

02平面向量

1. 平面向量的定义与线性运算

1 下列结论中正确的是（ ）.

- A. 向量与有向线段是一样的，因此可以用有向线段来表示向量.
- B. $|\vec{a}|$ 与 $|\vec{b}|$ 是否相等与 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 的方向无关.
- C. 零向量的长度为零，方向是任意的.
- D. 若 $\vec{a} // \vec{b}$ ， $\vec{b} // \vec{c}$ ，则 $\vec{a} // \vec{c}$.

答案 BC

解析 向量是既有大小又有方向的量，而有向线段是有起点、方向和长度的图形，向量可以用有向线段表示，但向量不是有向线段，有向线段也不是向量，所以A不正确；
根据模的概念，B正确；
根据零向量的概念，C正确；
若 $\vec{b} = \vec{0}$ ，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{c}$ 不一定平行，所以D不正确.

2 关于平面向量，下列说法正确的是（ ）.

- A. 零向量是唯一没有方向的向量
- B. 平面内的单位向量是唯一的
- C. 方向相反的向量是共线向量，共线向量不一定是方向相反的向量
- D. 共线向量就是相等向量

答案 C

解析 A选项：零向量是有方向的，其方向是任意的，故A错误；
B选项：单位向量的模为1，其方向可以是任意方向，故B错误；

C选项：方向相反的向量一定是共线向量，共线向量不一定是方向相反的向量，故C正确；

D选项：由共线向量和相等向量的定义可知D错误；

故选C.

3 设 D 、 E 、 F 分别为 $\triangle ABC$ 三边 BC 、 CA 、 AB 的中点，则 $\overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{EB} + 3\overrightarrow{FC} = (\quad)$.

A. $\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

B. $\frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$

C. $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

D. $\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

答案 D

解析 因为 D 、 E 、 F 分别为 $\triangle ABC$ 的三边 BC 、 AC 、 AB 的中点，

所以 $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{FC}$

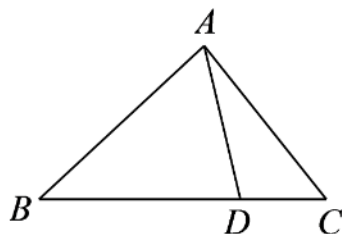
$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}) + \frac{1}{2} \times 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}) + \frac{1}{2} \times 3 \times (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC})$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC},$$

故选D.

4 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 在线段 BC 上，且 $BD = 2DC$ ，若 $\overrightarrow{AD} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}$ ，则 $\frac{\lambda}{\mu} = (\quad)$.



A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{3}$

C. 2

D. $\frac{2}{3}$

答案 A

解析 $\because BD = 2DC$,

$$\therefore \overrightarrow{BD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}),$$

$$\therefore \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC},$$

$$\therefore \lambda = \frac{1}{3}, \mu = \frac{2}{3}.$$

$$\therefore \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{2}.$$

5 设向量 $\vec{a} = (2, 3)$, $\vec{b} = (-1, 2)$, 若 $(\lambda\vec{a} + 2\vec{b}) // (\vec{a} - 3\vec{b})$, 则实数 $\lambda = ()$.

A. $\frac{3}{2}$

B. $\frac{2}{3}$

C. $-\frac{2}{3}$

D. $-\frac{3}{2}$

答案 C

解析 $\because$ 向量 $\vec{a} = (2, 3)$, $\vec{b} = (-1, 2)$,

$$\lambda\vec{a} + 2\vec{b} = \lambda(2, 3) + 2(-1, 2) = (2\lambda, 3\lambda) + (-2, 4) = (2\lambda - 2, 3\lambda + 4),$$

$$\vec{a} - 3\vec{b} = (2, 3) - 3(-1, 2) = (2, 3) - (-3, 6) = (5, -3),$$

$$(\lambda\vec{a} + 2\vec{b}) // (\vec{a} - 3\vec{b}),$$

$$\therefore (2\lambda - 2, 3\lambda + 4) = \mu(5, -3) (\mu \neq 0),$$

$$\text{则} \begin{cases} 2\lambda - 2 = 5\mu \\ 3\lambda + 4 = -3\mu \end{cases},$$

$$\text{解得} \lambda = -\frac{2}{3}, \mu = -\frac{2}{3}.$$

故选C.

