

04基本不等式

1. 基本不等式的原型及三个基础公式

1. 算术平均数与几何平均数都是啥(◉_◉)?

对于给定的两个正数 a, b ——

我们把 $\frac{a+b}{2}$ 叫做正数 a, b 的**算术平均数**

把 $\sqrt{ab}$ 叫做正数 a, b 的**几何平均数** .

教法备注

【举例说明一下】

①对于正数4, 9来说, 算术平均数是 $\frac{13}{2}$, 几何平均数是6, 此时算术平均数大于几何平均数;

②对于正数3, 5来说, 算术平均数是4, 几何平均数是 $\sqrt{15}$, 此时算术平均数仍然大于几何平均数;

【其实可以适当扩展一下】

这个东西可以引一下未来学习的等差数列的等差中项和等比数列的等比中项

2. 原型

对于任意实数 a, b , $a^2 + b^2 \geq 2ab$, 当且仅当 $a = b$ 时, 等号成立 .

教法备注

证明: $a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2$,

当 $a \neq b$ 时, $(a - b)^2 > 0$;

当 $a = b$ 时, $(a - b)^2 = 0$.

$\therefore a^2 + b^2 \geq 2ab$, 当且仅当 $a = b$ 时, 等号成立 .

3.正数形式

如果 a, b 是正数, 那么 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, 当且仅当 $a = b$ 时, 有等号成立.

此结论又称**均值不等式**或**基本不等式**.

教法备注

证明: $\because a + b - 2\sqrt{ab} = (\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$, 即 $a + b \geq 2\sqrt{ab}$,

所以 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

4.负数形式

如果 a, b 都为负数时, $a + b \leq -2\sqrt{ab}$. 当且仅当 $a = b$ 时, 有等号成立.

教法备注

证明: $a + b = -[(-a) + (-b)] \leq -2\sqrt{ab}$.

5.常用乘积形式

$$ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

教法备注

证明: 同号的话直接由形式2、3平方可得;

异号的话就显然呀

6.均值不等式需要注意三个方面:

一正二定三相等

教法备注

【教师备注】

“**一正**”: 不等式中的各项必须都是正数, 在异号时不能运用均值不等式, 在同负时可以先进行转化, 再运用均值不等式;

“**二定**”: 求积 xy 最大值时, 应看和 $x+y$ 是否是定值; 求和 $x+y$ 最小值时, 看 xy 是否为定值.

“**三相等**”: 只有具备了均值不等式中等号成立的条件, 才能使代数式取到最大或最小值. 否则不能通过均值不等式求最值.

2. 扩展——对勾函数

教法备注

【教师备注】分式型不等式要用到

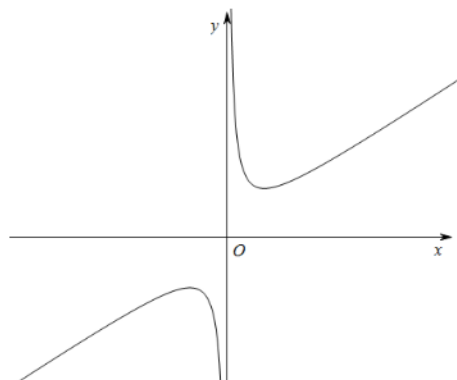
毕竟没讲过函数，可以重点介绍函数的**图像**

形如 $y = ax + \frac{b}{x} (a > 0, b > 0)$ (**对勾函数**) 模型

① $\{x | x \neq 0\}$

② $y \in (-\infty, -2\sqrt{ab}] \cup [2\sqrt{ab}, +\infty)$

③ 图像的变化趋势：在 $(-\infty, -\sqrt{\frac{b}{a}})$, $(\sqrt{\frac{b}{a}}, +\infty)$ 上单调递增；在 $(-\sqrt{\frac{b}{a}}, 0)$, $(0, \sqrt{\frac{b}{a}})$ 上单调递减



教法备注

【教师备注】不要说定义域和值域哈~

注意函数的拐点处值能否取到！！

1 看看下面的例子来理解下对勾函数叭！

(1) 求 $y = 3x + \frac{2}{x} (x > 0)$ 最小值

(2) 求 $y = 3x + \frac{2}{x} (x < 0)$ 最大值

(3) 求 $y = 4x + \frac{1}{x} (x \geq 5)$ 最小值

(4) 求 $y = \frac{x}{3} + \frac{4}{x} (x \leq -2)$ 最大值

(5) 求 $y = -3x - \frac{5}{x} (x > 0)$ 最大值

(6) 求 $y = -x - \frac{1}{7x} + 2 (x \geq 3)$ 最大值

答案

(1) $2\sqrt{6}$

(2) $-2\sqrt{6}$

(3) $\frac{101}{5}$

(4) $-\frac{4\sqrt{3}}{3}$

(5) $-2\sqrt{15}$

(6) $-\frac{22}{21}$

3. 一个参数的均值考查形式



直接套用基本不等式

教法备注

【教师备注】一个参数的问题相对比较容易，大多数都是直接使用基本不等式或者是分式型不等式，注意条件和换元就可以了

2

2019~2020学年9月天津南开区天津市第二十五中学高一上学期月考第11题4分

已知 $x > 0$ ，则 $x + \frac{4}{x}$ 的最小值为 _____ .

