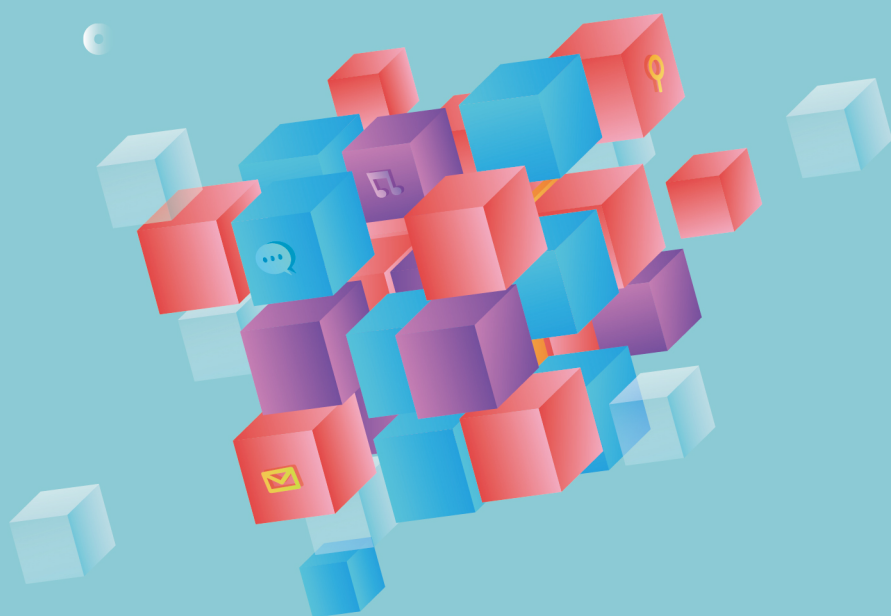


知识魔方

i 数学



总 主 编：马建明

本模块主编：闫聪聪

教 研 团 队：闫聪聪 蔡磊

吕金琳

封面设计：刘雅迪

前言

学而思一对一产品升级介绍

为进一步打造本地化产品，助力学生高考，学而思 1 对 1 产品团队打造了模块课系列产品，该产品旨在将高中阶段所有的知识点全部打散，再针对每一个学生的具体情况重新组合，制定个性化的学习方案，帮助学生进步。

随着模块课 1.0 版本的推进，无论是课程选择，还是内容学习上，学生有更多可以选择的空间，切实满足不同学生的个性化需求。本着“随需而变，才有未来”的精神，我们又推出了 2.0 版本《知识魔方·i 系列》，此系列涵盖《知识魔方·i 数学》、《知识魔方·i 物理》、《知识魔方·i 化学》、《知识魔方·i 生物》、《知识魔方·i 历史》多种学科，结合学科共性，统一产品逻辑，与此同时，兼顾到学科特色，创新学习形式，激发学生学习兴趣，做学习的主人。

本产品在设计上有三个突出的**特点**：

- (1) 模块产品，私人订制效果棒
- (2) 本地优化，海量资源覆盖广
- (3) 知识解构，新旧旧识尽入囊



扫描二维码，关注公众号，获取更多学习资料

高中数学课程产品设计

考点分析：以大数据方式分析考试重点难点，紧扣考试热点，让同学们的复习更具针对性。

知识导图：梳理知识结构，帮助同学们形成网络状的知识图谱，更有助于对知识点的理解记忆。

典型例题：分析考试情况，精选最新的考题，让同学们清楚每一个知识点的考法。

巩固练习：匹配同类型题目，讲练结合，锻炼提升解题能力。

本模块介绍

1、考试要点

本模块是高考的重要考点，三角函数部分在高考中一般以选择填空题的形式出现，难度稍大，解三角形部分通常在第一道大题的位置，非常重要。

2、课程内容

本模块包含 4 讲内容，其中三角恒等变换、三角函数图像与性质、以及解三角形是考试中的重要考点，三角函数图像与性质部分难度稍大，在高考中可能以选择或者填空题的拔高题的形式考查。