6 已知向量 $\vec{a} = (-1, -2)$, $\vec{b} = (m^2, 4)$, 那么“ $\vec{a} // \vec{b}$ ”是“ $m = \sqrt{2}$ ” ().

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

答案 B

解析 充分性, 若 $\vec{a} // \vec{b}$, 则 $-1 \cdot 4 = -2m^2$, $\therefore m = \pm\sqrt{2}$, $\therefore$ 不成立,

必要性, 当 $m = \sqrt{2}$, 则 $\vec{a} = (-1, -2)$, $\vec{b} = (2, 4)$,

$$\therefore \vec{b} = -2\vec{a},$$

$$\therefore \vec{a} // \vec{b}, \text{成立},$$

故选: B.

7 (5分) 设 D 为 $\triangle ABC$ 中 BC 边上的中点, 且 O 为 AD 边上靠近点 A 的三等分点, 则().

A. $\overrightarrow{BO} = \frac{5}{6}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$

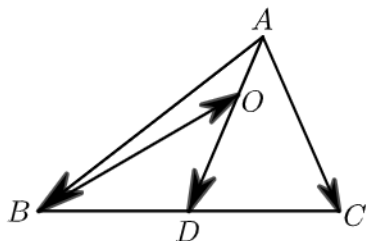
B. $\overrightarrow{BO} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

C. $\overrightarrow{BO} = -\frac{5}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$

D. $\overrightarrow{BO} = -\frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

答案 C

解析 如图所示:



$\because D$ 为 $\triangle ABC$ 中 BC 边上的中点,

$$\therefore \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}),$$

又 $\because O$ 为 AD 边上靠近点 A 的三等分点,

$$\therefore \overrightarrow{OD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}),$$

$$\begin{aligned} \therefore \overrightarrow{BO} &= \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{OD} \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) - \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = -\frac{5}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}. \end{aligned}$$

故选C.

8 (5分) 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 是 AC 上一点, 且 $\overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{AD}$, P 为 BD 上一点, 向量

$\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}$ ($\lambda > 0, \mu > 0$), 则 $\frac{4}{\lambda} + \frac{1}{\mu}$ 的最小值为().

A. 16

B. 8

C. 4

D. 2

答案 A

解析 $\because AC = 4AD$, 点 D 是 AC 上的一点,

$$\therefore \overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{AD},$$

$$\therefore \overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC} \quad (\lambda > 0, \mu > 0),$$

$$\therefore \overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB} + 4\mu \overrightarrow{AD},$$

$\therefore P$ 为 BD 上一点,

$\therefore B, P, D$ 三点共线,

$$\therefore \lambda + 4\mu = 1,$$

$$\therefore \lambda > 0, \mu > 0,$$

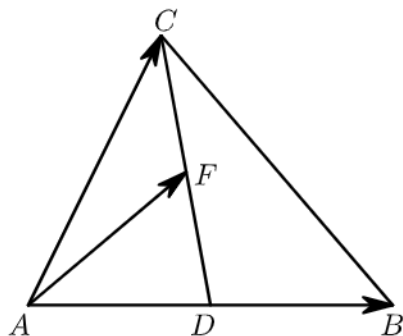
$$\therefore \frac{4}{\lambda} + \frac{1}{\mu} = \left(\frac{4}{\lambda} + \frac{1}{\mu} \right) \cdot (\lambda + 4\mu) = 4 + 4 + \frac{16\mu}{\lambda} + \frac{\lambda}{\mu} \geq 8 + 2\sqrt{\frac{16\mu}{\lambda} \times \frac{\lambda}{\mu}} = 16, \text{ 当且仅当}$$

$$\begin{cases} \frac{16\mu}{\lambda} = \frac{\lambda}{\mu} \\ \lambda + 4\mu = 1 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} \lambda = \frac{1}{2} \\ \mu = \frac{1}{8} \end{cases} \text{ 时取等号,}$$

$$\therefore \frac{4}{\lambda} + \frac{1}{\mu} \text{ 的最小值为 } 16,$$

综上所述, 答案选择: A.

