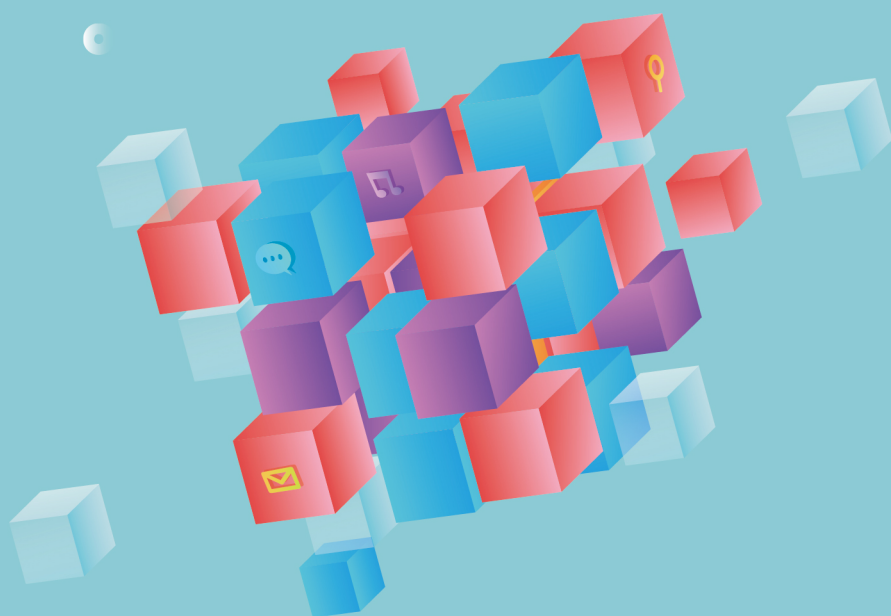


知识魔方

i 数学



总 主 编：马建明

本模块主编：闫聪聪

教 研 团 队：闫聪聪 蔡磊

吕金琳

封面设计：刘雅迪

前言

学而思一对一产品升级介绍

为进一步打造本地化产品，助力学生高考，学而思 1 对 1 产品团队打造了模块课系列产品，该产品旨在将高中阶段所有的知识点全部打散，再针对每一个学生的具体情况重新组合，制定个性化的学习方案，帮助学生进步。

随着模块课 1.0 版本的推进，无论是课程选择，还是内容学习上，学生有更多可以选择的空间，切实满足不同学生的个性化需求。本着“随需而变，才有未来”的精神，我们又推出了 2.0 版本《知识魔方·i 系列》，此系列涵盖《知识魔方·i 数学》、《知识魔方·i 物理》、《知识魔方·i 化学》、《知识魔方·i 生物》、《知识魔方·i 历史》多种学科，结合学科共性，统一产品逻辑，与此同时，兼顾到学科特色，创新学习形式，激发学生学习兴趣，做学习的主人。

本产品在设计上有三个突出的**特点**：

- (1) 模块产品，私人订制效果棒
- (2) 本地优化，海量资源覆盖广
- (3) 知识解构，新旧旧识尽入囊



扫描二维码，关注公众号，获取更多学习资料

高中数学课程产品设计

考点分析：以大数据方式分析考试重点难点，紧扣考试热点，让同学们的复习更具针对性。

知识导图：梳理知识结构，帮助同学们形成网络状的知识图谱，更有助于对知识点的理解记忆。

典型例题：分析考试情况，精选最新的考题，让同学们清楚每一个知识点的考法。

巩固练习：匹配同类型题目，讲练结合，锻炼提升解题能力。

本模块介绍

1、考试要点

本模块是高考考查要点，每年都会考查，小题通常会在选择第七或第八题，主要考查双曲线和抛物线的几何性质和方程计算，大题通常会在第十八题或十九题位置，主要考查椭圆的性质的灵活运用以及直线和椭圆的位置关系衍变的题型，计算量比较大。

