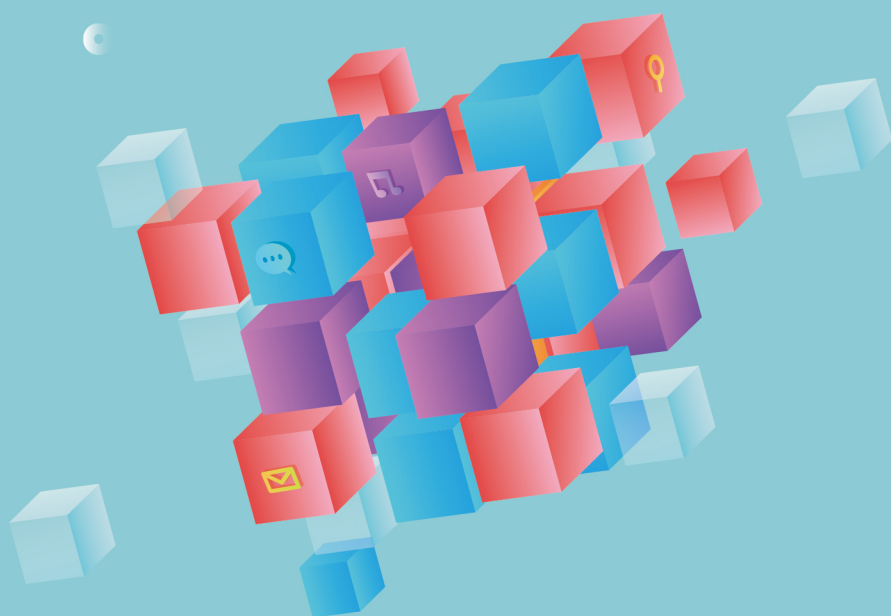


知识魔方

i 数学



总 主 编：马建明

本模块主编：闫聪聪

教 研 团 队：闫聪聪 蔡磊

吕金琳

封面设计：刘雅迪

前言

学而思一对一产品升级介绍

为进一步打造本地化产品，助力学生高考，学而思 1 对 1 产品团队打造了模块课系列产品，该产品旨在将高中阶段所有的知识点全部打散，再针对每一个学生的具体情况重新组合，制定个性化的学习方案，帮助学生进步。

随着模块课 1.0 版本的推进，无论是课程选择，还是内容学习上，学生有更多可以选择的空间，切实满足不同学生的个性化需求。本着“随需而变，才有未来”的精神，我们又推出了 2.0 版本《知识魔方·i 系列》，此系列涵盖《知识魔方·i 数学》、《知识魔方·i 物理》、《知识魔方·i 化学》、《知识魔方·i 生物》、《知识魔方·i 历史》多种学科，结合学科共性，统一产品逻辑，与此同时，兼顾到学科特色，创新学习形式，激发学生学习兴趣，做学习的主人。

本产品在设计上有三个突出的**特点**：

- (1) 模块产品，私人订制效果棒
- (2) 本地优化，海量资源覆盖广
- (3) 知识解构，新旧旧识尽入囊



扫描二维码，关注公众号，获取更多学习资料

高中数学课程产品设计

考点分析：以大数据方式分析考试重点难点，紧扣考试热点，让同学们的复习更具针对性。

知识导图：梳理知识结构，帮助同学们形成网络状的知识图谱，更有助于对知识点的理解记忆。

典型例题：分析考试情况，精选最新的考题，让同学们清楚每一个知识点的考法。

巩固练习：匹配同类型题目，讲练结合，锻炼提升解题能力。

本模块介绍

本模块是高三阶段学习的重难点，也是高考考查的重点，平面向量部分在高考中一般以选择填空的形式出现，难度比较大，通常考察综合类问题。

本模块包含 3 讲内容，主要围绕平面向量部分展开，首先注重对于平面向量运算、坐标表示、数量积运算等基础知识点的梳理，其次，是对于重要题型的全面归纳和相应解题思路的总结。帮助学生们基础重要知识点的掌握，以及各类题型的解题思路及方法的提升。