- 9 (5分) 如图所示, 在 $\triangle ABC$ 中, $AD = DB$, 点 F 在线段 CD 上, 设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AF} = x\vec{a} + y\vec{b}$, 则 $\frac{1}{x} + \frac{4}{y+1}$ 的最小值为 _____.



答案 $3 + 2\sqrt{2}$

解析 $\because$ 三点 C, F, D 共线, 则存在实数 $\lambda: \overrightarrow{AF} = \lambda \overrightarrow{AC} + (1 - \lambda) \overrightarrow{AD} = \lambda \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}(1 - \lambda) \overrightarrow{AB}$,

$$\text{又 } \overrightarrow{AF} = x\vec{a} + y\vec{b},$$

$$\therefore \lambda = y, \frac{1}{2}(1 - \lambda) = x,$$

$$\text{则 } 2x + y = 1,$$

$$\therefore x + \frac{y+1}{2} = 1,$$

$$\text{则 } \frac{1}{x} + \frac{4}{y+1} = \left(x + \frac{y+1}{2} \right) \left(\frac{1}{x} + \frac{4}{y+1} \right) = 3 + \frac{y+1}{2x} + \frac{4x}{y+1}$$

$$\geq 3 + 2\sqrt{\frac{y+1}{2x} \cdot \frac{4x}{y+1}} = 3 + 2\sqrt{2},$$

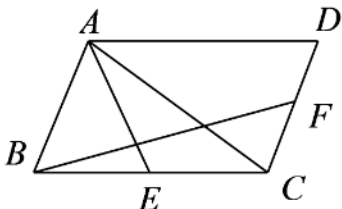
当且仅当 $x = \sqrt{2} - 1$, $y = 3 - 2\sqrt{2}$ 时取等号.

故答案为: $3 + 2\sqrt{2}$.

- 10 (5分) 在平行四边形 $ABCD$ 中 E 为 BC 的中点, F 为 DC 的中点, 若 $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AE} + \mu \overrightarrow{BF}$, 则 $\lambda + \mu$ 的值为 _____.

答案 $\frac{8}{5}$

解析 如图,



$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD},$$

$$\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CF} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD},$$

$$\therefore \overrightarrow{AC} = \lambda \left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \right) + \mu \left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \right) = \left(\lambda - \frac{1}{2}\mu \right) \overrightarrow{AB} + \left(\frac{1}{2}\lambda + \mu \right) \overrightarrow{AD},$$

$$\text{又 } \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD},$$

$$\therefore \begin{cases} \lambda - \frac{1}{2}\mu = 1 \\ \frac{1}{2}\lambda + \mu = 1 \end{cases},$$

$$\text{解得 } \lambda = \frac{6}{5}, \mu = \frac{2}{5},$$

$$\therefore \lambda + \mu = \frac{8}{5}.$$

故答案为: $\frac{8}{5}$.

2. 平面向量数量积运算

- 11 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|$, $AB = 2$, $AC = 1$, E, F 为 BC 边的三等分点, 则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} = ()$.

A. $\frac{8}{9}$

B. $\frac{10}{9}$

C. $\frac{25}{9}$

D. $\frac{26}{9}$

答案 B

解析

方法一：若 $|\vec{AB} + \vec{AC}| = |\vec{AB} - \vec{AC}|$,

$$\text{则 } \vec{AB}^2 + \vec{AC}^2 + 2\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB}^2 + \vec{AC}^2 - 2\vec{AB} \cdot \vec{AC},$$

$$\text{即有 } \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0,$$

E, F 为 BC 边的三等分点,

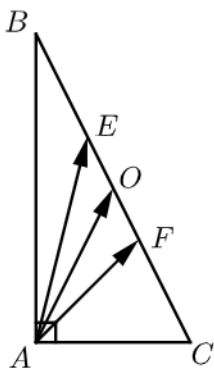
$$\text{则 } \vec{AE} \cdot \vec{AF} = (\vec{AC} + \vec{CE}) \cdot (\vec{AB} + \vec{BF}) = (\vec{AC} + \frac{1}{3}\vec{CB}) \cdot (\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{BC})$$

$$= (\frac{2}{3}\vec{AC} + \frac{1}{3}\vec{AB}) \cdot (\frac{1}{3}\vec{AC} + \frac{2}{3}\vec{AB})$$

$$= \frac{2}{9}\vec{AC}^2 + \frac{2}{9}\vec{AB}^2 + \frac{5}{9}\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{2}{9} \times (1+4) + 0 = \frac{10}{9}.$$

故选：B.