目 录

第 1 讲	三角函数定义与诱导公式.....	01
第 2 讲	三角恒等变换.....	05
第 3 讲	正弦型三角函数图像性质.....	09
第 4 讲	解三角形.....	13



我们一起开始学习吧 o (*^_^*) o



第 1 讲

三角函数定义与诱导公式





任意角与弧度制

- 1 已知圆心角为 60° 的扇形，其半径为 3，则该扇形的面积为 _____ .
- 2 已知扇形的周长为 8cm，圆心角为 2，则扇形的面积为 () .
A. 1 B. 2 C. 4 D. 5
- 3 扇形的圆心角与半径相等，面积为 4，这个扇形的圆心角等于 () .
A. $\sqrt[3]{4}$ B. 2 C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{2}$



三角函数定义

- 4 已知 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ，则 $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha$ 的值为 () .
A. $-\frac{1}{5}$ B. $-\frac{3}{5}$ C. $\frac{1}{5}$ D. $\frac{3}{5}$
- 5 已知 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{7}{5}$ ， $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ ，则 $\sin \theta - \cos \theta$ 的值为 _____ .



诱导公式

- 6 若 $\tan \theta = 3$ ，则 $2\sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta - \cos^2 \theta =$ _____ .
- 7 已知 $f(\alpha) = \frac{\sin(\alpha - \frac{\pi}{2}) \cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha) \tan(\pi + \alpha) \cos(\frac{\pi}{2} + \alpha)}{\sin(2\pi - \alpha) \tan(-\alpha - \pi) \sin(-\alpha - \pi)}$.
(1) 化简 $f(\alpha)$.
(2) 若 α 是第三象限角，且 $\cos(\alpha - \frac{3\pi}{2}) = \frac{1}{5}$ ，求 $f(\alpha)$.



和差角公式

- 8 $\cos 20^\circ \cos 50^\circ - \cos 110^\circ \sin 50^\circ = (\quad)$.
A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2}$
- 9 已知 $\alpha, \beta \in (0, \pi)$, 且 $\tan(\alpha - \beta) = \frac{1}{2}$, $\tan \beta = -\frac{1}{7}$, 则 $2\alpha - \beta = \underline{\hspace{2cm}}$.
- 10 已知 $\alpha, \beta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\sin \beta = -\frac{\sqrt{2}}{10}$, 则 $\cos(\alpha - \beta) = \underline{\hspace{2cm}}$.
- 11 已知 $\alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$, 且满足 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$, $\cos \beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, 则 $\alpha + \beta$ 的值为 $(\quad)$.
A. $\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{\pi}{2}$ C. $\frac{3\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{3\pi}{4}$
- 12 已知 $\tan(\alpha + \beta) = \frac{2}{5}$, $\tan(\beta - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{4}$, 则 $\tan(\alpha + \frac{\pi}{4})$ 的值等于 $(\quad)$.
A. $\frac{13}{18}$ B. $\frac{3}{22}$ C. $\frac{13}{22}$ D. $\frac{3}{18}$
- 13 已知 $\sin(\alpha + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos(\beta + \frac{3\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\alpha, \beta \in (\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$, 则 $\alpha + \beta = \underline{\hspace{2cm}}$.
- 14 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} < \beta < 0$, $\cos(\frac{\pi}{4} + \alpha) = \frac{1}{3}$, $\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 则 $\cos(\alpha + \frac{\beta}{2}) = (\quad)$.
A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{5\sqrt{3}}{9}$ D. $-\frac{\sqrt{6}}{9}$

