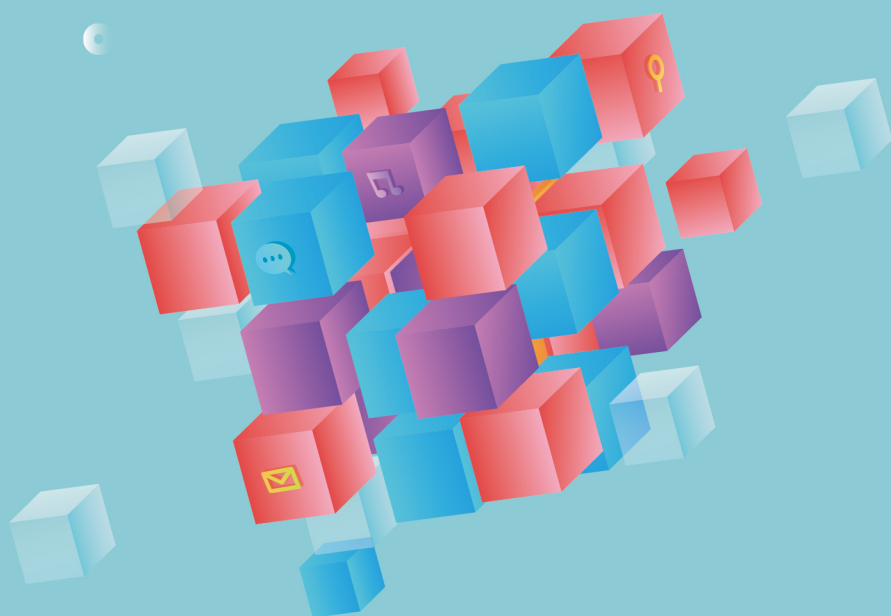


知识魔方

i 数学



总 主 编：马建明

本模块主编：吕金琳

教 研 团 队：吕金琳 严立

闫聪聪

封面设计：刘雅迪

前言

学而思一对一产品升级介绍

为进一步打造本地化产品，助力学生高考，学而思 1 对 1 产品团队打造了模块课系列产品，该产品旨在将高中阶段所有的知识点全部打散，再针对每一个学生的具体情况重新组合，制定个性化的学习方案，帮助学生进步。

随着模块课 1.0 版本的推进，无论是课程选择，还是内容学习上，学生有更多可以选择的空间，切实满足不同学生的个性化需求。本着“随需而变，才有未来”的精神，我们又推出了 2.0 版本《知识魔方·i 系列》，此系列涵盖《知识魔方·i 数学》、《知识魔方·i 物理》、《知识魔方·i 化学》、《知识魔方·i 生物》、《知识魔方·i 历史》多种学科，结合学科共性，统一产品逻辑，与此同时，兼顾到学科特色，创新学习形式，激发学生学习兴趣，做学习的主人。

本产品在设计上有三个突出的**特点**：

- (1) 模块产品，私人订制效果棒
- (2) 本地优化，海量资源覆盖广
- (3) 知识解构，新旧旧识尽入囊



扫描二维码，关注公众号，获取更多学习资料

高中数学课程产品设计

考点分析：以大数据方式分析考试重点难点，紧扣考试热点，让同学们的复习更具针对性。

知识导图：梳理知识结构，帮助同学们形成网络状的知识图谱，更有助于对知识点的理解记忆。

典型例题：分析考试情况，精选最新的考题，让同学们清楚每一个知识点的考法。

巩固练习：匹配同类型题目，讲练结合，锻炼提升解题能力。

本模块介绍

在上一模块，我们已经对椭圆、双曲线、抛物线的定义及基础性质有了更深的了解，而在这一模块中，我们将会深入学习直线与圆锥曲线的位置关系的判断方法及它们结合考察的综合性问题。而此处题型主要分成选填题和解答题两部分，而在解答题中，熟练掌握圆锥曲线中的弦长公式是我们十分重视的。

目 录

第 1 讲 圆锥曲线综合（选填题）	01
第 2 讲 直线与圆锥曲线的位置关系（选填题）	05
第 3 讲 直线与椭圆的位置关系（解答）	09



我们一起开始学习吧 o (*^_^*) o



第 1 讲

圆锥曲线综合（选填题）





基础复习

1 下列命题中, 说法正确的命题个数为 ().

