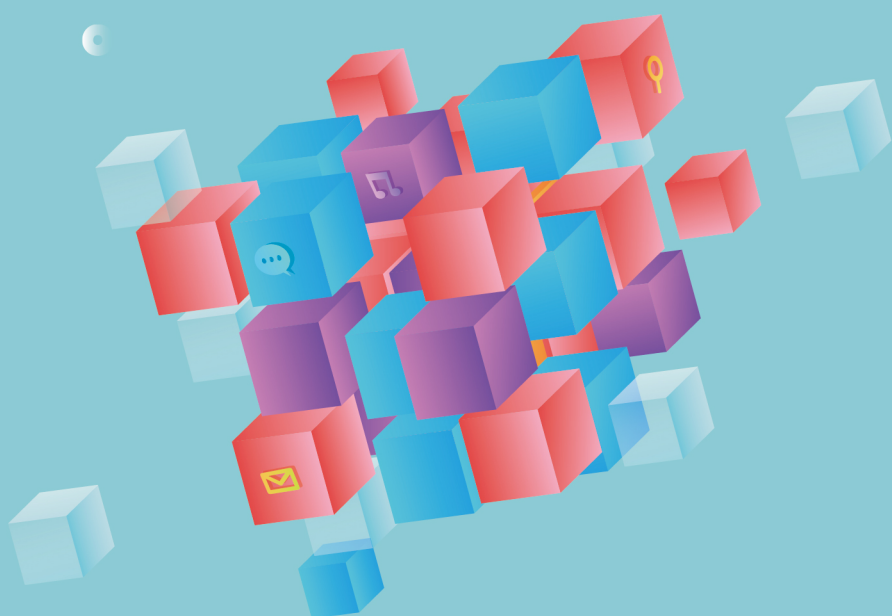


知识魔方

i 数学



总 主 编：马建明

本模块主编：闫聪聪

教 研 团 队：闫聪聪 蔡磊

吕金琳

封面设计：刘雅迪

前言

学而思一对一产品升级介绍

为进一步打造本地化产品，助力学生高考，学而思 1 对 1 产品团队打造了模块课系列产品，该产品旨在将高中阶段所有的知识点全部打散，再针对每一个学生的具体情况重新组合，制定个性化的学习方案，帮助学生进步。

随着模块课 1.0 版本的推进，无论是课程选择，还是内容学习上，学生有更多可以选择的空间，切实满足不同学生的个性化需求。本着“随需而变，才有未来”的精神，我们又推出了 2.0 版本《知识魔方·i 系列》，此系列涵盖《知识魔方·i 数学》、《知识魔方·i 物理》、《知识魔方·i 化学》、《知识魔方·i 生物》、《知识魔方·i 历史》多种学科，结合学科共性，统一产品逻辑，与此同时，兼顾到学科特色，创新学习形式，激发学生学习兴趣，做学习的主人。

本产品在设计上有三个突出的**特点**：

- (1) 模块产品，私人订制效果棒
- (2) 本地优化，海量资源覆盖广
- (3) 知识解构，新旧旧识尽入囊



扫描二维码，关注公众号，获取更多学习资料

高中数学课程产品设计

考点分析：以大数据方式分析考试重点难点，紧扣考试热点，让同学们的复习更具针对性。

知识导图：梳理知识结构，帮助同学们形成网络状的知识图谱，更有助于对知识点的理解记忆。

典型例题：分析考试情况，精选最新的考题，让同学们清楚每一个知识点的考法。

巩固练习：匹配同类型题目，讲练结合，锻炼提升解题能力。

本模块介绍

导数是高考中的重难点，一般以解答题压轴题的形式出现，难度比较大，分值占比大约10%。

本模块主要涉及导数的计算以及切线方程的求法等基础部分，利用导数解决函数的单调性、极值和最值等应用部分，以及利用导数构造函数证明不等式等综合应用部分的内容，紧密贴合天津对于导数的考察情况，难度较大。

目 录

第 1 讲 导数基础..... 01

第 2 讲 导数的分类讨论.....05

第 3 讲 零点问题与隐零点问题.....09



我们一起开始学习吧 o (*^_^*) o



第 1 讲

恒成立问题与能成立问题





恒成立问题

- 1 设函数 $f(x) = x^3 + ax^2 - a^2x + m$, 若对任意的 $a \in [3, 6]$, 不等式 $f(x) \leq 1$ 在 $x \in [-2, 2]$ 上恒成立, 求 m 的取值范围.
- 2 设函数 $f(x) = x^2 - 1$, 对任意 $x \in [\frac{3}{2}, +\infty)$, $f\left(\frac{x}{m}\right) - 4m^2f(x) \leq f(x-1) + 4f(m)$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.
- 3 已知函数 $f(x) = x + \frac{a}{x} + (a-1)\ln x$, 其中实数 $a < 0$.
- (1) 若 $a = -2$, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程.
- (2) 求函数 $f(x)$ 的单调区间.
- (3) 设函数 $g(x) = \frac{a}{x}$, 若对于任意 $x \in (1, e]$, 都有 $f(x) > g(x)$ 成立, 求实数 a 的取值范围.



- 4 已知函数 $f(x) = ax^2 - (a+2)x + \ln x$, 若对任意 $x_1, x_2 > 0, x_1 < x_2$, 且 $f(x_1) + 2x_1 < f(x_2) + 2x_2$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

- 5 已知函数 $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$, 如果对任意的 $x_1, x_2 \in [e^2, +\infty)$, 有 $|f(x_1) - f(x_2)| \geq k \left| \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right|$, 求实数 k 的取值范围.



