

01导数

1. 导数的几何意义

- 1 若 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 2\Delta x) - f(x_0)}{3\Delta x} = 1$, 则 $f'(x_0)$ 等于 () .
- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{3}{2}$ C. 3 D. 2

答案 B

解析 $\because \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 2\Delta x) - f(x_0)}{3\Delta x} = \frac{2}{3} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 2\Delta x) - f(x_0)}{2\Delta x} = \frac{2}{3} f'(x_0) = 1$, $\therefore f'(x_0) = \frac{3}{2}$.

- 2 函数 $f(x) = \frac{2x-1}{e^x}$ 在 $x=1$ 处的切线的斜率为 _____ .

答案 $\frac{1}{e}$

解析 对函数 $f(x) = \frac{2x-1}{e^x}$ 求导 : $f'(x) = \frac{3-2x}{e^x}$,
当 $x=1$ 时 , $f'(1) = \frac{1}{e}$.
故答案为 $\frac{1}{e}$.

- 3 曲线 $y = x^3 + x - 2$ 在点 P 处的切线平行于直线 $y = 4x - 1$, 则切线方程为 () .

- A. $y = 4x$ B. $y = 4x - 4$
C. $y = 4x - 8$ D. $y = 4x$ 或 $y = 4x - 4$

答案 D

解析 $y' = 3x^2 + 1 = 4$,
 $x = \pm 1$, 切点为 $(1, 0)$ 或 $(-1, -4)$,
且两点均不在 $y = 4x - 1$ 上 ,

$\therefore$ 切线为 $y = 4x$ 或 $y = 4x - 4$.

故选D.

- 4 已知 $a \in \mathbf{R}$, 设函数 $f(x) = ax - \ln x$ 的图象在点 $(1, f(1))$ 处的切线为 l , 则 l 在 y 轴上的截距为_____.

答案 1

解析 由题意可知 $f'(x) = a - \frac{1}{x}$, 所以 $f'(1) = a - 1$,
因为 $f(1) = a$, 所以切点坐标为 $(1, a)$,
所以切线 l 的方程为 $y - a = (a - 1)(x - 1)$,
即 $y = (a - 1)x + 1$.
令 $x = 0$, 得 $y = 1$,
即直线 l 在 y 轴上的截距为1.

- 5 已知某曲线的方程为 $y = x^2 + 2$, 则过点 $B(2, -3)$ 且与该曲线相切的直线的一般式方程为_____.

答案 $y = -2x + 1$ 或 $y = 6x - 7$

解析 设切点为 $(t, t^2 + 2)$,
 $\therefore y' = 2x, y' = 2t$,
 $\therefore$ 切线为 $y - (t^2 + 2) = 2t(x - t)$,
代入 $(2, -3)$ 得: $t^2 - 4t - 5 = 0$,
解得: $t = -1$, 或 $t = 5$,
 $\therefore$ 当 $t = -1$ 时, 切线为: $y = -2x + 1$,
当 $t = 5$ 时, 切线为: $y = 6x - 7$.

已知直线 $y = kx$ 与曲线 $y = \ln x$ 相切，则 k 的值为（ ）.

A. e

B. $-e$

C. $\frac{1}{e}$

D. $-\frac{1}{e}$

答案 C

解析 设切点 $(x_0, \ln x_0)$

$$y'_x = x_0 = \frac{1}{x_0} = k$$

$$\therefore x_0 = \frac{1}{k}$$

$$\therefore \text{切点为} \left(\frac{1}{k}, \ln \frac{1}{k} \right)$$

且在 $y = kx$ 直线上

$$\therefore \ln \frac{1}{k} = k \cdot \frac{1}{k}$$

$$\therefore k = \frac{1}{e}.$$

故选C.

7 已知 $f(x) = \ln x$, $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + mx + \frac{7}{2}$ ($m < 0$), 直线 l 与函数 $f(x)$, $g(x)$ 的图象都相切, 且与函数 $f(x)$ 的图象的切点为 $(1, f(1))$, 则 m 的值为 _____.

答案 -2

解析 $\because f(x) = \ln x$,

$$\therefore f(1) = 0,$$

$\therefore$ 与 $f(x)$ 图象的切点为 $(1, 0)$.

$$\because f'(x) = \frac{1}{x},$$

$$\therefore k = f'(1) = 1,$$

$\therefore$ 切线方程为 $y = x - 1$.

$\because y = x - 1$ 与 $y = \frac{1}{2}x^2 + mx + \frac{7}{2}$ 相切,

$$\therefore \begin{cases} y = x - 1 \\ y = \frac{1}{2}x^2 + mx + \frac{7}{2} \end{cases},$$

$$\text{即} \frac{1}{2}x^2 + (m-1)x + \frac{9}{2} = 0,$$

只需令 $\Delta = (m-1)^2 - 9 = 0$ 即可 ,

得 $m = 4$ 或 $m = -2$.

$\because m < 0$,

$\therefore m = -2$.

8 已知函数 $f(x) = ax \ln x - bx$ ($a, b \in \mathbf{R}$) , 在点 $(e, f(e))$ 处的切线方程为 $y = 3x - e$, 则 a, b 的值分别为 _____ .

答案 $a = 1, b = -1$

解析 $f'(x) = a(\ln x + 1) - b$,

$f'(e) = 2a - b = 3$,

$f(e) = (a - b)e = 2e$,

$\therefore \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$.

9 已知函数 $f(x) = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) 的图象在 $(0, 1)$ 处的切线方程为 $y = 2x + 1$, 若 $f(x) \geq mx + x$ 恒成立 , 则实数 m 的取值范围为 _____ .

答案 $[-1, 2e - 1]$

解析 $f(x) = a^x, f'(x) = a^x \ln a$,

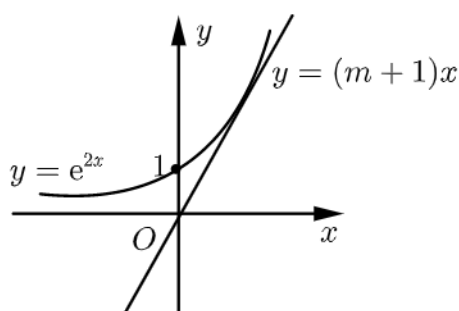
由题意有 : $f'(0) = 2$, $\therefore \ln a = 2$,

$\therefore a = e^2$,

$\therefore f(x) = e^{2x}, x \in \mathbf{R}$,

$\therefore f(x) \geq mx + x$, 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立 ,

令 $y = (m + 1)x$, 如图所示 ,



直线的极限位置与 $y = e^{2x}$ 相切 .