目 录

第 1 讲 平面向量定义与线性运算.....	01
第 2 讲 平面向量数量积运算.....	05
第 3 讲 平面向量综合.....	09



我们一起开始学习吧 o (*^_^*) o



第 1 讲

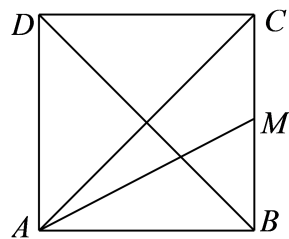
平面向量定义与线性运算





平面向量的概念与运算

- 1 在 $\triangle ABC$ 中, M 是 BC 的中点. 若 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, 则 $\overrightarrow{AM} = ()$.
 A. $\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$ B. $\frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})$ C. $\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$ D. $\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$
- 2 在 $\triangle ABC$ 中, D 在 AB 上, $AD:DB = 1:2$, E 为 AC 中点, CD 、 BE 相交于点 P , 连结 AP . 设 $\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ ($x, y \in \mathbf{R}$), 则 x, y 的值分别为 ().
 A. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ C. $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}$ D. $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}$
- 3 如图, 正方形 $ABCD$ 中, M 是 BC 的中点, 若 $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AM} + \mu\overrightarrow{BD}$, 则 $\lambda + \mu = ()$.



- A. $\frac{4}{3}$ B. $\frac{5}{3}$ C. $\frac{15}{8}$ D. 2
- 4 在 $\triangle ABC$ 中, $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{NC}$, P 是 BN 上的一点, 若 $\overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{AB} + \frac{2}{9}\overrightarrow{AC}$, 则实数 m 的值为 ().
 A. $\frac{1}{9}$ B. $\frac{1}{3}$ C. 1 D. 3
- 5 已知 $A(-3, 0)$, $B(0, 2)$, O 为坐标原点, 点 C 在 $\angle AOB$ 内, 且 $\angle AOC = 45^\circ$, 设 $\overrightarrow{OC} = \lambda\overrightarrow{OA} + (1 - \lambda)\overrightarrow{OB}$ ($\lambda \in \mathbf{R}$) 则 $\lambda = ()$.
 A. $\frac{2}{5}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{5}$ D. $\frac{2}{3}$
- 6 在 $\triangle ABC$ 中, $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, 若点 D 满足 $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$, 则 $\overrightarrow{AD}$ 等于 ().
 A. $\frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$ B. $\frac{1}{3}\vec{c} - \frac{2}{3}\vec{b}$ C. $\frac{1}{3}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{c}$ D. $\frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}$
- 7 在 $\triangle ABC$ 中, 已知点 D 在边 AB 上, 若 $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{CB}$, 则 $\frac{|\overrightarrow{AD}|}{|\overrightarrow{BD}|} = ()$.
 A. 2 B. 3 C. 4 D. 5
- 8 已知点 D 在 $\triangle ABC$ 的边 BC 上, 若面积 $S_{\triangle ABD} = 3S_{\triangle ACD}$, 则 $\overrightarrow{AD}$ 可表示为 ().
 A. $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$ B. $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$
 C. $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ D. $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

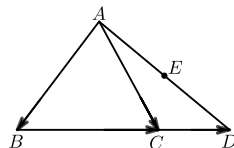


9 已知非零向量 $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ 不共线, 且 $\vec{BM} = \frac{1}{3}\vec{BA}$, 则向量 $\vec{OM} = ()$.

- A. $\frac{1}{3}\vec{OA} + \frac{2}{3}\vec{OB}$ B. $\frac{2}{3}\vec{OA} + \frac{1}{3}\vec{OB}$ C. $\frac{1}{3}\vec{OA} - \frac{2}{3}\vec{OB}$ D. $\frac{1}{3}\vec{OA} - \frac{4}{3}\vec{OB}$

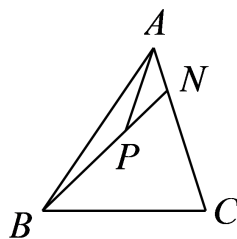
10 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 D 是 BC 延长线上一点, 点 E 为线段 AD 的中点, 若 $\vec{BC} = 2\vec{CD}$, 且

$$\vec{AE} = \lambda \vec{AB} + \frac{3}{4}\vec{AC}, \text{ 则 } \lambda = ().$$



- A. $-\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $-\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{4}$

11 在 $\triangle ABC$ 中, $\vec{AN} = \frac{1}{3}\vec{NC}$, P 是 BN 上的一点, 若 $\vec{AP} = m\vec{AB} + \frac{2}{11}\vec{AC}$, 则实数 m 的值为 ().



