 13



我们一起开始学习吧 o (*^_^*) o



第 1 讲

数列的概念





通项公式

- 1 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 3n - 5$, 则 $a_3 =$ _____.
- 2 若一个数列的前 4 项分别是 $\sqrt{5}, \sqrt{11}, \sqrt{17}, \sqrt{23}$, 则该数列的一个通项公式为 ().
 A. $\sqrt{n+4}$ B. $\sqrt{6n-1}$ C. $\sqrt{3n+2}$ D. $\sqrt{6n+1}$
- 3 数列 1, 3, 6, 10, ... 的一个通项公式是 ().
 A. $a_n = n^2 - (n-1)$ B. $a_n = n^2 - 1$ C. $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$ D. $a_n = \frac{n(n-1)}{2}$
- 4 已知数列 $\{a_n\}$, $a_n = (-1)^{n+1} \frac{n^2+1}{2n+1}$, 那么这个数列中的第 5 项是 ().
 A. $\frac{26}{11}$ B. $-\frac{26}{11}$ C. $\frac{24}{11}$ D. $-\frac{24}{11}$



前 n 项和

- 5 数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_n = \begin{cases} 2n-1, n \text{ 为奇数} \\ 2^n, n \text{ 为偶数} \end{cases}$, 则其前 6 项和为 _____.
- 6 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n = n^2$, 则 $a_5 =$ ().
 A. 5 B. 9 C. 16 D. 25
- 7 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若满足 $2S_n = 3^n + 3 (n \in \mathbf{N}^*)$, 则 $a_{10} =$ ().
 A. 3^{10} B. 3^9 C. 3^8 D. 3^7
- 8 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = n^2 + 2n + 1 (n \in \mathbf{N}^*)$, 则 $a_n =$ _____.
- 9 数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 $S_n = n^2 + 3n$, 则 $\{a_n\}$ 的通项为 _____.
- 10 如果数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 2a_n - 1$, 则此数列的通项公式 $a_n =$ _____.



单调性

- 11 设 $a > 0$, 若 $a_n = \begin{cases} (3-a)n-3, n \leq 7 \\ a^{n-6}, n > 7 \end{cases}$, 且数列 $\{a_n\}$ 是递增数列, 则实数 a 的取值范围是 _____.
- 12 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n = \begin{cases} a^{n-2}, n < 4 \\ (6-a)n-a, n \geq 4 \end{cases}$, 若对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$ 都有 $a_n < a_{n+1}$ 成立, 则实数 a 的取值范围为 ().
 A. (1, 4) B. (2, 5) C. (1, 6) D. (4, 6)
- 13 设 $a_n = -2n^2 + 29n + 3$, 则数列 $\{a_n\}$ 的最大项是 ().
 A. 107 B. 108 C. $\frac{865}{8}$ D. 109



周期性

14 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \frac{1+a_n}{1-a_n}$, 则 a_{2020} 的值 ().

A. $\frac{1}{3}$

B. 2

C. $-\frac{1}{2}$

D. -3

15 若数列 $\{a_n\}$ 满足关系式 $a_{n+1} = 1 - \frac{1}{a_n}$, 且 $a_1 = 2$, 则 $a_9 =$ _____.



第 2 讲

等差数列





等差中项

- 1 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_5 + a_7 = 16$, 则 $a_6 = ()$.
A. 4 B. 6 C. 8 D. 10



通项公式

- 2 已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, 若 $a_1 = 2$, $a_4 = 2a_3$, 则公差 $d = ()$.
A. 0 B. 2 C. -1 D. -2

前 n 项和

- 3 已知 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $S_4 = 26$, $a_2 = 5$, 则 $a_3 = ()$.
A. 8 B. 10 C. 7 D. 9
- 4 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $a_4 + a_5 = 24$, $S_6 = 48$, 则 $\{a_n\}$ 的公差为 $()$.
A. 1 B. 2 C. 4 D. 8
- 5 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $3S_3 = S_2 + S_4$, $a_1 = 2$, 则 $a_5 = \underline{\hspace{2cm}}$.
- 6 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $S_n = n^2 (n \in \mathbf{N}^*)$, 则 $a_9 = \underline{\hspace{2cm}}$, $a_n = \underline{\hspace{2cm}}$.
- 7 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_5 + a_7 = 14$, 则 $S_{11} = ()$.
A. 140 B. 70 C. 154 D. 77
- 8 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n , 若 $a_1 = 2$, $S_3 = 12$, 则 $a_6 = ()$
A. 8 B. 10 C. 12 D. 14
- 9 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中, 公差 $d = 2$, $a_2 = 3$, 求:
(1) a_3 、 a_5 的值.
(2) 该数列的前 5 项和 S_5 .