显然应有 $m+1 \geq 0$, 即 $m \geq -1$,

设切点坐标为 $(x_0, (m+1)x_0)$,

$$\text{有 } (m+1)x_0 = e^{2x_0} , \quad ①$$

切点为两曲线公共点 ,

$$\therefore f'(x_0) = 2e^{2x_0} , \therefore 2e^{2x_0} = m+1 , \quad ②$$

$y = e^{2x}$ 在 x_0 处的切线斜率 ,

$$2(m+1)x_0 = m+1 ,$$

显然切线斜率不为 0 , 即 $m+1 \neq 0$,

$$\therefore x_0 = \frac{1}{2} ,$$

$$\therefore f'(x_0) = 2e ,$$

$$\therefore m = 2e - 1 ,$$

综上 $m \in [-1, 2e - 1]$.

2. 导数运算

10 下列求导运算正确的是 () .

A. $(e^{-x})' = e^{-x}$

B. $(\sin \alpha)' = \cos \alpha$ (α 为常数)

C. $(\cos x)' = \sin x$

D. $(\lg x)' = \frac{1}{x \ln 10}$

答案 D

解析

A选项：因为 $(e^{-x})' = -e^{-x}$ ，所以A错误；

B选项：因为 $(\sin \alpha)' = 0$ （ α 为常数），所以B错误；

C选项：因为 $(\cos x)' = -\sin x$ ，所以C错误；

D选项：因为 $(\lg x)' = \frac{1}{x \ln 10}$ ，所以D正确。

故选D.

11 $f(x) = \frac{1}{x} \cos x$ ，则 $f(\pi) + f'(\frac{\pi}{2}) =$ _____.

答案 $-\frac{3}{\pi}$

解析 $\because f(x) = \frac{1}{x} \cos x, \therefore f'(x) = -\frac{1}{x^2} \cos x - \frac{1}{x} \sin x,$
 $\therefore f'(\frac{\pi}{2}) = -\frac{4}{\pi^2} \times \cos \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi}{2} = -\frac{2}{\pi}.$
 $\therefore f(\pi) = \frac{1}{\pi} \cos \pi = -\frac{1}{\pi}, \therefore f'(\frac{\pi}{2}) + f(\pi) = -\frac{3}{\pi}.$

12 已知 a 为常数，若曲线 $y = ax^2 + 3x - \ln x$ 存在与直线 $x + y - 1 = 0$ 垂直的切线，则实数 a 的取值范围是（ ）.

A. $[-\frac{1}{2}, +\infty)$

B. $(-\infty, -\frac{1}{2}]$

C. $[-1, +\infty)$

D. $(-\infty, -1]$

答案 A

解析 由 $y = ax^2 + 3x - \ln x$ ，得 $y' = 2ax + 3 - \frac{1}{x}$ ，其中 $x > 0$ ，

由题意， $x + y - 1 = 0$ 的斜率是 -1 ，则与直线 $x + y - 1 = 0$ 垂直的切线的斜率是 1 ，

$\therefore 2ax + 3 - \frac{1}{x} = 1$ 有正根，

$\therefore 2a = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} = \left(\frac{1}{x} - 1\right)^2 - 1$ 有正根，

$\therefore 2a \geq -1$ ，即 $a \geq -\frac{1}{2}$ ，

$\therefore$ 实数 a 的取值范围是 $[-\frac{1}{2}, +\infty)$ 。

故选A.

13 已知函数 $f(x) = \frac{x^2 - 3}{e^x}$, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数 , 则 $f'(1) =$ _____ .

答案 $\frac{4}{e}$

解析 $f'(x) = \frac{2xe^x - (x^2 - 3)e^x}{(e^x)^2} = \frac{2x - x^2 + 3}{e^x}$;
 $\therefore f'(1) = \frac{4}{e}$.
 故答案为 : $\frac{4}{e}$.

3. 导数的应用

14 若函数 $f(x) = kx - \ln x$ 在区间 $(1, +\infty)$ 单调递增 , 则 k 的取值范围是 () .

A. $(-\infty, -2]$

B. $(-\infty, -1]$

C. $[2, +\infty)$

D. $[1, +\infty)$

答案 D

解析 $\because$ 函数 $f(x) = kx - \ln x$,
 $\therefore f'(x) = k - \frac{1}{x}$,
 $\because$ 函数 $f(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 单调递增 ,
 $\therefore f'(x) = k - \frac{1}{x} \geq 0$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立 ,
 即 $k \geq \frac{1}{x}$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立 ,
 $\because x > 1$,
 $\therefore 0 < \frac{1}{x} < 1$,
 $\therefore k \geq 1$.
 故选 D .

15 函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 , 其导函数记为 $f'(x)$, 当 $x > 0$ 时 , $f'(x) < \frac{f(x)}{x}$ 恒成立 , 若 $f(2) = 0$, 则不等式 $\frac{f(x)}{x-1} > 0$ 的解集为 () .

- A. $(-2, 0) \cup (1, 2)$
- B. $(-2, 0) \cup (0, 1)$
- C. $(1, 2) \cup (-\infty, -2)$
- D. $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$

答案 A

解析

$\because x > 0$ 时, $f'(x) < \frac{f(x)}{x}$,

$\therefore$ 令 $F(x) = \frac{f(x)}{x}$, $F(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上递减,

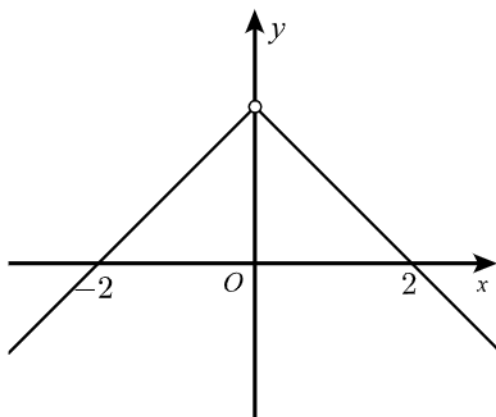
$\because f(x)$ 为奇函数,

$\therefore F(x)$ 为偶函数,

$\because f(2) = 0$,

$\therefore F(2) = 0$,

即 $F(x)$ 草图如下:



该题目问题可转化为“求 $F(x) \frac{x}{x-1} > 0$ 的解集”,

$$\textcircled{1} \begin{cases} F(x) > 0 \\ \frac{x}{x-1} > 0 \end{cases}, \text{解得 } -2 < x < 0 \text{ 或 } 1 < x < 2,$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} F(x) < 0 \\ \frac{x}{x-1} < 0 \end{cases}, \text{解得 } x \in \emptyset,$$

综上 $x \in (-2, 0) \cup (1, 2)$.

故选 A.

16 函数 $f(x) = \ln(x+a) - \frac{x}{x+1}$ 存在两个不同的极值点 x_1, x_2 , 则实数 a 的取值范围是 ().