第 2 讲

三角恒等变换





二倍角公式

- 1 若 $\sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) = \frac{1}{3}$, 则 $\cos\left(\frac{2\pi}{3} + 2\alpha\right) = \underline{\hspace{2cm}}$.
- 2 若 $\tan \theta = \frac{1}{3}$, 则 $\cos 2\theta = (\quad)$.
A. $-\frac{4}{5}$ B. $-\frac{1}{5}$ C. $\frac{1}{5}$ D. $\frac{4}{5}$
- 3 已知 $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\tan \alpha = \frac{1}{7}$, $\sin \beta = \frac{\sqrt{10}}{10}$, 则 $\alpha + 2\beta = \underline{\hspace{2cm}}$.
- 4 已知角 $\alpha, \beta \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, 若 $\tan \alpha = -\frac{1}{7}$, $\tan \beta = -\frac{1}{3}$, 则 $\alpha + 2\beta$ 的大小为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
- 5 已知 $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = -3\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$, 则 $\tan 2\alpha = (\quad)$.
A. $-4\sqrt{3}$ B. $-2\sqrt{3}$ C. $4\sqrt{3}$ D. $2\sqrt{3}$
- 6 已知 $\sin 2\alpha = \frac{2}{3}$, 则 $\cos^2\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = (\quad)$.
A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{2}{3}$
- 7 已知 $\sin\left(\frac{\pi}{5} - \alpha\right) = \frac{1}{4}$, 则 $\cos\left(2\alpha + \frac{3\pi}{5}\right) = (\quad)$.
A. $-\frac{7}{8}$ B. $\frac{7}{8}$ C. $\frac{1}{8}$ D. $-\frac{1}{8}$
- 8 函数 $y = \cos^2 x + 4 \sin x + 3$ 的值域 $\underline{\hspace{2cm}}$.



辅助角公式

- 9 $\sin 15^\circ + \cos 15^\circ$ 的值为 ().
A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{6}}{4}$ C. $\frac{\sqrt{6}}{2}$ D. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$
- 10 已知 $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 则 $\cos x + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = ()$.
A. -1 B. 1 C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ D. $\sqrt{3}$
- 11 已知函数 $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x$, 则 $f\left(\frac{\pi}{12}\right) = ()$.
A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. 1 D. $\sqrt{2}$
- 12 函数 $f(x) = (\sqrt{3}\sin x - \cos x) \cdot \cos x$ 的最大值为 ().
A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. 2 D. $\frac{3}{2}$
- 13 若 $3\cos\alpha - \sqrt{3}\sin\alpha = A\sin(\alpha + \varphi)$, 则 A, φ 的值分别为 ().
A. $2\sqrt{3}, -\frac{\pi}{3}$ B. $-2\sqrt{3}, \frac{\pi}{6}$ C. $2\sqrt{3}, \frac{2\pi}{3}$ D. $2\sqrt{3}, -\frac{\pi}{6}$
- 14 设当 $x = \theta$ 时, 函数 $f(x) = 2\sin x - \cos x$ 取得最大值, 则 $\cos\theta = ()$.
A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ B. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ C. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ D. $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

第 3 讲

正弦型三角函数图像性质





三角函数图像变换

- 1 将函数 $f(x) = \sin x$ 的图象上所有的点的横坐标和纵坐标同时扩大为原来的 3 倍, 再将图象向右平移 π 单位长度, 所得图象的函数解析式为 ().
- A. $y = 3 \sin(3x - \pi)$ B. $y = 3 \sin(3x - 3\pi)$
C. $y = 3 \sin\left(\frac{1}{3}x - \pi\right)$ D. $y = 3 \sin\left(\frac{1}{3}x - \frac{\pi}{3}\right)$
- 2 函数 $f(x) = \sin \omega x + \sqrt{3} \cos \omega x (\omega > 0)$ 的零点构成一个公差为 $\frac{\pi}{2}$ 的等差数列, 把函数 $f(x)$ 的图象沿 x 轴向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位, 得到函数 $g(x)$ 的图象. 关于函数 $g(x)$, 下列说法正确的是 ().
- A. 在 $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上是增函数 B. 其图象关于直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称
C. 函数 $g(x)$ 是偶函数 D. 在区间 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right]$ 上的值域为 $[-\sqrt{3}, 2]$
- 3 将函数 $y = \sin 2x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位, 所得图象的函数解析式为 ().
- A. $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ B. $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ C. $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ D. $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$
- 4 将偶函数 $f(x) = \sin(3x + \varphi) (0 < \varphi < \pi)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度后, 得到的曲线的对称轴为 ().
- A. $x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}$ B. $x = \frac{k\pi}{3} - \frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}$
C. $x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{12}, k \in \mathbf{Z}$ D. $x = \frac{k\pi}{3} - \frac{\pi}{12}, k \in \mathbf{Z}$
- 5 函数 $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - 2\sqrt{2}\sin^2 x$, 则 $f(x)$ 在 ().
- A. 在区间 $\left[-\frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right]$ 上单调递增 B. 在区间 $\left[\frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}\right]$ 上单调递增
C. 在区间 $\left[-\frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right]$ 上单调递减 D. 在区间 $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ 上单调递减
- 6 将函数 $f(x) = \sin 2x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度后得到函数 $g(x)$ 的图象, 则 $g(x)$ 具有的性质是 ().
- A. 图象关于直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称且最大值为 1 B. 图象关于点 $\left(-\frac{3\pi}{8}, 0\right)$ 对称且周期为 π
C. 在区间 $\left(-\frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right)$ 上单调递增且为偶函数 D. 在区间 $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ 上单调递增且为奇函数