能成立问题

6 设函数 $f(x) = \frac{x}{\ln x} - ax$, $a \in \mathbf{R}$.

(1) 若函数 $f(x)$ 存在单调递增区间, 求 a 的取值范围.

(2) 若存在 $x \in [e, e^2]$, 使得不等式 $f(x) \leq \frac{1}{4}$ 成立, 求 a 的取值范围.

7 函数 $f(x) = \ln x - (k+1)x$ ($k \geq -1$).

(1) 若 $f(x)$ 无零点, 求 k 的取整数时的最小值.

(2) 若存在 $x \in [2e, 3e]$ 使得 $f(x) > 0$, 求实数 k 的取值范围.

第 2 讲

恒成立与能成立综合





恒成立与能成立综合

- 1 设函数 $f(x) = (x+1)^2 - \ln(x+1)^2 + 2$, 若对于任意的 $a \in (1, 2)$, 存在 $x_0 \in [1, 2]$, 使得不等式 $f(x_0) > a + \frac{9}{4a} + m$ 成立, 则实数 m 的取值范围是 _____.
- 2 已知函数 $f(x) = 2x^3 - 3ax^2$, $a \in \mathbf{R}$.
- (1) 若 $a = 2$, 求曲线 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线方程.
- (2) 对任意的 $x_1 \in [0, 2]$, 总存在 $x_2 \in [0, 1]$, 使得 $f(x_1) \geq f'(x_2)$ (其中 $f'(x)$ 为函数 $f(x)$ 的导数) 成立, 求实数 a 的取值范围.
- 3 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}ax^2 - (2a+1)x + 2\ln x (x \in \mathbf{R})$.
- (1) 若曲线 $y = f(x)$ 在 $x = 1$ 和 $x = 3$ 处的切线互相平行, 求 a 的值.
- (2) 求 $f(x)$ 的单调区间.
- (3) 设 $g(x) = x^2 - 2x$, 若对任意 $x_1 \in (0, 2]$, 均存在 $x_2 \in (0, 2]$, 使得 $f(x_1) < g(x_2)$, 求 a 的取值范围.



4 设函数 $f(x) = \frac{1-a}{2}x^2 + ax - \ln x (a \in \mathbf{R})$.

(1) 当 $a = 1$ 时, 求函数 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线方程.

(2) 当 $a > 1$ 时, 讨论函数 $f(x)$ 的单调性.

(3) 若对任意 $a \in (3, 4)$ 及任意 $x_1, x_2 \in [1, 2]$, 恒有 $\frac{(a^2 - 1)}{2}m + \ln 2 > |f(x_1) - f(x_2)|$ 成立, 求实数 m 的取值范围.



值域问题

5 已知函数 $f(x) = x^2 - \frac{2}{3}ax^3 (a > 0), x \in \mathbf{R}$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间和极值.

(2) 若对于任意的 $x_1 \in (2, +\infty)$, 都存在 $x_2 \in (1, +\infty)$, 使得 $f(x_1) \cdot f(x_2) = 1$, 求 a 的取值范围.

第 3 讲

零点问题与隐零点问题





零点问题

- 1 已知函数 $f(x) = e^x - x$ (e 为自然对数的底数) .
- (1) 当 $x \in [0, 2]$ 时, 不等式 $f(x) > ax$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.
- (2) 设 $g(x) = f(x) - ax$, 当函数 $g(x)$ 有且只有一个零点时, 求 a 的取值范围.
- 2 已知函数 $f(x) = e^x - ax^2$.
- (1) 若 $a = 1$, 证明: 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \geq 1$.
- (2) 若 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上只有一个零点, 求 a 的值.



3 设函数 $f(x) = \ln(x-1) + ax^2 + x + 1$, $g(x) = (x-1)e^x + ax^2$, $a \in \mathbb{R}$.

(1) 当 $a = 1$ 时, 求函数 $f(x)$ 在点 $(2, f(2))$ 处的切线方程.

(2) 若函数 $g(x)$ 有两个零点, 试求 a 的取值范围.

(3) 证明 $f(x) \leq g(x)$.

4 设函数 $f(x) = (1+x)^2 - 2\ln(1+x)$.

(1) 若定义域内存在 x_0 , 使得不等式 $f(x_0) - m \leq 0$ 成立, 求实数 m 的最小值.

(2) $g(x) = f(x) - x^2 - x - a$ 在区间 $[0, 3]$ 上恰有两个不同的零点, 求实数 a 的取值范围.



隐零点问题

5 已知函数 $f(x) = xe^{-x} (x \in \mathbf{R})$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间和极值.

(2) 已知函数 $y = g(x)$ 的图象与函数 $y = f(x)$ 的图象关于直线 $x = 1$ 对称. 证明当 $x > 1$ 时, $f(x) > g(x)$.

(3) 如果 $x_1 \neq x_2$, 且 $f(x_1) = f(x_2)$, 证明 $x_1 + x_2 > 2$.

6 已知函数 $f(x) = e^{mx} + x^2 - mx (m \in \mathbf{R})$.

(1) 当 $m = 1$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调区间.

(2) 若 $m > 0$, 且曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线与直线 $x + (e + 1)y = 0$ 垂直.

① 当 $x > 0$ 时, 试比较 $f(x)$ 与 $f(-x)$ 的大小.

② 若对任意 $x_1, x_2 (x_1 \neq x_2)$, 且 $f(x_1) = f(x_2)$, 证明: $x_1 + x_2 < 0$.