- A. $(\frac{3}{4}, 1) \cup (1, +\infty)$

- B. $(0, +\infty)$
 C. $(-\infty, 0)$
 D. $(-\infty, \frac{3}{4})$

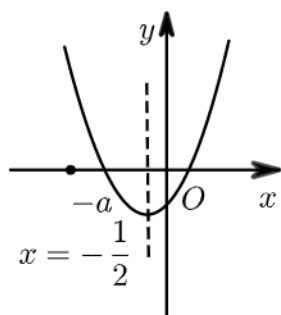
答案 A

解析 $f'(x) = \frac{x^2 + x + 1 - a}{(x+a)(x+1)^2},$

$x > -a,$

$\therefore f(x)$ 有 2 个不同极值点,

$\therefore x^2 + x + 1 - a = 0$ 有 2 个不同根 $(x > -a),$



$$\therefore \begin{cases} -a < -\frac{1}{2} \\ \Delta = 1 - 4(1 - a) > 0 \\ (-a)^2 + (-a) + 1 - a > 0 \end{cases}$$

解得 $a > \frac{3}{4}$ 且 $a \neq 1$.

17 若函数 $f(x) = x \ln x + ae^x$ 没有极值点, 则实数 a 的取值范围是 ().

- A. $(\frac{1}{e}, +\infty)$ B. $(0, \frac{1}{e})$
 C. $(-\infty, -\frac{1}{e})$ D. $(-\frac{1}{e}, 0)$

答案 C

解析 $\because f(x) = x \ln x + ae^x$ 没有极值点,

$\therefore f'(x) = \ln x + 1 + ae^x = 0$ 无解,

$\therefore -a = \frac{\ln x + 1}{e^x}$ 无解,

令 $g(x) = \frac{\ln x + 1}{e^x},$

$$\begin{aligned}
 g'(x) &= \frac{\frac{1}{x} \cdot e^x - e^x (\ln x + 1)}{(e^x)^2} \\
 &= \frac{\frac{1}{x} - \ln x - 1}{e^x}, \\
 \therefore y = \frac{1}{x} \text{ 和 } y = -\ln x \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上单调递减,} \\
 \therefore y = \frac{1}{x} - \ln x - 1 \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上单调递减,} \\
 \therefore g'(1) &= 0, \\
 \therefore \text{当 } x \in (0, 1) \text{ 时, } g'(x) > 0, g(x) \text{ 单调递增,} \\
 \text{当 } x \in (1, +\infty) \text{ 时, } g'(x) < 0, g(x) \text{ 单调递减,} \\
 \therefore g(x) &\leq g(1) = \frac{1}{e}, \text{ 且 } g(x) \in \left(-\infty, \frac{1}{e}\right], \\
 \therefore -a &> \frac{1}{e}, a < -\frac{1}{e}, \\
 \text{故选 C.}
 \end{aligned}$$

18 函数 $f(x) = 12x - x^3$ 在区间 $[-3, 3]$ 的最小值是 _____ .

答案 -16

解析

$$\begin{aligned}
 \therefore f(x) &= 12x - x^3, \\
 \therefore f'(x) &= 12 - 3x^2, \\
 \text{由 } f'(x) &= 0, \text{ 得 } x = -2 \text{ 或 } x = 2, \\
 \therefore f(-3) &= -9, f(-2) = -16, \\
 f(2) &= 16, f(3) = 9, \\
 \therefore \text{函数 } f(x) &= 12x - x^3, \text{ 在区间 } [-3, 3] \text{ 上的最小值是: } f(-2) = -16. \\
 \text{故答案为: } &-16.
 \end{aligned}$$

19 已知 $f(x) = e^x - ax^2$, 曲线 $y = f(x)$ 在 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y = bx + 1$.

- (1) 求 a, b 的值.
- (2) 求 $f(x)$ 在 $(0, 1]$ 上的最大值.

答案

(1) $a = 1, b = e - 2$.

(2) $f(1) = e - 1$.

解析

(1) $f'(x) = e^x - 2ax$, 则 $f'(x) = e^x - 2ax$,

由题意知 $f'(1) = e - 2a = b$, $f(1) = e - a = b + 1$

解得 $a = 1, b = e - 2$.

(2) 由 (1) 知 $f(x) = e^x - x^2$,

$\therefore f'(x) = e^x - 2x$,

$f'(x) = e^x - 2$,

$\therefore$ 当 $0 \leq x \leq \ln 2$ 时, $f'(x) < 0$, $f'(x)$ 单调递减,

当 $\ln 2 < x < 1$ 时 $f'(x) > 0$, $f'(x)$ 单调递增,

$\therefore f'(x)$ 在 $x = \ln 2$ 处取得最小值,

即 $f'(x) \geq f'(\ln 2) = e^{\ln 2} - 2 \ln 2$,

$\therefore f'(x) = 2 - 2 \ln 2 > 0$,

$\therefore f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递增,

$\therefore f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的最大值为 $f(1) = e - 1$.

20 已知函数 $f(x) = \ln x + ax^2 + (2a + 1)x$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性.

(2) 当 $a < 0$ 时, 证明 $f(x) \leq -\frac{3}{4a} - 2$.

答案

(1) 当 $a \geq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

当 $a < 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, -\frac{1}{2a})$ 上单调递增, 在 $(-\frac{1}{2a}, +\infty)$ 上单调递减.

(2) 证明见解析.

解析

(1) 因为 $f(x) = \ln x + ax^2 + (2a + 1)x$,

$$\begin{aligned} \text{求导 } f'(x) &= \frac{1}{x} + 2ax + (2a + 1) = \frac{2ax^2 + (2a + 1)x + 1}{x} \\ &= \frac{(2ax + 1)(x + 1)}{x} \quad (x > 0), \end{aligned}$$

① 当 $a = 0$ 时, $f'(x) = \frac{1}{x} + 1 > 0$ 恒成立, 此时 $y = f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

② 当 $a > 0$, 由于 $x > 0$,

所以 $(2ax+1)(x+1) > 0$ 恒成立, 此时 $y=f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

③ 当 $a < 0$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = -\frac{1}{2a}$,

因为在 $x \in (0, -\frac{1}{2a})$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $x \in (-\frac{1}{2a}, +\infty)$ 上单调递减,

综上所述, 当 $a \geq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

当 $a < 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, -\frac{1}{2a})$ 上单调递增, 在 $(-\frac{1}{2a}, +\infty)$ 上单调递减.