- A. $\frac{9}{11}$ B. $\frac{5}{11}$ C. $\frac{2}{11}$ D. $\frac{3}{11}$



坐标运算

12 若向量 $\vec{a} = (3, -4)$, 则与 $\vec{a}$ 平行的单位向量是 _____.

13 已知向量 $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{a} - \vec{b} = (4, 5)$, $\vec{c} = (x, 3)$, 若 $(2\vec{a} + \vec{b}) \parallel \vec{c}$, 则 $x = ()$.

- A. -1 B. -2 C. -3 D. 4

14 已知点 $A(-1, 1)$, 点 $B(2, y)$, 向量 $\vec{a} = (1, 2)$, 若 $\vec{AB} \parallel \vec{a}$, 则实数 y 的值为 ().

- A. 5 B. 6 C. 7 D. 8

15 已知向量 $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{b} = (2, -2)$, $\vec{c} = (1, \lambda)$. 若 $\vec{c} \parallel (2\vec{a} + \vec{b})$, 则 $\lambda =$ _____.

16 在 $\triangle ABC$ 中, 点 P 在 BC 上, 且 $\vec{BP} = 2\vec{PC}$, 点 Q 是 AC 的中点, 若 $\vec{PA} = (4, 3)$, $\vec{PQ} = (1, 5)$, 则 $\vec{BC} = ()$.

- A. $(-2, 7)$ B. $(-6, 21)$ C. $(2, -7)$ D. $(6, -21)$

17 设 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, $\vec{a} = (\sin 2\theta, \cos \theta)$, $\vec{b} = (\cos \theta, 1)$, 若 $\vec{a} \parallel \vec{b}$, 则 $\tan \theta = ()$.

- A. $\frac{1}{2}$ B. 2 C. 1 D. 0

第 2 讲

平面向量数量积运算





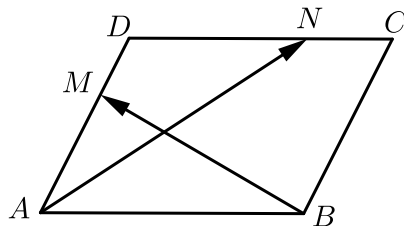
平面向量数量积运算

- 已知向量 $\vec{a} = (x-1, 2)$, $\vec{b} = (2, 1)$, 则 $\vec{a} \perp \vec{b}$ 的充要条件是 ().
A. $x = -\frac{1}{2}$ B. $x = -1$ C. $x = 5$ D. $x = 0$
- 已知平面向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 满足 $\vec{a} = (1, -2)$, $\vec{b} = (-3, t)$ 且 $\vec{a} \perp (\vec{a} + \vec{b})$, 则 $|\vec{b}| =$ ____.
- 设 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 均为单位向量, 则 “ $|\vec{a} - 3\vec{b}| = |3\vec{a} + \vec{b}|$ ” 是 “ $\vec{a} \perp \vec{b}$ ” 的 ().
A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件
- 已知向量 $\vec{a} = (2, 1)$, $\vec{b} = (m, -1)$, 且 $\vec{b} \perp (2\vec{a} - \vec{b})$, 则 m 的值为 ().
A. 1 B. 3 C. 1 或 3 D. 4
- 已知向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 满足 $(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (a - b) = -6$, 且 $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 ____.
- 若 $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 2$, $\vec{a} \perp (\vec{a} - \vec{b})$, 则向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 ().
A. $\frac{\pi}{2}$ B. $\frac{\pi}{6}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{6}$
- 在 $\triangle ABC$ 中, D 为 BC 的中点, $AB = 2$, $AC = \sqrt{7}$, 则 $\vec{AD} \cdot \vec{BC} =$ ().
A. $\frac{3}{2}$ B. $-\frac{3}{2}$ C. 3 D. -3
- 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 2, E 为 CD 的中点, 则 $\vec{AE} \cdot \vec{BD} =$ ____.



常见综合问题

- 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, $\angle BAD = \frac{\pi}{3}$, $AB = 2$, $AD = 1$, 若 M , N 分别是边 AD , CD 上的点, 且满足 $\frac{MD}{AD} = \frac{NC}{DC} = \lambda$, 其中 $\lambda \in [0, 1]$, 则 $\vec{AN} \cdot \vec{BM}$ 取值范围是 ____.