2、课程内容

本模块主要是圆锥曲线在解答题中的考察，主要对圆锥曲线解答题中常见题型进行分类讲解与练习。这一部分需要良好的计算能力和灵活的解题思维，希望同学们耐心细心，认真完成这一部分的学习。

目 录

第 1 讲 直线与椭圆的位置关系 1.....	01
-------------------------	----

第 2 讲 直线与椭圆的位置关系 2.....	07
-------------------------	----



我们一起开始学习吧 o (*^_^*) o



第 1 讲

直线与椭圆的位置关系 1





直线与椭圆位置关系的判定

- 1 已知椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$, 焦距为 $4\sqrt{2}$, 抛物线 $C_2: x^2 = 2py (p > 0)$ 的焦点 F 是椭圆 C_1 的顶点.
- (1) 求 C_1 与 C_2 的标准方程.
- (2) C_1 上不同于 F 的两点 P, Q 满足以 PQ 为直径的圆经过 F , 且直线 PQ 与 C_2 相切, 求 $\triangle FPQ$ 的面积.



弦长问题

- 2 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 . 点 $P(a, b)$ 满足 $|PF_2| = |F_1F_2|$.
- (1) 求椭圆的离心率 e .
- (2) 设直线 PF_2 与椭圆相交于 A, B 两点, 若直线 PF_2 与圆 $(x+1)^2 + (y-\sqrt{3})^2 = 16$ 相交于 M, N 两点, 且 $|MN| = \frac{5}{8}|AB|$, 求椭圆的方程.



- 3 已知椭圆 $M: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$, 焦距为 $2\sqrt{2}$, 斜率为 k 的直线 l 与椭圆 M 有两个不同的交点 A, B .
- (1) 求椭圆 M 的方程.
- (2) 若 $k = 1$, 求 $|AB|$ 的最大值.



面积问题

- 4 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的一个顶点为 $A(2, 0)$, 离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 直线 $y = k(x - 1)$ 与椭圆 C 交于不同的两点 M, N .
- (1) 求椭圆 C 的方程.
- (2) 当 $\triangle AMN$ 的面积为 $\frac{\sqrt{10}}{3}$ 时, 求 k 的值.



- 5 已知点 A, B 的坐标分别为 $(-2, 0), (2, 0)$, 三角形 ABM 的两条边 AM, BM 所在直线的斜率之积为 $-\frac{3}{4}$.
- (1) 求点 M 的轨迹方程.
- (2) 设直线 AM 方程为 $x = my - 2 (m \neq 0)$, 直线 l 方程为 $x = 2$, 直线 AM 交 l 于 P , 点 P, Q 关于 x 轴对称, 直线 MQ 与 x 轴相交于点 D . 若 $\triangle APD$ 面积为 $2\sqrt{6}$, 求 m 的值.



面积最值问题

- 6 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$, 过右焦点 F 的直线 l 与 C 相交于 A, B 两点, 当 l 的斜率为 1 时, 坐标原点 O 到 l 的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
- (1) 求椭圆 C 的方程.
- (2) 若 P, Q, M, N 椭圆 C 上四点, 已知 $\overrightarrow{PF}$ 与 $\overrightarrow{FQ}$ 共线, $\overrightarrow{MF}$ 与 $\overrightarrow{FN}$ 共线, 且 $\overrightarrow{PF} \cdot \overrightarrow{MF} = 0$, 求四边形 $PMQN$ 面积的最小值.



- 7 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 点 A 为椭圆的右顶点, 点 B 为椭圆的上顶点, 点 F 为椭圆的左焦点, 且 $\triangle FAB$ 的面积是 $1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) 设直线 $x = my + 1$ 与椭圆 C 交于 P, Q 两点, 点 P 关于 x 轴的对称点为 P_1 (P_1 与 Q 不重合), 则直线 P_1Q 与 x 轴交于点 H , 求 $\triangle PQH$ 面积的取值范围.

- 8 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$, 两焦点与短轴的一个端点的连线构成的三角形面积为 $\sqrt{2}$.