(2) 由 (1) 可知,

当 $a < 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, -\frac{1}{2a})$ 上单调递增, 在 $(-\frac{1}{2a}, +\infty)$ 上单调递减,

欲证 $f(x) \leq -\frac{3}{4a} - 2$,

即证 $f(x)_{\max} = f(-\frac{1}{2a}) \leq -\frac{3}{4a} - 2$,

即证 $\ln(-\frac{1}{2a}) + a \cdot (-\frac{1}{2a})^2 + (2a+1) \cdot (-\frac{1}{2a}) \leq -\frac{3}{4a} - 2$,

即证 $\ln(-\frac{1}{2a}) + \frac{1}{4a} - 1 - \frac{1}{2a} \leq -\frac{3}{4a} - 2$,

即证 $\ln(-\frac{1}{2a}) + \frac{1}{2a} + 1 \leq 0$,

令 $t = -\frac{1}{2}a > 0$,

即证 $\ln t - t + 1 \leq 0$,

令 $g(t) = \ln t - t + 1, t > 0$,

则 $g'(t) = \frac{1}{t} - 1 = \frac{1-t}{t}$,

当 $t \in (0, 1)$ 时, $g'(t) > 0$, $g(t)$ 递增,

当 $t \in (1, +\infty)$ 时, $g'(t) < 0$, $g(t)$ 递减,

$\therefore g(t) \leq g(1) = \ln 1 - 1 + 1 = 0$,

即 $\ln t - t + 1 \leq 0$.

证毕.

21 已知函数 $f(x) = ae^{2x} + (a-2)e^x - x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性.

(2) 若 $f(x)$ 有两个零点, 求 a 的取值范围.

答案

(1) 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减;

当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, -\ln a)$ 上单调递减, 在 $(-\ln a, +\infty)$ 上单调递增.

(2) $(0, 1)$.

解析

(1) $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, $f'(x) = 2ae^{2x} + (a-2)e^x - 1 = (ae^x - 1) \cdot (2e^x + 1)$.

①若 $a \leq 0$, 则 $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递减;

②若 $a > 0$, 则由 $f'(x) = 0$ 得 $x = -\ln a$,

当 $x \in (-\infty, -\ln a)$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x \in (-\ln a, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, -\ln a)$ 上单调递减, 在 $(-\ln a, +\infty)$ 上单调递增.

综上, 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减;

当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, -\ln a)$ 上单调递减, 在 $(-\ln a, +\infty)$ 上单调递增.

(2) 方法一: ①若 $a \leq 0$, 由 (1) 知, $f(x)$ 至多有一个零点;

②若 $a > 0$, 由 (1) 知, 当 $x = -\ln a$ 时, $f(x)$ 取得最小值, 最小值为

$$f(-\ln a) = 1 - \frac{1}{a} + \ln a.$$

(i) 当 $a = 1$ 时, 由于 $f(-\ln a) = 0$, 故 $f(x)$ 只有一个零点;

(ii) 当 $a \in (1, +\infty)$ 时, 由于 $1 - \frac{1}{a} + \ln a > 0$, 即 $f(-\ln a) > 0$, 故 $f(x)$ 没有零点;

(iii) 当 $a \in (0, 1)$ 时, $1 - \frac{1}{a} + \ln a < 0$, 即 $f(-\ln a) < 0$,

又 $f(-2) = ae^{-4} + (a-2)e^{-2} + 2 > -2e^{-2} + 2 > 0$, 故 $f(x)$ 在 $(-\infty, -\ln a)$ 内有一个零点,

设正整数 n_0 满足 $n_0 > \ln\left(\frac{3}{a} - 1\right)$, 则

$$f(n_0) = e^{n_0}(ae^{n_0} + a - 2) - n_0 > e^{n_0} - n_0 > 2^{n_0} - n_0 > 0,$$

由于 $\ln\left(\frac{3}{a} - 1\right) > -\ln a$, 因此 $f(x)$ 在 $(-\ln a, +\infty)$ 内有一个零点.

综上, a 的取值范围为 $(0, 1)$.

方法二: 若 $a \leq 0$ 时, 由 (1) 可知 $f(x)$ 最多有一个零点, 不符合题意, 故舍去,

当 $a > 0$ 时, $f(x) = ae^{2x} + (a-2)e^x - x$, 令 $e^x = t$,

则 $x = \ln t$ ($t > 0$), $f(t) = at^2 + (a-2)t - \ln t$,

当 $t \rightarrow 0$ 时, $f(t) \rightarrow +\infty$, 当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $f(t) \rightarrow +\infty$,

所以函数有两个零点时, $f(t)$ 的最小值小于 0 即可,

$$f'(t) = 2at + (a-2) - \frac{1}{t} = \frac{(2t+1)(at-1)}{t}, \text{ 令 } f'(t) = 0, \text{ 则 } t = \frac{1}{a},$$

故 $f(t)$ 在 $\left(0, \frac{1}{a}\right)$ 上是减函数, 在 $\left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$ 上是增函数,

$$\text{所以 } f(t)_{\min} = f\left(\frac{1}{a}\right) = a \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^2 + (a-2) \cdot \frac{1}{a} - \ln \frac{1}{a} < 0,$$

$$\text{所以 } 1 - \frac{1}{a} - \ln \frac{1}{a} < 0, \text{ 即 } \ln \frac{1}{a} + \frac{1}{a} - 1 > 0,$$

设 $m = \frac{1}{a}$, 则 $g(m) = \ln m + m - 1$ ($m > 0$),

则 $g'(m) = \frac{1}{m} + 1$, 由 $g(1) = 0$,

所以 $m = \frac{1}{a} > 1$,

解得 $0 < a < 1$,

所以 a 的取值范围是 $(0, 1)$.

22 已知函数 $g(x) = ax^3 + x^2 + x$ (a 为实数).

(1) 试讨论函数 $g(x)$ 的单调性.

(2) 若对 $\forall x \in (0, +\infty)$ 恒有 $g(x) \leq \ln x + \frac{1}{x}$, 求实数 a 的取值范围.

答案

(1) (i) 当 $a = 0$ 时, $g(x)$ 在 $(-\infty, -\frac{1}{2})$ 单调减和 $(-\frac{1}{2}, +\infty)$ 单调增;

(ii) 当 $a \neq 0$ 时, $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 单调增;

当 $0 < a < \frac{1}{3}$ 时, $g(x)$ 在 (x_1, x_2) 单调减, 在 $(-\infty, x_1)$ 和 $(x_2, +\infty)$ 单调增;

当 $a < 0$ 时, $g(x)$ 在 (x_2, x_1) 单调增, 在 $(-\infty, x_2)$ 和 $(x_1, +\infty)$ 单调减.

(2) 实数 $a \in (-\infty, -1]$.