等差数列的判定

- 10 在数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1 = 1$, $a_{n+1} - a_n = 2$, 则 $a_{10} = \underline{\hspace{2cm}}$.

前 n 项和最值

- 11 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = -2n + 11$, 其前 n 项和为 S_n , 则当 S_n 取得最大值时 n 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
- 12 设等差数列 $\{a_n\} (n \in \mathbf{N}^*)$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $a_1 = -4$, $S_7 = -7$, 则 S_n 的最小值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

第 3 讲

等比数列





通项的计算

- 1 2020~2021 学年天津高二上学期期末(部分区)第4题4分
在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_4 = 24$, $a_6 = 6$, 则 $a_5 = ()$.
A. 12 B. -12 C. ± 12 D. 15
- 2 2020~2021 学年天津河东区高二上学期期末第3题4分
已知等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_3 = 1$, $a_5 = 2$, 则首项 $a_1 = ()$.
A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. 0
- 3 2020~2021 学年天津和平区天津市耀华中学高二上学期期末第3题4分
已知等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2 = -4$, $a_5 = \frac{1}{2}$, 则公比 $q = ()$.
A. -2 B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 2
- 4 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, 若 $a_2 = 2$, $a_5 + a_6 = 6a_4$, 则 $a_5 = ()$.
A. 4 B. 10 C. 16 D. 32



前 n 项和

- 5 2019~2020 学年 12 月天津武清区武清区杨村第三中学高二上学期月考第4题4分
设 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $3S_3 = a_4 - 2$, $3S_2 = a_3 - 2$, 则公比 $q = ()$.
A. 3 B. 4 C. 5 D. 6
- 6 2019~2020 学年 10 月天津南开区天津市南开中学高二上学期周测 D 卷第3题
设公比为 -2 的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项为 S_n , 若 $S_5 = \frac{11}{2}$, 则 a_4 等于 $()$.
A. 8 B. 4 C. -4 D. -8
- 7 等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2 = 9$, $a_5 = 243$, $\{a_n\}$ 的前 4 项和为 $()$.
A. 81 B. 120 C. 168 D. 192
- 8 2019~2020 学年 10 月天津河东区天津市第四十五中学高二上学期月考第10题5分
设等比数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 = 1$, 且 $4a_1, 2a_2, a_3$ 成等差数列, 则数列 $\{a_n\}$ 的前 10 项和 $S_{10} =$ _____.
- 9 2019~2020 学年天津高二上学期期中六校联考第10题5分
记 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_3^2 = a_4$, 则 $S_5 =$ _____.
- 10 2019 年高考真题全国卷 III 理科第5题5分
已知各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 4 项和为 15, 且 $a_5 = 3a_3 + 4a_1$, 则 $a_3 = ()$.
A. 16 B. 8 C. 4 D. 2



等比数列的性质

- 11 已知等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2 + a_3 = 1$, $a_4 + a_5 = 2$, 则 $a_6 + a_7$ 等于 ().
A. 2 B. $2\sqrt{2}$ C. 4 D. $4\sqrt{2}$
- 12 已知各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$, $a_1 a_2 a_3 = 5$, $a_7 a_8 a_9 = 10$, 则 $a_4 a_5 a_6 = ()$.
A. $5\sqrt{2}$ B. 7 C. 6 D. $4\sqrt{2}$



第 4 讲

数列求通项





根据等差等比数列定义求解数列通项

- 1 已知等比数列 $\{a_n\}$, $a_1 = 2$, $a_4 = 16$.
求数列 $\{a_n\}$ 的通项式.
- 2 已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, 前 n 项和为 S_n , $S_5 + 10a_9 = 0$, 且 $a_3 + a_{12} = 3$.
求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n .



累加法求数列通项

- 3 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + n$, 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 ().
A. $a_n = \frac{n^2 + n}{2}$ B. $a_n = \frac{n^2 - n}{2}$ C. $a_n = \frac{n^2 - n + 2}{2}$ D. $a_n = n^2 - n + 1$.
- 4 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = a_n + n + 1$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 且 $a_1 = 2$, 则 $a_{10} =$ ().
A. 54 B. 55 C. 56 D. 57



构造等比数列

- 5 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 3a_n + 2$, 则 $\{a_n\}$ 的通项公式为 ().
A. $a_n = 2n - 1$ B. $a_n = 3^n - 1$ C. $a_n = 2^{n-1}$ D. $a_n = 6n - 4$
- 6 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n = 3a_{n-1} + 2$ ($n \geq 2$ 且 $n \in \mathbf{N}^*$), $a_1 = 2$, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \frac{\log_3(a_n + 1)}{a_n + 1}$.
(1) 求证: 数列 $\{a_n + 1\}$ 为等比数列.
(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.