- ① 抛物线 $y = 2x^2$ 的准线方程为 $y = -\frac{1}{8}$
 ② 椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 的长轴长为 2
 ③ 双曲线 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 的渐近线方程为 $y = \pm 2x$
 ④ 双曲线 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$ 的离心率与椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$ 的离心率之积为 1

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4



双曲线及抛物线

2 若抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的准线经过双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$ 的一个焦点, 则 $p =$ ().

A. 2 B. 10 C. $\sqrt{7}$ D. $2\sqrt{7}$

3 已知双曲线 $\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的一条渐近线方程是 $y = \sqrt{3}x$, 它的一个焦点在抛物线 $y^2 = 24x$ 的准线上, 则双曲线的方程为 ().

A. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{27} = 1$ B. $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{108} = 1$ C. $\frac{x^2}{108} - \frac{y^2}{36} = 1$ D. $\frac{x^2}{27} - \frac{y^2}{9} = 1$

4 已知双曲线的一条渐近线方程是 $\sqrt{3}x - y = 0$, 它的一个焦点在抛物线 $x^2 = 8y$ 的准线上, 则双曲线的方程为 ().

A. $\frac{y^2}{3} - x^2 = 1$ B. $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$ C. $y^2 - \frac{x^2}{3} = 1$ D. $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$

5 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的一条渐近线过点 $(2, \sqrt{3})$, 且双曲线的一个焦点在抛物线 $y^2 = 4\sqrt{7}x$ 的准线上, 则双曲线的方程为 _____.

6 抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点到双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1$ 的一条渐近线的距离是 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 则双曲线的实轴长是 ().

A. $\sqrt{3}$ B. $2\sqrt{3}$ C. 1 D. 2

7 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的一条渐近线过点 $(2, \sqrt{3})$, 且双曲线的一个焦点在抛物线 $y^2 = 4\sqrt{7}x$ 的准线上, 则双曲线的方程为 ().

A. $\frac{x^2}{21} - \frac{y^2}{28} = 1$ B. $\frac{x^2}{28} - \frac{y^2}{21} = 1$ C. $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} = 1$ D. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$

- 8 抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点到双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 的渐近线的距离是 ().
 A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. 1 D. $\sqrt{3}$
- 9 已知抛物线 $x^2 = ay$ 的焦点恰好为双曲线 $y^2 - x^2 = 2$ 的一个焦点, 则 $a = ()$.
 A. 1 B. ± 4 C. ± 8 D. 16



椭圆与双曲线

- 10 与椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ 有公共焦点, 且离心率为 $\sqrt{2}$ 的双曲线的标准方程为 ().
 A. $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$ B. $\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} = 1$ C. $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{6} = 1$ D. $\frac{y^2}{6} - \frac{x^2}{2} = 1$
- 11 与椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$ 共焦点, 且过点 $(-2, \sqrt{10})$ 的双曲线方程为 ().
 A. $\frac{y^2}{5} - \frac{x^2}{4} = 1$ B. $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$ C. $\frac{y^2}{5} - \frac{x^2}{3} = 1$ D. $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{3} = 1$
- 12 与椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 共焦点且过点 $Q(2, 1)$ 的双曲线方程是 ().
 A. $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ B. $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ C. $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{3} = 1$ D. $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$
- 13 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 和椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ 有相同的焦点, 且双曲线的离心率是椭圆离心率的两倍, 则双曲线的方程为 _____.