解析

(1) $g'(x) = 3ax^2 + 2x + 1$,

(i) 当 $a = 0$ 时, $g(x)$ 在 $(-\infty, -\frac{1}{2})$ 单调减和 $(-\frac{1}{2}, +\infty)$ 单调增;

(ii) 当 $a \neq 0$ 时, $\Delta = 4 - 12a$,

当 $a \geq \frac{1}{3}$ 时, $g'(x) = 3ax^2 + 2x + 1 \geq 0$ 恒成立, 此时 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 单调增;

当 $0 < a < \frac{1}{3}$ 时, 由 $g'(x) = 3ax^2 + 2x + 1 = 0$ 得,

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{1 - 3a}}{3a}, x_2 = \frac{-1 + \sqrt{1 - 3a}}{3a},$$

$g(x)$ 在 (x_1, x_2) 单调减, 在 $(-\infty, x_1)$ 和 $(x_2, +\infty)$ 单调增;

当 $a < 0$ 时, $g(x)$ 在 (x_2, x_1) 单调增, 在 $(-\infty, x_2)$ 和 $(x_1, +\infty)$ 单调减.

(2) 令 $f(x) = \ln x + \frac{1}{x}$, 则 $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$,

因此, $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 单调减, 在 $(1, +\infty)$ 单调增,

$$\therefore f_{\min}(x) = f(1) = 1.$$

当 $a > -1$ 时, $g(1) = a + 2 > 1 = f(1)$, 显然, 对 $\forall x \in (0, +\infty)$ 不恒有 $f(x) \geq g(x)$;

当 $a \leq -1$ 时, 由 (1) 知, $g(x)$ 在 $(0, x_1)$ 单调增, 在 $(x_1, +\infty)$ 单调减,

$$3ax_1^2 + 2x_1 + 1 = 0, \text{ 即 } ax_1^2 = -\frac{1}{3}(2x_1 + 1),$$

$$\text{所以, 在 } (0, +\infty) \text{ 上, } g_{\max}(x) = g(x_1) = ax_1^3 + x_1^2 + x_1 = \frac{1}{3}x_1^2 + \frac{2}{3}x_1$$

$$= \frac{1}{3}(x_1 + 1)^2 - \frac{1}{3},$$

$$\text{又 } x_1 = \frac{-1 - \sqrt{1 - 3a}}{3a} = \frac{1}{\sqrt{1 - 3a} - 1} \in (0, 1],$$

$$\text{所以 } g_{\max}(x) = \frac{1}{3}(x_1 + 1)^2 - \frac{1}{3} \leq 1 = f_{\min}(x),$$

即满足对 $\forall x \in (0, +\infty)$ 恒有 $f(x) \geq g(x)$.

综上, 实数 $a \in (-\infty, -1]$.

23 已知函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $g(x) = \frac{m}{x} - \frac{3}{x^2} - 1$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间.

(2) 对一切 $x \in (0, +\infty)$, $2f(x) \geq g(x)$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

(3) 证明: 对一切 $x \in (0, +\infty)$, 都有 $\ln x < \frac{2x}{e} - \frac{x^2}{e^x}$ 成立.

答案

(1) $f(x)$ 的单调递增区间是 $(0, e)$, 单调递减区间是 $(e, +\infty)$.

(2) $(-\infty, 4]$.

(3) 证明见解析.

解析

(1) 由 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, 得 $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$,

令 $f'(x) > 0$, 得 $0 < x < e$,

$\therefore f(x)$ 的单调递增区间是 $(0, e)$, 单调递减区间是 $(e, +\infty)$.

(2) 对任意 $x \in (0, +\infty)$, $2f(x) \geq g(x)$ 恒成立,

等价于 $m \leq 2 \ln x + x + \frac{3}{x}$ 对任意 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立,

令 $h(x) = 2 \ln x + x + \frac{3}{x}$,

则 $h'(x) = \frac{2}{x} + 1 - \frac{3}{x^2} = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2} = \frac{(x+3)(x-1)}{x^2} (x > 0)$,

当 $x \in (0, 1)$ 时, $h'(x) < 0$,

即 $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减,

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $h'(x) > 0$,

即 $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

$\therefore h(x)_{\min} = h(1) = 4$,

$\therefore m \leq 4$, 即实数 m 的取值范围是 $(-\infty, 4]$.

$$(3) \ln x < \frac{2x}{e} - \frac{x^2}{e^x}, \text{ 等价于 } \frac{\ln x}{x} < \frac{2}{e} - \frac{x}{e^x},$$

$$\text{即证 } f(x) < \frac{2}{e} - \frac{x}{e^x},$$

由 (1) 知 $f(x) \leq f(e) = \frac{1}{e}$ (当 $x = e$ 时取等号),

$$\text{令 } \varphi(x) = \frac{2}{e} - \frac{x}{e^x}, \text{ 则 } \varphi'(x) = \frac{x-1}{e^x},$$

易知 $\varphi(x)$ 在 $(0, 1)$ 单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 单调递增,

$$\therefore \varphi(x) \geq \varphi(1) = \frac{1}{e} \text{ (当 } x = 1 \text{ 时取等号)},$$

$$\therefore f(x) \leq \frac{1}{e}, \varphi(x) \geq \frac{1}{e} \text{ 取等号的条件不同},$$

$\therefore f(x) < \varphi(x)$ 对任意 $x \in (0, +\infty)$ 都成立,

即对任意 $x \in (0, +\infty)$, 都有 $\ln x < \frac{2x}{e} - \frac{x^2}{e^x}$ 成立.

24 已知函数 $f(x) = e^x - x - 1$, $g(x) = x^2 e^{ax}$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小值;

(2) 求 $g(x)$ 的单调区间;

(3) 当 $a = 1$ 时, 对于在 $(0, 1)$ 中的任一个常数 m , 是否存在正数 x_0 使得 $f(x_0) > \frac{m}{2} g(x_0)$ 成立? 如果存在, 求出符合条件的一个 x_0 ; 否则说明理由.

答案

(1) $f(x)_{\min} = f(0) = 0$

(2) 当 $a = 0$ 时, 函数 $g(x)$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 内为减函数, 在区间 $(0, +\infty)$ 内为增函数; $a > 0$ 时, 函数 $g(x)$ 在区间 $(-\infty, -\frac{2}{a})$ 内为增函数, 在区间 $(-\frac{2}{a}, 0)$ 内为减函数, 在区间 $(0, +\infty)$ 内为增函数

(3) 可找到一个正常数 $x_0 = -\ln m$ ($0 < m < 1$), 使得 (*) 式成立

解析

(1) $f(x)$ 的定义域是 $\mathbf{R}$, $f'(x) = e^x - 1$, 且在 $(-\infty, 0)$ 上 $f'(x) < 0$, 在 $(0, +\infty)$ 上 $f'(x) > 0$, $\therefore f(x)_{\min} = f(0) = 0$. (3分)

(2) 函数 $g(x)$ 的导数 $g'(x) = 2xe^{ax} + ax^2 e^{ax} = (2x + ax^2) e^{ax}$.