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) 设与圆 $O: x^2 + y^2 = \frac{3}{4}$ 相切的直线 l 交椭圆 C 于 A, B 两点 (O 为坐标原点), 求 $\triangle AOB$ 面积的最大值.

第 2 讲

直线与椭圆的位置关系 2





中点弦、垂直平分问题

1 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 短轴长为 2.

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) 若圆心为 O 的圆 $x^2 + y^2 = 1$ 的切线 l 与椭圆 C 相交于 A, B 两点, 线段 AB 的中点为 M , 求 $|OM|$ 得最大值.

2 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率 $e = \frac{1}{2}$, 直线 $x + y - \sqrt{6} = 0$ 与圆 $x^2 + y^2 = b^2$ 相切.

(1) 求椭圆的方程.

(2) 过点 $N(4, 0)$ 的直线 l 与椭圆交于不同两点, 线段 A, B 的中垂线为 l' , 若 l' 在 y 轴上的截距为 $\frac{4}{13}$, 求直线 l 的方程.



- 3 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的一个焦点在直线 $l: x - 1 = 0$ 上, 且离心率 $e = \frac{1}{2}$.
- (1) 求该椭圆的方程.
- (2) 若 P 与 Q 是该椭圆上不同的两点, 且线段 PQ 的中点 T 在直线 l 上, 试证: x 轴上存在定点 R , 对于所有满足条件的 P 与 Q , 恒有 $|RP| = |RQ|$.
- (3) 在 (2) 的条件下, $\triangle PQR$ 能否为等腰直角三角形? 并证明你的结论.



等比分线问题

- 4 已知点 F 是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点, 过点 F 的直线 l 交椭圆于 M, N 两点, 当直线 l 过 C 的下顶点时, l 的斜率为 $\sqrt{3}$. 当直线 l 垂直于 C 的长轴时, $\triangle OMN$ 的面积为 $\frac{3}{2}$,
- (1) 求椭圆 C 的标准方程.
- (2) 当 $|MF| = 2|FN|$ 时, 求直线 l 的方程.



- 5 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右顶点分别为 A_1, A_2 , 上、下顶点分别为 B_1, B_2 , F 为其右焦点, $\overrightarrow{B_1A_1} \cdot \overrightarrow{B_1F} = 1$, 且该椭圆的离心率为 $\frac{1}{2}$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程.

(2) 过点 A_1 作斜率为 k 的直线 l 交椭圆 C 于 x 轴上方的点 P . 交直线 $x = 4$ 于点 D , 直线 A_2D 与椭圆 C 的另一个交点为 G , 直线 OG 与直线 A_1D 交于点 H . 若 $\overrightarrow{A_1P} = \lambda \overrightarrow{A_1H}$. 求 λ 取值范围.



定值定点问题

- 6 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 四点 $P_1(1, 1)$, $P_2(0, 1)$, $P_3(-1, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $P_4(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 中恰有三点在椭圆 C 上.

(1) 求 C 的方程.

(2) 设直线 l 不经过 P_2 点且与 C 相交于 A, B 两点. 若直线 P_2A 与直线 P_2B 的斜率的和为 -1 , 证明: l 过定点.



- 7 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$, 以原点为圆心, 椭圆的短半轴长为半径的圆与直线 $y = x + \sqrt{6}$ 相切.

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) 若 A, B 为椭圆 C 上关于 x 轴对称的任意两点, P 点坐标为 $(4, 0)$, 连接 PB 交椭圆 C 于另一点 D , 求证: 直线 AD 恒过 x 轴上的定点.



综合问题

- 8 已知中心在坐标原点 O , 焦点在 x 轴上, 离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 椭圆过点 $\left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

(1) 求椭圆的方程.

(2) 设不过原点 O 的直线 l 与该椭圆交于 P, Q 两点, 满足直线 OP, PQ, OQ 的斜率依次成等比数列, 若 $\triangle OPQ$ 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 求直线 l 与 y 轴交点的坐标.