7 关于函数 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ 有下述三个结论:

① $f(x)$ 的最小正周期是 2π ;

② $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减;

③ 将 $f(x)$ 图象上所有点向右平行移动 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度后, 得到函数 $g(x) = \sin 2x$ 的图象.

其中所有正确结论的编号是 ().

A. ②

B. ③

C. ②③

D. ①②③

8 已知函数 $f(x) = 2\sqrt{3}\cos\omega x \cos\left(\omega x + \frac{\pi}{2}\right) + 2\sin^2\omega x$ ($\omega > 0$) 的最小正周期为 π .

(1) 求 ω 的值和函数 $f(x)$ 的单调增区间.

(2) 求函数 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$ 上的取值范围.

9 以下关于函数 $f(x) = \sin 2x - \cos 2x$ 的命题, 正确的是 ().

A. 函数 $f(x)$ 在区间 $\left(0, \frac{2}{3}\pi\right)$ 上单调递增

B. 直线 $x = \frac{\pi}{8}$ 是函数 $y = f(x)$ 图象的一条对称轴

C. 点 $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$ 是函数 $y = f(x)$ 图象的一个对称中心

D. 将函数 $y = f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位, 可得到 $y = \sqrt{2}\sin 2x$ 的图象

10 已知函数 $f(x) = \cos\left(\omega x - \frac{\pi}{3}\right)$ ($\omega > 0$) 且 $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = f\left(\frac{5\pi}{6}\right)$, 若 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right)$ 上有最大值, 无最小值, 则 ω 的最大值为 ().

A. $\frac{4}{9}$

B. $\frac{28}{9}$

C. $\frac{52}{9}$

D. $\frac{100}{9}$

11 已知 $P\left(\frac{\pi}{12}, 1\right)$, $Q\left(\frac{5\pi}{12}, -1\right)$ 分别是函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 图象上相邻的最高点和最低点, 则 $\omega\varphi =$ _____.



- 12 已知函数 $f(x) = \cos^2 \frac{\omega x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \omega x - \frac{1}{2} (\omega > 0, x \in \mathbf{R})$, 若函数 $f(x)$ 在区间 $(\pi, 2\pi)$ 内没有零点, 则 ω 的取值范围是 ().

A. $\left(0, \frac{5}{12}\right]$

B. $\left(0, \frac{5}{6}\right)$

C. $\left(0, \frac{5}{12}\right] \cup \left[\frac{5}{6}, \frac{11}{12}\right]$

D. $\left(0, \frac{5}{12}\right] \cup \left(\frac{5}{6}, \frac{11}{12}\right]$

- 13 已知函数 $f(x) = 4 \cos \omega x \cdot \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{4}\right) (\omega > 0)$ 的最小正周期为 π , 则 ω 的值为 _____, $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的单增区间是 _____.

- 14 已知: 函数 $f(x) = 5 \sin x \cos x + 5\sqrt{3} \sin^2 x - \frac{5}{2} \sqrt{3} (x \in \mathbf{R})$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期.