① 当 $a = 0$ 时, 若 $x < 0$, 则 $g'(x) < 0$, 若 $x > 0$, 则 $g'(x) > 0$. 所以当 $a = 0$ 时, 函数 $g(x)$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 内为减函数, 在区间 $(0, +\infty)$ 内为增函数. (5分)

②当 $a > 0$ 时, 由 $2x + ax^2 > 0$ 解得 $x < -\frac{2}{a}$ 或 $x > 0$, 由 $2x + ax^2 < 0$ 解得 $-\frac{2}{a} < x < 0$.
 所以, 当 $a > 0$ 时, 函数 $g(x)$ 在区间 $(-\infty, -\frac{2}{a})$ 内为增函数, 在区间 $(-\frac{2}{a}, 0)$ 内为减函数, 在区间 $(0, +\infty)$ 内为增函数; (7分)

③当 $a < 0$ 时, 由 $2x + ax^2 > 0$ 解得 $0 < x < -\frac{2}{a}$, 由 $2x + ax^2 < 0$ 解得 $x < 0$ 或 $x > -\frac{2}{a}$.
 所以当 $a < 0$ 时, 函数 $g(x)$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 内为减函数, 在区间 $(0, -\frac{2}{a})$ 内为增函数, 在区间 $(-\frac{2}{a}, +\infty)$ 内为减函数. (9分)

(3) 假设存在这样的 x_0 满足题意, 则

$f(x_0) > \frac{m}{2}g(x_0) \Leftrightarrow e^{x_0} - x_0 - 1 > \frac{m}{2}x_0^2 e^{x_0} \Leftrightarrow \frac{m}{2}x_0^2 + \frac{x_0 + 1}{e^{x_0}} - 1 < 0$. (*) (10分) 要找一个 $x_0 > 0$, 使(*)式成立, 只需找到当 $x > 0$ 时, 函数 $h(x) = \frac{m}{2}x^2 + \frac{x+1}{e^x} - 1$ 的最小值 $h(x)_{\min}$, 满足 $h(x)_{\min} < 0$ 即可, (11分) $h'(x) = x(m - \frac{1}{e^x})$, 令 $h'(x) = 0$ 得 $e^x = \frac{1}{m}$, 则 $x = -\ln m$, 取 $x_0 = -\ln m$. 当 $0 < x < x_0$ 时, $h'(x) < 0$; 当 $x > x_0$ 时, $h'(x) > 0$.
 所以 $h(x)_{\min} = h(x_0) = h(-\ln m) = \frac{m}{2}(\ln m)^2 - m \ln m + m - 1$. (12分) 下面只需证明: 在 $0 < m < 1$ 时, $\frac{m}{2}(\ln m)^2 - m \ln m + m - 1 < 0$ 成立即可, 又令
 $p(m) = \frac{m}{2}(\ln m)^2 - m \ln m + m - 1, m \in (0, 1)$, 对 $p(m)$ 关于 m 求导数, 则
 $p'(m) = \frac{1}{2}(\ln m)^2 \geq 0$, 从而 $p(m)$ 在 $m \in (0, 1)$ 时为增函数, 则 $p(m) < p(1) = 0$, 从而
 $\frac{m}{2}(\ln m)^2 - m \ln m + m - 1 < 0$ 得证. 于是 $h(x)$ 的最小值 $h(-\ln m) < 0$, 因此可找到一个正常数 $x_0 = -\ln m (0 < m < 1)$, 使得(*)式成立

25 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2, g(x) = a \ln x$.

(1) 设 $h(x) = f(x) + g(x)$, 若对任意两个不等的正数 x_1, x_2 , 都有 $\frac{h(x_1) - h(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

(2) 若在 $[1, e]$ 上存在一点 x_0 , 使得 $f'(x_0) + \frac{1}{f'(x_0)} < g(x_0) - g'(x_0)$ 成立, 求实数 a 的取值范围.

答案

(1) 即 a 的取值范围是 $[0, +\infty)$.

(2) 实数 a 的取值范围是 $(-\infty, -2) \cup \left(\frac{e^2 + 1}{e - 1}, +\infty\right)$.

解析

(1) $h(x) = f(x) + g(x) = \frac{1}{2}x^2 + a \ln x$,

对任意两个不等的正数 x_1, x_2 ,

都有 $\frac{h(x_1) - h(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$ 恒成立，

可得 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 递增，

由 $h'(x) = x + \frac{a}{x} \geq 0$ 恒成立，

可得 $a \geq -x^2$ 的最大值，

则 $a \geq 0$ ，即 a 的取值范围是 $[0, +\infty)$ 。

(2) 不等式 $f'(x_0) + \frac{1}{f'(x_0)} < g(x_0) - g'(x_0)$ 等价于 $x_0 + \frac{1}{x_0} < a \ln x_0 - \frac{a}{x_0}$ ，

整理得 $x_0 - a \ln x_0 + \frac{1+a}{x_0} < 0$ ，

设 $m(x) = x - a \ln x + \frac{1+a}{x}$ ，

则由题意可知只需在 $[1, e]$ 上存在一点 x_0 ，

使得 $m(x_0) < 0$ 。

对 $m(x)$ 求导数，

得 $m'(x) = 1 - \frac{a}{x} - \frac{1+a}{x^2} = \frac{(x-a-1)(x+1)}{x^2}$ ，

因为 $x > 0$ ，所以 $x+1 > 0$ ，

令 $x-1-a=0$ ，

得 $x=1+a$ 。

①若 $1+a \leq 1$ ，

即 $a \leq 0$ 时，

令 $m(1) = 2+a < 0$ ，

解得 $a < -2$ 。

②若 $1 < 1+a \leq e$ ，即 $0 < a \leq e-1$ 时， $m(x)$ 在 $1+a$ 处取得最小值，

令 $m(1+a) = 1+a - a \ln(1+a) + 1 < 0$ ，即 $1+a+1 < a \ln(1+a)$ ，

可得 $\frac{a+1+1}{a} < \ln(a+1)$

考察式子 $\frac{t+1}{t-1} < \ln t$ ，

因为 $1 < t \leq e$ ，

可得左端大于1，而右端小于1，

所以不等式不能成立

③当 $1+a > e$ ，

即 $a > e-1$ 时， $m(x)$ 在 $[1, e]$ 上单调递减，

只需 $m(e) < 0$ ，

$$\text{得 } a > \frac{e^2 + 1}{e - 1},$$

$$\text{又因为 } e - 1 - \frac{e^2 + 1}{e - 1} = \frac{-2e}{e - 1} < 0, \text{ 则 } a > \frac{e^2 + 1}{e - 1},$$

综上所述, 实数 a 的取值范围是 $(-\infty, -2) \cup \left(\frac{e^2 + 1}{e - 1}, +\infty\right)$

26 若函数 $f(x) = ax^3 - bx + 4$, 当 $x = 2$ 时, 函数 $f(x)$ 有极值 $-\frac{4}{3}$.

(1) 求函数的解析式.

(2) 若函数 $f(x) = k$ 有 3 个解, 求实数 k 的取值范围.