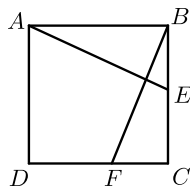


- 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $AB = 4$, $AC = 6$, $\angle BAC = 60^\circ$, 点 D , E 分别在边 AB , AC 上, 且 $\vec{AB} = 2\vec{AD}$, $\vec{AC} = 3\vec{AE}$, 点 F 为 DE 中点, 则 $\vec{BF} \cdot \vec{DE}$ 的值为 ().
A. 2 B. 3 C. 4 D. 5



- 11 在边长为 2 的正方形 $ABCD$ 中, 动点 M 和 N 分别在边 BC 和 CD 上, 且 $\overrightarrow{BM} = \lambda \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DN} = (2\lambda - 1)\overrightarrow{DC}$, 若 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BN} = 1$, 则实数 $\lambda =$ _____.

- 12 如图, 正方形 $ABCD$ 的边长为 2, E 为 BC 的中点, $\overrightarrow{DF} = 2\overrightarrow{FC}$, 则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BF}$ 的值为 ().

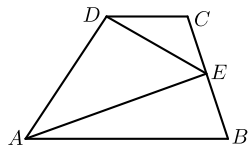


- A. $\frac{2}{3}$ B. $-\frac{2}{3}$ C. $\frac{4}{3}$ D. $-\frac{4}{3}$

- 13 已知菱形 $ABCD$ 的边长为 2, $\angle BAD = 120^\circ$, 点 E, F 分别在边 BC, CD 上 $BC = 3BE$, $CD = \lambda DF$, 若 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} = 1$, 则 λ 的值为 _____; 若 G 为线段 DC 上的动点, 则 $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AE}$ 的最大值为 _____.

- 14 已知菱形 $ABCD$ 的边长为 2, $\angle ABC = 60^\circ$, 点 E, F 分别在边 AD, DC 上, $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD})$, $\overrightarrow{DF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$, 则 $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BF} =$ _____.

- 15 如图梯形 $ABCD$, $AB \parallel CD$ 且 $AB = 5$, $AD = 2DC = 4$, E 在线段 BC 上, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$, 则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DE}$ 的最小值为 ().



- A. $\frac{15}{13}$ B. $\frac{95}{13}$ C. 15 D. $-\frac{15}{13}$

- 16 在 $\triangle ABC$ 中, 点 M 满足 $\overrightarrow{MB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$, 且对于边 AB 上任意一点 N , 恒有 $\overrightarrow{NB} \cdot \overrightarrow{NC} \geq \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC}$. 则 $(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) \cdot \overrightarrow{AB} =$ _____.

- 17 在等腰梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $\angle BAD = 60^\circ$, $AB = 8$, $CD = 4$. 若 M 为线段 BC 的中点, E 为线段 CD 上一点, 且 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AE} = 27$, 则 $\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{DE} =$ ().

- A. 15 B. 10 C. $\frac{20}{3}$ D. 5

- 18 在菱形 $ABCD$ 中, $\angle BAD = \frac{2\pi}{3}$, $AB = 2$, 点 M, N 分别为 BC, CD 边上的点, 且满足 $\frac{|\overrightarrow{BM}|}{|\overrightarrow{BC}|} = \frac{|\overrightarrow{CN}|}{|\overrightarrow{CD}|}$, 则 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN}$ 的最小值为 _____.

- 19 在梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $AB = 4$, $CD = 2$, $AD = 3$, $2\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{MC}$, 若 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BD} = 3$, 则 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC}$ 的值为 _____.