方法二：取 BC 中点 O ,



$$\vec{AE} \cdot \vec{AF} = \vec{AO}^2 - \vec{OE}^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{6}\right)^2 = \frac{5}{4} - \frac{5}{36} = \frac{40}{36} = \frac{10}{9}.$$

12 已知 $\vec{a}, \vec{b}$ 是两个非零向量, 同时满足 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$, 求 $\vec{b}$ 与 $\vec{a} + \vec{b}$ 的夹角.

答案 30° .

解析

$$\text{由 } |\vec{a}| = |\vec{b}|, \text{ 得 } |\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2,$$

$$\text{又由 } |\vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|, \text{ 得 } |\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2,$$

$$\text{所以 } \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}|\vec{a}|^2.$$

$$\text{所以 } |\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 3|\vec{a}|^2,$$

$$\text{即 } |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{3}|\vec{a}|.$$

设 $\vec{b}$ 与 $\vec{a} + \vec{b}$ 的夹角为 θ ,

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{\vec{b} \cdot (\vec{a} + \vec{b})}{|\vec{b}| |\vec{a} + \vec{b}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2}{|\vec{b}| |\vec{a} + \vec{b}|}, \\ &= \frac{\frac{1}{2}|\vec{a}|^2 + |\vec{a}|^2}{|\vec{a}| \cdot \sqrt{3}|\vec{a}|} = \frac{\sqrt{3}}{2},\end{aligned}$$

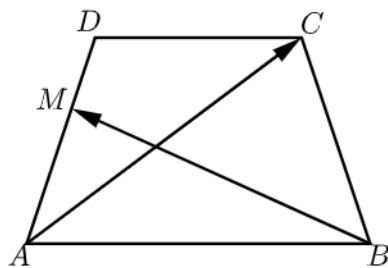
又 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$, 所以 $\theta = 30^\circ$.

- 13 已知向量 $\vec{AB}$ 与 $\vec{AC}$ 的夹角为 120° , 且 $|\vec{AB}| = 2$, $|\vec{AC}| = 3$, 若 $\vec{AP} = \lambda \vec{AB} + \vec{AC}$, 且 $\vec{AP} \perp \vec{BC}$, 则实数 λ 的值为 _____.

答案 $\frac{12}{7}$

解析 $\because$ 向量 $\vec{AB}$ 与 $\vec{AC}$ 的夹角为 120° , 且 $|\vec{AB}| = 2$, $|\vec{AC}| = 3$,
 $\therefore \vec{AB} \cdot \vec{AC} = |\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}| \cos 120^\circ = 2 \times 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -3$,
 $\because \vec{AP} = \lambda \vec{AB} + \vec{AC}$, 且 $\vec{AP} \perp \vec{BC}$,
 $\therefore \vec{AP} \cdot \vec{BC} = (\lambda \vec{AB} + \vec{AC}) \cdot \vec{BC} = (\lambda \vec{AB} + \vec{AC}) \cdot (\vec{AC} - \vec{AB}) = 0$,
 即 $\lambda \vec{AB} \cdot \vec{AC} - \lambda \vec{AB}^2 + \vec{AC}^2 - \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$,
 $\therefore -3\lambda - 4\lambda + 9 + 3 = 0$,
 解得 $\lambda = \frac{12}{7}$.
 故答案为: $\frac{12}{7}$.

- 14 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $AB = 4$, $AD = 3$, $CD = 2$, M 是线段 AD 上一点, (可与 A , D 重合), 若 $\vec{AC} \cdot \vec{BM} = -3$, 则 $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$ 的取值范围是 _____.