根据项与和的关系求数列通项

- 7 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_n = \frac{n^2 + n}{2}$ ($n \in \mathbf{N}$).
求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.
- 8 数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 $S_n = n^2 + 3n$, 则 $\{a_n\}$ 的通项为 ____.
- 9 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若满足 $2S_n = 3^n + 3$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 则 $a_{10} =$ ().
A. 3^{10} B. 3^9 C. 3^8 D. 3^7
- 10 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且满足 $2S_n = 2^{n+1} + m$ ($m \in \mathbf{R}$).
求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

第 5 讲

数列求和





错位相减

- 1 2019~2020 学年天津南开区天津市南开中学高二上学期期中第 17 题 10 分
 $a_n = n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$, 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n .
- 2 2017~2018 学年陕西西安雁塔区唐南中学高一下学期期中第 20 题 10 分
 已知 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等比数列, $\{b_n\}$ 是等差数列, 且 $a_1 = b_1 = 1$, $b_2 + b_3 = 2a_3$, $a_5 - 3b_2 = 7$.
 (1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式.
 (2) 设 $c_n = a_n b_n$, $n \in \mathbf{N}^*$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和.
- 3 2018~2019 学年天津高二上学期期末第 17 题 12 分
 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_n = \frac{3n^2 - n}{2} (n \in \mathbf{N}^*)$, 正项等比数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1 = a_1$, $b_5 = a_6$.
 (1) 求数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的通项公式.
 (2) 设 $c_n = a_n \cdot b_n$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .
- 4 已知 $\{a_n\}$ 是递增的等差数列, a_2, a_4 是方程 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 的根.
 (1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.
 (2) 求数列 $\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$ 的前 n 项和.
- 5 $S_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{8} + \cdots + \frac{n}{2^n} = (\quad)$.
 A. $\frac{2^n - n}{2^n}$ B. $\frac{2^{n+1} - n - 2}{2^n}$ C. $\frac{2^n - n + 1}{2^{n+1}}$ D. $\frac{2^{n+1} - n + 2}{2^n}$
- 6 已知 $a_n = 2^n$, $b_n = n$. 记数列 $\{a_n b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求 T_n .



裂项相消

- 7 2019~2020 学年 10 月天津南开区天津市南开中学高二上学期周测 D 卷第 10 题
 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, 且对于任意的 $n \in \mathbf{N}^*$ 都有 $a_{n+1} = a_1 + a_n + n$, 则 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{2015}}$ 等于 $(\quad)$.
 A. $\frac{4028}{2015}$ B. $\frac{2014}{2015}$ C. $\frac{4030}{2016}$ D. $\frac{2015}{2016}$



- 8 2018~2019 学年天津和平区天津市耀华中学高二上学期期中第 4 题 5 分
已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, 前 n 项和为 S_n , 且点 $P(a_n, a_{n+1})$ ($n \in \mathbf{N}^*$) 在直线 $x - y + 1 = 0$ 上, 则 $\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3} + \cdots + \frac{1}{S_n}$ 等于 ().
A. $\frac{n(n+1)}{2}$ B. $\frac{2}{n(n+1)}$ C. $\frac{n}{2(n+1)}$ D. $\frac{2n}{n+1}$
- 9 2018~2019 学年 10 月天津滨海新区南开中学滨海生态城学校高二上学期月考第 17 题 13 分
已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n , 且 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}S_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$).
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.
(2) 当 $b_n = \log_{\frac{3}{2}}(3a_{n+1})$ 时, 求数列 $\left\{\frac{1}{b_nb_{n+1}}\right\}$ 的前 n 项和.
- 10 2018~2019 学年 10 月天津南开区天津市育红中学高二上学期月考第 17 题 10 分
已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n = \frac{1+2+\cdots+n}{n}$, $b_n = \frac{1}{a_na_{n+1}}$.
(1) 求 $\{b_n\}$ 的通项公式.
(2) 求数列 $\{b_n\}$ 的前 20 项和.



分组求和

- 11 2019~2020 学年 10 月天津津南区天津市咸水沽一中高二上学期月考第 16 题 12 分
已知数列 $a_n = 2^n - 4$. 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n .
- 12 2019~2020 学年 10 月天津和平区天津市第二南开中学高二上学期月考第 17 题
已知 $\{a_n\}$ 是等差数列, $\{b_n\}$ 是等比数列, 且 $b_2 = 3$, $b_3 = 9$, $a_1 = b_1$, $a_{14} = b_4$.
(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.
(2) 设 $c_n = a_n + b_n$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和.
- 13 2018~2019 学年天津南开区天津市育红中学高二上学期期中第 19 题
已知 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等比数列, $a_1 = \frac{1}{2}$, 且 $a_1, a_3, -a_2$ 成等差数列.
(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 求数列 $\{a_n - n\}$ 的前 n 项和 S_n .