第 2 讲

直线与圆锥曲线的位置关系 (选填题)





与焦点三角形相关的问题

- 1 已知椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 的两个焦点是 F_1, F_2 , 过点 F_2 的直线交椭圆于 A, B 两点, 在 $\triangle AF_1B$ 中, 若有两边之和是 8, 则第三边的长度为 ().
A. 3 B. 4 C. 5 D. 6
- 2 已知椭圆 C 的焦点为 $F_1(-1, 0), F_2(1, 0)$, 过点 F_1 的直线与 C 交于 A, B 两点, 若 $\triangle ABF_2$ 的周长为 8, 则椭圆 C 的标准方程为 ().
A. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{15} = 1$ B. $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{7} = 1$ C. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ D. $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$
- 3 过椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ 的一个焦点 F_1 的直线与椭圆交于 A, B 两点, 则 A, B 与椭圆的另一焦点 F_2 构成 $\triangle ABF_2$, 那么 $\triangle ABF_2$ 的周长是 ().
A. $2\sqrt{2}$ B. 8 C. $4\sqrt{2}$ D. 4
- 4 若双曲线 $x^2 - 4y^2 = 4$ 的左、右焦点是 F_1, F_2 , 过 F_1 的直线交左支于 A, B 两点, 若 $|AB| = 5$, 则 $\triangle AF_2B$ 的周长是 _____.
- 5 过双曲线 $x^2 - y^2 = 8$ 的左焦点 F_1 的直线交双曲线于 P, Q 两点, 若 $PQ = 7$, 求 $\triangle PF_2Q$ 周长是 _____.
- 6 F_1, F_2 为双曲线 $y^2 - \frac{x^2}{4} = 1$ 的两个焦点, 点 P 在双曲线上, 且 $\angle F_1PF_2 = 90^\circ$, 则 $\triangle F_1PF_2$ 的面积是 ().
A. 2 B. 4 C. 8 D. 16



圆锥曲线 & 直线

- 7 已知 F_1, F_2 为椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 的两个焦点, 过 F_1 的直线交椭圆于 A, B 两点, 若 $|F_2A| + |F_2B| = 12$, 则 $|AB| =$ _____.
- 8 已知椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, F_1, F_2 分别为其左右焦点, 椭圆上一点 M 到 F_1 的距离为 2, N 是 MF_1 的中点, 则 ON 的长是 ().
A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
- 9 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点为 F , 过 F 作 x 轴的垂线交椭圆 C 于 A, B 两点, 若 $\triangle AOB$ 是直角三角形 (O 为坐标原点), 则 C 的离心率为 ().
A. $\sqrt{5} - 2$ B. $\sqrt{3} - 1$ C. $\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3} - 1}{2}$

- 10 设 F_1, F_2 分别为双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点, 若在双曲线的右支上存在点 P , 满足 $|PF_2| = |F_1F_2|$, 且原点 O 到直线 PF_1 的距离等于双曲线的实轴长, 则该双曲线的渐近线方程为 ().
- A. $4x \pm 3y = 0$ B. $3x \pm 5y = 0$ C. $3x \pm 4y = 0$ D. $5x \pm 3y = 0$
- 11 设 F_1, F_2 分别是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的左、右焦点, 若双曲线上存在点 M , 使 $\angle F_1MF_2 = 60^\circ$, 且 $|MF_1| = 2|MF_2|$, 则双曲线离心率为 ().
- A. $\sqrt{3}$ B. $\sqrt{2}$ C. 2 D. $\sqrt{5}$
- 12 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 过 F_2 的直线交双曲线右支于 P, Q 两点, 且 $PQ \perp PF_1$, 若 $|PQ| = \frac{5}{12}|PF_1|$, 则双曲线的离心率为 _____.
- 13 已知抛物线 $C: y^2 = 6x$ 的焦点为 F , M 是抛物线 C 上一点, FM 的延长线交 y 轴的正半轴于点 N , 交抛物线 C 的准线 l 于点 P , 若点 M 是 FN 的中点, 则 $|NP| =$ _____.
- 14 设抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 准线为 l , 过焦点的直线交抛物线于 A, B 两点, 分别过 A, B 作 l 的垂线, 垂足为 C, D , 若 $|AF| = 2|BF|$, 则三角形 CDF 的面积为 _____.
- 15 已知抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 准线为 l . 若 l 与双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的两条渐近线分别交于点 A 和点 B , 且 $|AB| = 4|OF|$ (O 为原点), 则双曲线的离心率为 _____.
- 16 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的焦距为 $2c$, 右顶点为 A , 抛物线 $x^2 = 2py (p > 0)$ 的焦点为 F , 若双曲线截抛物线的准线所得线段长为 $2c$, 且 $|FA| = c$, 则双曲线的渐近线方程为 _____.