(2) 求 $f(x)$ 的单调递增区间.

- 15 已知函数 $f(x) = 2 \sin x \cos x + 1 - 2 \sin^2 x, x \in \mathbf{R}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期.

(2) 讨论函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的单调性.

第 4 讲

解三角形





正弦定理

- 1 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = 30^\circ$, $\angle C = 45^\circ$, $c = 1$, 则 $b =$ _____; 三角形的外接圆半径 $R =$ _____.



余弦定理

- 2 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $a = 6$, $b = 7$, $\cos C = \frac{5}{7}$, 则最大内角的余弦值是 _____.
- 3 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , 若 $\sin C = 2 \sin A$, $b^2 - a^2 = \frac{1}{2}ac$, 则 $\sin B$ 等于 _____.



三角形面积问题

- 4 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 已知 $b \sin C + c \sin B = 4a \sin B \sin C$, $b^2 + c^2 - a^2 = 8$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为 _____.
- 5 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c 已知 $a = \sqrt{7}$, $b = 3$, $\sqrt{7} \sin B + \sin A = 2\sqrt{3}$.
- (1) 求角 A 的大小.
- (2) 求 $\triangle ABC$ 的面积.



综合问题

6 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , $b = 2\sqrt{7}$, $c = 2$, $B = \frac{\pi}{3}$.

(1) 求 a 的值.

(2) 求 $\sin A$.

(3) 求 $\sin(B + 2A)$ 的值.

7 在 $\triangle ABC$ 中, A, B, C 对应的边为 a, b, c , 已知 $a \cos C + \frac{1}{2}c = b$.

(1) 求角 A .

(2) 若 $b = 4$, $c = 6$, 求 $\cos B$ 和 $\cos(A + 2B)$ 的值.



8 已知函数 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + 2\sin^2 x$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期和单调递减区间.

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别是角 A, B, C 的对边, 若 $f\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{3}{2}$, $b + c = 7$, $\triangle ABC$ 的面积为 $2\sqrt{3}$, 求边 a 的值.

9 已知 a, b, c 分别为 $\triangle ABC$ 的三个内角 A, B, C 的对边, $a = 2$, 且 $(2 + b)(\sin A - \sin B) = (c - b)\sin C$, 则 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 _____.

10 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别是三个内角 A, B, C 的对边, 若 $b = 3, c = 4, C = 2B$, 且 $a \neq b$.

(1) 求 $\cos B$ 及 a 的值.

(2) 求 $\cos\left(2B + \frac{\pi}{3}\right)$ 的值.



- 11 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 已知 $a^2 + c^2 = b^2 + \frac{\sqrt{10}}{5}ac$.
- (1) 求 $\cos B$ 及 $\tan 2B$ 的值.
- (2) 若 $b = 3, A = \frac{\pi}{4}$. 求 c 的值.

- 12 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 已知 $2(\sin A \cos C + \cos A \sin C) = \sin A + \sin C$.
- (1) 求证: a, b, c 成等差数列.
- (2) 若 $c = 7, C = \frac{2\pi}{3}$, 求 b 和 $\sin 2B$ 的值.



13 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 满足 $\sqrt{3}a \cos B = b \sin A$.

(1) 求角 B 的大小.

(2) 若 $\cos A = \frac{\sqrt{2}}{3}$, 求 $\sin(2A + B)$ 的值.

(3) 若 $b = 2, c = 2a$, 求边 a 的值.

14 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 满足 $(2a - b) \sin A + (2b - a) \sin B = 2c \sin C$.

(1) 求角 C 的大小.

(2) 若 $\cos A = \frac{2\sqrt{7}}{7}$, 求 $\sin(2A - C)$ 的值.



15 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别为三个内角 A, B, C 的对边, 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, $a - b = 1$, $\sqrt{3}a \cos C - c \sin A = 0$.

(1) 求 c 及 $\cos A$.

(2) 求 $\cos(2A - C)$ 的值.