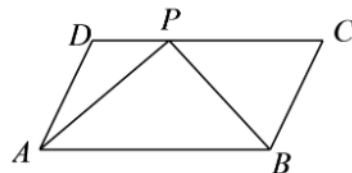


答案 $[-5, 8]$

解析

$$\begin{aligned}
 &\text{设 } \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AD}, \lambda \in [0, 1], \\
 &\therefore \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}, \\
 &\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}, \\
 &\therefore \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AC} = (\lambda \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}) \\
 &= \lambda \overrightarrow{AD}^2 - \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}^2 + \left(\frac{1}{2}\lambda - 1\right) \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}, \\
 &= 9\lambda - 8 + \left(\frac{1}{2}\lambda - 1\right) \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = -3, \\
 &\therefore \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 \frac{5 - 9\lambda}{\lambda - 2} = -2 \cdot \left(9 + \frac{13}{\lambda - 2}\right) \in [-5, 8].
 \end{aligned}$$

- 15 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, 已知 $AB = 8$, $AD = 5$, $\overrightarrow{CP} = 3\overrightarrow{PD}$, $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 2$, 则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ 的值是 ().



A. 8

B. 12

C. 22

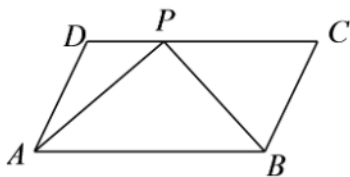
D. 24

答案

C

解析

如图所示,

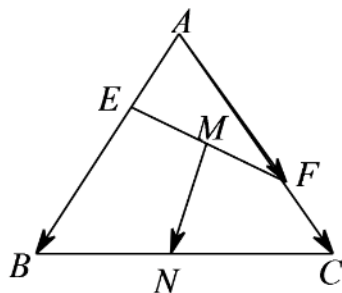


$$\begin{aligned}
 &\text{平行四边形 } ABCD \text{ 中, } AB = 8, AD = 5, \overrightarrow{CP} = 3\overrightarrow{PD}, \\
 &\therefore \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DP} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{4} \overrightarrow{AB}, \\
 &\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{AD} - \frac{3}{4} \overrightarrow{AB}, \\
 &\therefore \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = \left(\overrightarrow{AD} + \frac{1}{4} \overrightarrow{AB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AD} - \frac{3}{4} \overrightarrow{AB}\right) \\
 &= \overrightarrow{AD}^2 - \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \frac{3}{16} \overrightarrow{AB}^2 \\
 &= 5^2 - \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \frac{3}{16} \times 8^2 = 2, \\
 &\therefore \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 22.
 \end{aligned}$$

故选C.

3. 综合问题

- 16 如图, 在边长为1的正三角形 ABC 中, E, F 分别为边 AB, AC 上的动点, 且满足 $\overrightarrow{AE} = m\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AF} = n\overrightarrow{AC}$, 其中 $m, n \in (0, 1)$, $m + n = 1$, M, N 分别是 EF, BC 的中点, 则 $|\overrightarrow{MN}|$ 的最小值为 ().



- A. $\frac{\sqrt{2}}{4}$
C. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

- B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$
D. $\frac{5}{3}$

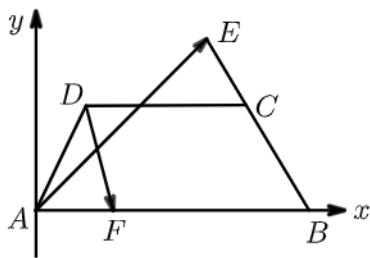
答案 C

解析 $\overrightarrow{AE} = m\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AF} = n\overrightarrow{AC}$, 其中 $m, n \in (0, 1)$, $m + n = 1$, M, N 分别是 EF, BC 的中点.
所以 $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) - \frac{1}{2}(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}) = \frac{1}{2}(1-m)\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(1-n)\overrightarrow{AC}$,
又 $m + n = 1$,
所以 $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(1-m)\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}m\overrightarrow{AC}$,
所以 $|\overrightarrow{MN}|^2 = \frac{1}{4}(1-m)^2\overrightarrow{AB}^2 + \frac{1}{4}m^2\overrightarrow{AC}^2 + \frac{1}{2}(1-m)m\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\triangle ABC$ 是边长为1的等边三角形,
所以上式整理得 $|\overrightarrow{MN}|^2 = \frac{1}{4}(1-m)^2 + \frac{1}{4}m^2 + \frac{1}{4}(1-m)m = \frac{1}{4}(m - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{16}$,
所以当 $m = \frac{1}{2}$ 时, $|\overrightarrow{MN}|$ 最小值为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$,
所以 $|\overrightarrow{MN}|$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$;
故选: C.