答案

(1) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 4.$

(2) $k \in \left(-\frac{4}{3}, \frac{28}{3}\right).$

解析

(1) 由题意, 得 $\begin{cases} f'(2) = 0 \\ f(2) = -\frac{4}{3} \end{cases}$

$$\text{即 } \begin{cases} 12a - b = 0 \\ 8a - 2b + 4 = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = 4 \end{cases}$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 4.$$

(2) $f'(x) = x^2 - 4$, 令 $f'(x) = 0$, $x = \pm 2$

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	极大	$\searrow$	极小	$\nearrow$

$$f(-2) = \frac{28}{3}, f(2) = -\frac{4}{3}$$

$$\therefore k \in \left(-\frac{4}{3}, \frac{28}{3}\right).$$

27 已知函数 $f(x) = x^2 - 2\ln x$, $h(x) = x^2 - x + a$.

(1) 其求函数 $f(x)$ 的极值.

(2) 设函数 $k(x) = f(x) - h(x)$, 若函数 $k(x)$ 在 $[1, 3]$ 上恰有两个不同零点, 求实数 a 的取值范围.

答案

(1) 极小值为1, 无极大值.

(2) $(2 - 2\ln 2, 3 - 2\ln 3]$.

解析

(1) $\because f'(x) = 2x - \frac{2}{x}$, 令 $f'(x) = 0$,

$\because x > 0$,

$\therefore x = 1$,

所以 $f(x)$ 的极小值为1, 无极大值.

(2) $\because$

x	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	减	1	增

又 $\because k(x) = f(x) - g(x) = -2\ln x + x - a$,

$\therefore k'(x) = -\frac{2}{x} + 1$,

若 $k'(x) = 0$, 则 $x = 2$,

当 $x \in [1, 2)$ 时, $k'(x) < 0$;

当 $x \in (2, 3]$ 时, $k'(x) > 0$.

故 $k(x)$ 在 $x \in [1, 2)$ 上递减, 在 $x \in (2, 3]$ 上递增.

$$\therefore \begin{cases} k(1) \geq 0 \\ k(2) < 0 \\ k(3) \geq 0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} a \leq 1 \\ a > 2 - 2\ln 2 \\ a \leq 3 - 2\ln 3 \end{cases}$$

$\therefore 2 - 2\ln 2 < a \leq 3 - 2\ln 3$.

所以实数 a 的取值范围是: $(2 - 2\ln 2, 3 - 2\ln 3]$.

28

设函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - ax$ ($a > 0$), $g(x) = bx^2 + 2b - 1$.

(1) 若曲线 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 在它们的交点 $(1, c)$ 处有相同的切线, 求实数 a, b 的值.

(2) 当 $b = \frac{1-a}{2}$ 时, 若函数 $h(x) = f(x) + g(x)$ 在区间 $(-2, 0)$ 内恰有两个零点, 求实数 a 的取值范围.

(3) 当 $a = 1, b = 0$ 时, 求函数 $h(x) = f(x) + g(x)$ 在区间 $[t, t+3]$ 上的最小值.

答案

- (1) $a = \frac{1}{3}, b = \frac{1}{3}$.
 (2) a 的取值范围是 $\left(0, \frac{1}{3}\right)$.
 (3) $h(x)_{\min} = \begin{cases} \frac{1}{3}t^3 - t - 1 & t \in (-\infty, -2) \cup [1, +\infty) \\ -\frac{5}{3} & t \in [-2, 1) \end{cases}$.

解析

- (1) 因为 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - ax (a > 0)$, $g(x) = bx^2 + 2b - 1$,

所以 $f'(x) = x^2 - a$, $g'(x) = 2bx$.

因为曲线 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 在它们的交点 $(1, c)$ 处有相同的切线,

所以 $f(1) = g(1)$, 且 $f'(1) = g'(1)$,

即 $\frac{1}{3} - a = b + 2b - 1$, 且 $1 - a = 2b$,

解得 $a = \frac{1}{3}, b = \frac{1}{3}$.

- (2) 当 $b = \frac{1-a}{2}$ 时, $h(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1-a}{2}x^2 - ax - a (a > 0)$,

所以 $h'(x) = x^2 + (1-a)x - a = (x+1)(x-a)$.

令 $h'(x) = 0$, 解得 $x_1 = -1, x_2 = a > 0$.

当 x 变化时, $h'(x)$, $h(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, a)$	a	$(a, +\infty)$
$h'(x)$	+	0	-	0	+
$h(x)$	$\nearrow$	极大值	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

所以函数 $h(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, -1)$, $(a, +\infty)$, 单调递减区间为 $(-1, a)$,

故 $h(x)$ 在区间 $(-2, -1)$ 上单调递增, 在区间 $(-1, 0)$ 上单调递减.

又函数 $h(x)$ 在区间 $(-2, 0)$ 内恰有两个零点, 所以有:

$$\begin{cases} h(-2) < 0 \\ h(-1) > 0 \\ h(0) < 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} -\frac{8}{3} + 2(1-a) + 2a - a < 0 \\ -\frac{1}{3} + \frac{1-a}{2} + a - a > 0 \\ -a < 0 \end{cases},$$

解得: $0 < a < \frac{1}{3}$, 所以实数 a 的取值范围是 $\left(0, \frac{1}{3}\right)$.

- (3) 当 $a = 1, b = 0$ 时, $h(x) = \frac{1}{3}x^3 - x - 1$,

则由(2)可知, 函数 $h(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, -1)$, $(1, +\infty)$, 单调递减区间为

$(-1, 1)$.

因为 $h(-2) = -\frac{5}{3}$, $h(1) = -\frac{5}{3}$, 所以 $h(-2) = h(1)$.

①当 $t+3 < 1$, 即 $t < -2$ 时, $h(x)_{\min} = h(t) = \frac{1}{3}t^3 - t - 1$.

②当 $-2 \leq t < 1$ 时, $h(x)_{\min} = h(-2) = -\frac{5}{3}$.

③当 $t \geq 1$ 时, $h(x)$ 在区间 $[t, t+3]$ 上单调递增, $h(x)_{\min} = h(t) = \frac{1}{3}t^3 - t - 1$.

综上所述, 函数 $h(x)$ 在区间 $[t, t+3]$ 上最小值

$$h(x)_{\min} = \begin{cases} \frac{1}{3}t^3 - t - 1 & t \in (-\infty, -2) \cup [1, +\infty) \\ -\frac{5}{3} & t \in [-2, 1) \end{cases}.$$

29 已知函数 $f(x) = axe^x - b \ln x - 2x$ ($a, b \in \mathbf{R}$).

(1) 讨论 $a = 0$ 时, 函数 $f(x)$ 的单调性.

(2) 若 $b = 2$, 函数 $f(x)$ 有两个零点, 求实数 a 的取值范围.