第 3 讲

平面向量综合





三角形四心

- 1 已知点 O 为 $\triangle ABC$ 内一点, 且满足 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 4\overrightarrow{OC} = \vec{0}$, 设 $\triangle OBC$ 与 $\triangle ABC$ 的面积分别为 S_1 、 S_2 , 则 $\frac{S_1}{S_2} = (\quad)$.
- A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{1}{6}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{2}$
- 2 点 G 为 $\triangle ABC$ 的重心, 过点 G 的直线与射线 AB , AC 分别交于点 M , N , 且满足 $\overrightarrow{AM} = m\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN} = n\overrightarrow{AC}$ ($m > 0, n > 0$), 则 $m + n$ 的最小值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
- 3 已知 A, B, C 三点不在同一条直线上, O 是平面 ABC 内一定点, P 是 $\triangle ABC$ 内的一动点, 若 $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = \lambda \left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \right)$, $\lambda \in [0, +\infty)$, 则直线 AP 一定过 $\triangle ABC$ 的 $(\quad)$.
- A. 重心 B. 垂心 C. 外心 D. 内心
- 4 $\triangle ABC$ 的外接圆圆心为 O , 若 $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, 则 H 是 $\triangle ABC$ 的 $(\quad)$.
- A. 外心 B. 内心 C. 重心 D. 垂心
- 5 已知点 O 是 $\triangle ABC$ 所在平面内一点, 且 $|\overrightarrow{OC}|^2 + |\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2 = |\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2$, 则点 O 是 $\triangle ABC$ 的 $(\quad)$.
- A. 垂心 B. 外心 C. 内心 D. 重心



等和线

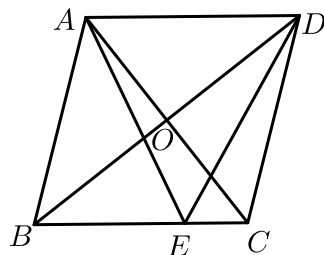
- 6 在平行四边形 $ABCD$ 中, E, F 分别为 BC, CD 的中点, 若 $\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{AE} + y\overrightarrow{AF}$ ($x, y \in \mathbf{R}$), 则 $x + y = (\quad)$.
- A. 2 B. 1 C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{2}{3}$
- 7 在平行四边形 $ABCD$ 中, 点 E 满足 $\overrightarrow{DE} = -2\overrightarrow{CE}$, 且 O 是边 AB 中点, 若 AE 交 DO 于点 M . 且 $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AD}$, 则 $\lambda + \mu = (\quad)$.
- A. $\frac{3}{2}$ B. $\frac{5}{7}$ C. $\frac{5}{3}$ D. $\frac{3}{4}$
- 8 在平行四边形 $ABCD$ 中, $\overrightarrow{BE} = -3\overrightarrow{ED}$, $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, 若 $\overrightarrow{EF} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AD}$ ($\lambda, \mu \in \mathbf{R}$), 则 $\lambda + \mu = \underline{\hspace{2cm}}$.



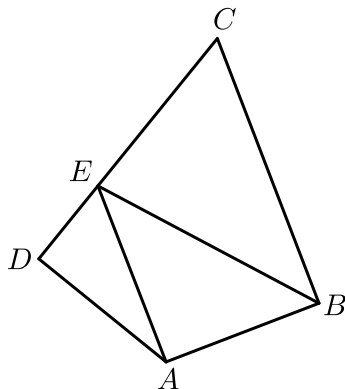
常见高考题型

- 9 在梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $\angle DAB = 90^\circ$, $AB = 2$, $CD = AD = 1$, 若点 M 在线段 BD 上, 则 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CM}$ 的最小值为 ().
- A. $\frac{3}{5}$ B. $-\frac{9}{20}$ C. $-\frac{3}{5}$ D. $\frac{9}{20}$

- 10 如图, 菱形 $ABCD$ 的边长为 3, 对角线 AC 与 BD 相交于 O 点, $|\overrightarrow{AC}| = 2\sqrt{3}$, E 为 BC 边 (包括端点) 上一点, 则 $|\overrightarrow{EA}|$ 的取值范围是 _____, $\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{ED}$ 的最小值为 _____.



- 11 如图, 在平面四边形 $ABCD$ 中, $AB \perp BC$, $AD \perp CD$, $\angle BAD = 120^\circ$, $AB = AD = 1$, 若点 E 为边 CD 上的动点, 则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BE}$ 的最小值为 ().



- A. $\frac{21}{16}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{25}{16}$ D. 3
- 12 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形, $\angle A = 90^\circ$, $BC = \sqrt{2}$, 点 D 满足 $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AC}$, 点 E 是 BD 所在直线上一点. 如果 $\overrightarrow{CE} = x\overrightarrow{CA} + y\overrightarrow{CB}$, 则 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 的最小值 _____.
- 13 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4$, $|\overrightarrow{BC}| = 3$, M, N 分别是 BC 边上的三等分点, 则 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN}$ 的值是 ().
- A. 5 B. $\frac{21}{4}$ C. 6 D. 8