- 17 在等腰梯形中, $AB \parallel CD$, $AB = 2$, $AD = 1$, $\angle DAB = 60^\circ$, 若 $\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{AF} = \lambda\overrightarrow{AB}$, 且 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DF} = -1$, 则 $\lambda =$ _____.

答案 $\frac{1}{4}$

解析 如图,



以 A 为坐标原点, 建立平面直角坐标系,

由已知可得 $A(0,0)$, $D\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $F(2\lambda, 0)$,

$B(2,0)$, $C\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

设 $E(m,n)$,

则 $\overrightarrow{BC} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\overrightarrow{CE} = \left(m - \frac{3}{2}, n - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

由 $\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{CE}$,

得 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(3m - \frac{9}{2}, 3n - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$,

可得 $m = \frac{4}{3}$, $n = \frac{2\sqrt{3}}{3}$,

$\therefore E\left(\frac{4}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$,

则 $\overrightarrow{AE} = \left(\frac{4}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$, $\overrightarrow{DF} = \left(2\lambda - \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

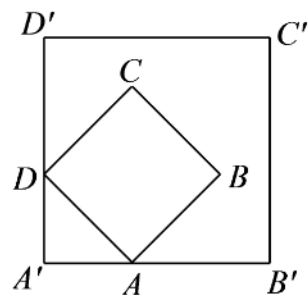
由 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DF} = -1$,

得 $\frac{4}{3}\left(2\lambda - \frac{1}{2}\right) - \frac{2\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -1$,

解得 $\lambda = \frac{1}{4}$.

故答案为: $\frac{1}{4}$.

- 18 如图所示, 边长为1的正方形 $ABCD$ 的顶点 A 、 D 分别在边长为2的正方形 $A'B'C'D'$ 的边 $A'B'$ 和 $A'D'$ 上移动, 则 $\overrightarrow{A'B} \cdot \overrightarrow{A'C}$ 的最大值是 ().



A. 2

B. $1 + \sqrt{2}$

C. π

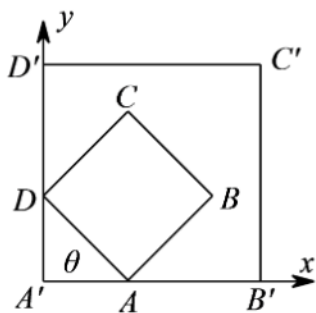
D. 4

答案

A

解析

如图以 A' 为坐标原点, $A'B$ 所在直线为 x 轴, 建立直角坐标系,



令 $\angle A'AD = \theta$, 由于 $AD = 1$, 故 $A'A = \cos \theta$, $A'D = \sin \theta$,

如图 $\angle BAx = \frac{\pi}{2} - \theta$, $AB = 1$,

故 $x_B = \cos \theta + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta + \sin \theta$,

故 $B = (\cos \theta + \sin \theta, \cos \theta)$,

$y_B = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta$,

故 $\overrightarrow{A'B} = (\cos \theta + \sin \theta, \cos \theta)$,

同理可求得 $C(\sin \theta, \cos \theta + \sin \theta)$,

即 $\overrightarrow{A'C} = (\sin \theta, \cos \theta + \sin \theta)$,

$\therefore \overrightarrow{A'B} \cdot \overrightarrow{A'C} = (\cos \theta + \sin \theta, \cos \theta) \cdot (\sin \theta, \cos \theta + \sin \theta) = 1 + \sin 2\theta$,

当 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 时, $\overrightarrow{A'B} \cdot \overrightarrow{A'C}$ 的最大值是 2.

故选 A.