答案

(1) 当 $b \geq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是减函数;

当 $b < 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, -\frac{b}{2})$ 上是增函数, $f(x)$ 在 $(-\frac{b}{2}, +\infty)$ 上是减函数.

(2) $(0, \frac{2}{e})$.

解析

(1) 当 $a = 0$ 时, $f(x) = -b \ln x - 2x$, $f'(x) = \frac{b}{x} - 2 = \frac{b+2x}{x}$ ($x > 0$),

当 $b \geq 0$ 时, $f'(x) < 0$ 恒成立, 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是减函数;

当 $b < 0$ 时, $0 < x < -\frac{b}{2}$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 在 $(0, -\frac{b}{2})$ 上是增函数,

同理, 函数 $f(x)$ 在 $(-\frac{b}{2}, +\infty)$ 上是减函数.

(2) 方法一: 当 $b = 2$ 时, $f(x) = axe^x - 2 \ln x - 2x$, 令 $f(x) = 0$, 则 $a = 2 \cdot \frac{\ln x + x}{xe^x}$,

取 $g(x) = \frac{\ln x + x}{xe^x}$ ($x > 0$),

则 $g'(x) = \frac{(\frac{1}{x} + 1) \cdot xe^x - e^x(x+1)(\ln x + x)}{x(e^x)^2}$

$= \frac{(1+x) - (x \ln x + x^2 + \ln x + x)}{x^2 e^x}$

$= -\frac{(1+x)(\ln x + x - 1)}{x^2 e^x}$

显然 $x > 0$, $-\frac{(1+x)}{x^2 e^x} < 0$,

取 $h(x) = \ln x + x - 1$ ($x > 0$), 易知 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 且 $h(1) = 0$,

则 $x \in (0, 1)$, $h(x) < 0$, $x \in (1, +\infty)$, $h(x) > 0$,

所以 $x \in (0, 1)$, $g'(x) > 0$, $x \in (1, +\infty)$, $g'(x) < 0$,

$$\therefore g(x)_{\max} = g(1) = \frac{1}{e},$$

又 $x \in (1, +\infty)$, $g(x) = \frac{\ln x + x}{xe^x} > 0$ 恒成立,

由 $a = 2 \cdot \frac{\ln x + x}{xe^x}$, 可保证 $f(x)$ 有两个点, 则 $a \in \left(0, \frac{2}{e}\right)$.

方法二: 当 $b = 2$ 时, $f(x) = axe^x - 2\ln x - 2x$, 记 $t = \ln x + x$,

则 $t = \ln x + x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 且 $t \in \mathbf{R}$,

$$\therefore f(x) = axe^x - 2(\ln x + x) = ae^t - 2t,$$

设 $g(t) = ae^t - 2t$, $t \in \mathbf{R}$,

$\therefore f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个零点等价于 $g(t) = ae^t - 2t$ 在 $\mathbf{R}$ 上有两个零点.

① 当 $a \leq 0$ 时, $g(t) = ae^t - 2t$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, 故 $g(t)$ 在 $\mathbf{R}$ 上最多有一个零点;

② 当 $a > 0$ 时, 由 $g'(t) = ae^t - 2 = 0$, 可知 $g(t)$ 在 $t = \ln \frac{2}{a}$ 处有唯一的一个极小值

$$g\left(\ln \frac{2}{a}\right) = 2 - 2\ln \frac{2}{a},$$

若 $a > \frac{2}{e}$, $g(t)_{\min} = g\left(\ln \frac{2}{a}\right) = 2 - 2\ln \frac{2}{a} > 0$, $g(t)$ 无零点;

若 $a = \frac{2}{e}$, $g(t)_{\min} = 0$, $g(t)$ 只有一个零点;

若 $0 < a < \frac{2}{e}$, $g(t)_{\min} = g\left(\ln \frac{2}{a}\right) = 2 - 2\ln \frac{2}{a} < 0$, 而 $g(0) = a > 0$,

由于 $h(x) = \frac{\ln x}{x}$ 在 $x > e$ 时为减函数, 可知 $x > e$ 时, $e^x > x^e > x^2$,

又 $\frac{2}{a} > e$, 所以 $e^{\frac{2}{a}} > \left(\frac{2}{a}\right)^e > \left(\frac{2}{a}\right)^2$, 从而 $g\left(\frac{2}{a}\right) = ae^{\frac{2}{a}} - \frac{4}{a} > 0$,

$\therefore g(t)$ 在 $\left(0, \ln \frac{2}{a}\right)$ 和 $\left(\ln \frac{2}{a}, \frac{2}{a}\right)$ 上各有一个零点,

综上所述, 当 $0 < a < \frac{2}{e}$ 时, $f(x)$ 有两个零点, 即所求 a 的取值范围是 $\left(0, \frac{2}{e}\right)$.

30 若函数 $f(x) = ax^3 - bx + 4$, 当 $x = 2$ 时, 函数 $f(x)$ 有极值 $-\frac{4}{3}$.

(1) 求函数的解析式.

(2) 求函数的极值.

(3) 若关于 x 的方程 $f(x) = k$ 有三个零点, 求实数 k 的取值范围.

答案

(1) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 4$.

(2) $y_{\text{极大}} = f(-2) = \frac{28}{3}$, $y_{\text{极小}} = f(2) = -\frac{4}{3}$.

(3) $k \in \left(-\frac{4}{3}, \frac{28}{3}\right)$.

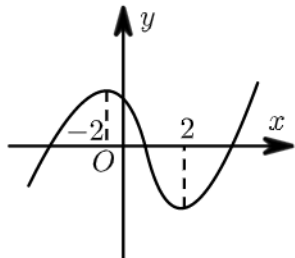
解析

(1) 由题 $f'(x) = 3ax^2 - b$,

$$\therefore \text{有} \begin{cases} f'(2) = 12a - b = 0 \\ f(2) = 8a - 2b + 4 = -\frac{4}{3} \end{cases}, \text{得} \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ b = 4 \end{cases},$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 4.$$

(2)



由 (1) 得 $f'(x) = x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$,

令 $f'(x) = 0$ 得 $x = 2$ 或 $x = -2$,

$\therefore$ 当 $x = -2$ 时, $f(x)$ 有极大值 $\frac{28}{3}$,

当 $x = 2$ 时, $f(x)$ 有极小值 $-\frac{4}{3}$.

(3) 由 (2) 知当 $x < -2$ 时或 $x > 2$ 时, $f(x)$ 为增函数,

当 $-2 < x < 2$ 时, $f(x)$ 为减函数,

要使 $f(x) = k$ 有三个零点, 则 $f(x)_{\text{极小值}} < k < f(x)_{\text{极大值}}$,

$$\therefore -\frac{4}{3} < k < \frac{28}{3}.$$