第 3 讲

直线与椭圆的位置关系 (解答)





弦长问题



定直线问题

1 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的焦距为 2, 离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程.

(2) 经过椭圆的左焦点 F_1 作倾斜角为 60° 的直线 l , 直线 l 与椭圆相交于 A, B 两点, 求线段 AB 的长.



根据弦长求解直线方程

2 已知点 F 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点，椭圆的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，连接椭圆的四个顶点得到的菱形的面积为 4.

(1) 求：椭圆的方程.

(2) 设直线 l 与椭圆相交于不同的两点 A 、 B ，已知点 A 的坐标为 $(-a, 0)$.

若 $|AB| = \frac{4\sqrt{3}}{9}$ ，求：直线 l 的斜率.



向量点乘问题

3 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$, 点 $T\left(2\sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 在椭圆上.

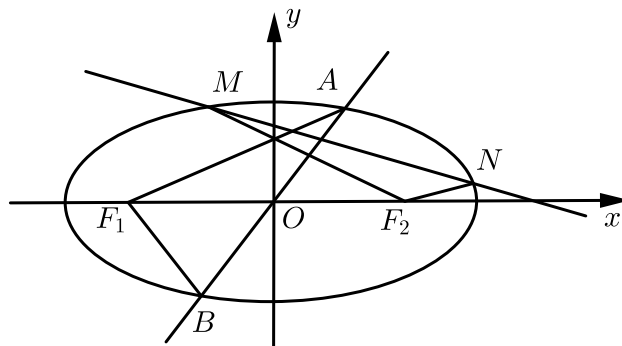
(1) 求椭圆的方程.

(2) 已知直线 $y = \sqrt{2}x + m$ 与椭圆交于 A, B 两点, 点 P 的坐标为 $(2\sqrt{2}, 0)$, 且 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = -1$, 求实数 m 的值.



三角形面积问题

- 4 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, F_1, F_2 分别为左右焦点, O 为坐标原点, 过 O 作直线 l_1 交椭圆于 A, B 两点, 若 $\triangle ABF_1$ 周长的最小值为 $2(\sqrt{2} + 1)$, 面积的最大值为 1.



(1) 求椭圆 E 的标准方程.

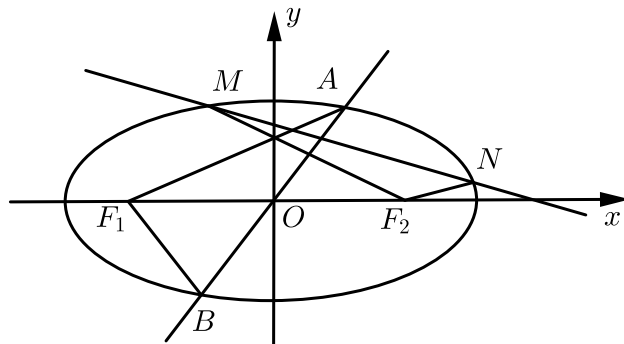
(2) 设直线 $l_2: y = kx + m$, ($m > 0$) 交椭圆 E 于 M, N 两点.

若 $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 且 $\triangle MON$ 的面积为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 求 m 的值.



定值定点问题

- 5 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, F_1, F_2 分别为左右焦点, O 为坐标原点, 过 O 作直线 l_1 交椭圆于 A, B 两点, 若 $\triangle ABF_1$ 周长的最小值为 $2(\sqrt{2} + 1)$, 面积的最大值为 1.



(1) 求椭圆 E 的标准方程.

(2) 设直线 $l_2: y = kx + m$, ($m > 0$) 交椭圆 E 于 M, N 两点.

若 x 轴上任意一点到直线 MF_2 与 NF_2 的距离均相等, 求证: 直线 l_2 恒过一定点, 并求出该定点的坐标.



直线的垂直关系

6 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的焦距为 $2\sqrt{3}$, 且离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(1) 求 E 的方程.

(2) 若直线 $y = kx + 1$ ($k > \frac{1}{2}$) 与 E 相交于 A, B 两点, M 为 E 的左顶点, 且满足 $MA \perp MB$, 求 k .