答案

4

解析

$\because x > 0$,

根据基本不等式 ,

$$x + \frac{4}{x} \geqslant 2\sqrt{x \cdot \frac{4}{x}} = 4 .$$

3

2020~2021学年10月天津河北区天津市第十四中学高一上学期月考第27题4分

若 $x > 0$, 则 $3 - 3x - \frac{1}{2x}$ 有最 _____ 值 , 且此最值是 _____ .

答案

1:大

2: $3 - \sqrt{6}$

解析

$\because x > 0$,

$$3x + \frac{1}{2x} \geqslant 2\sqrt{3x \cdot \frac{1}{2x}} = \sqrt{6} ,$$

当且仅当 $3x = \frac{1}{2x}$,

即 $x = \frac{\sqrt{6}}{6}$ 时等号成立 ,

$$\therefore -\left(3x + \frac{1}{2x}\right) \leqslant -\sqrt{6} ,$$

$$y = 3 - 3x - \frac{1}{2x} \leqslant 3 - \sqrt{6} .$$

故答案为：大； $3 - \sqrt{6}$.

4 设 $0 < x < 1$, 则函数 $y = x(1 - x)$ 的最大值是 _____ .

答案 $\frac{1}{4}$

解析 $x > 0, 1 - x > 0, y = x(1 - x) \leq \left(\frac{x + 1 - x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

包罗万象 举一千从

5 2019~2020学年10月天津南开区天津市南开中学高一上学期周测B卷第23题

“ $x + \frac{1}{x} > 2$ ”是“ $x > 1$ ”的 () .

A. 充要条件

B. 充分而不必要条件

C. 必要而不充分条件

D. 既不充分也不必要条件

答案 C

解析 根据对勾函数的图象可知 $x + \frac{1}{x} > 2 \Rightarrow x > 1$ 或 $0 < x < 1$, 充分性不成立 ;
而当 $x > 1$ 时 , 根据对勾函数的图象明显 $x + \frac{1}{x} > 2$, 必要性成立 ,
“ $x + \frac{1}{x} > 2$ ”是“ $x > 1$ ”的必要而不充分条件 .

配凑法（加减常数）

6 2019~2020学年10月天津南开区天津市南开中学高一上学期周测B卷第15题

若 $x > 2$ ，则 $x + \frac{1}{x-2}$ 的最小值为 _____ .

答案 4

解析 $\because x > 2$,

$$\therefore x - 2 > 0,$$

$$\therefore x + \frac{1}{x-2} = x - 2 + \frac{1}{x-2} + 2 \geq 2 + 2\sqrt{(x-2) \frac{1}{(x-2)}} = 4,$$

当且仅当 $x = 3$ 时取等号，

$$\therefore x + \frac{1}{x-2} \text{ 的最小值为 } 4,$$

故答案为：4 .

7 2019~2020学年11月天津和平区天津市第二十中学高一上学期月考第9题4分

若 $x > -3$ ，则函数 $f(x) = x + \frac{2}{x+3}$ 的最小值为 _____ .

答案 $2\sqrt{2} - 3$

解析 $\because x > -3$, $\therefore x + 3 > 0$,

$$\text{所以 } x + \frac{2}{x+3} = x + 3 + \frac{2}{x+3} - 3$$

$$\geq 2\sqrt{(x+3) \frac{2}{x+3}} - 3 = 2\sqrt{2} - 3,$$

当且仅当 $x + 3 = \frac{2}{x+3}$ ，即 $x = -3 + \sqrt{2}$ 时取等号 .

故答案为： $2\sqrt{2} - 3$.

8 2019~2020学年10月天津河西区天津市第四十二中学高一上学期月考第17题3分

函数 $f(x) = x + \frac{9}{2x-2} (x > 1)$ 的最小值是 _____ .

答案 $3\sqrt{2} + 1$.

解析 函数 $f(x) = x + \frac{9}{2x-2} = x - 1 + \frac{9}{2x-2} + 1, (x > 1),$

$\because x > 1,$

$\therefore x - 1 > 0, \frac{9}{2x-2} > 0,$

$\therefore x - 1 + \frac{9}{2x-2} + 1 \geq 2\sqrt{(x-1) \cdot \frac{9}{2x-2}} + 1 = 3\sqrt{2} + 1,$

当且仅当 $x = \frac{3\sqrt{2}}{2} + 1$ 时等号成立,

$\therefore$ 函数 $f(x) = x + \frac{9}{2x-2} (x > 1)$ 的最小值是 $3\sqrt{2} + 1$.

故答案为: $3\sqrt{2} + 1$.

9 已知 $x < \frac{3}{2}$, 则函数 $f(x) = 2x + \frac{4}{2x-3}$ 的值域是 _____ .

答案 $(-\infty, -1]$

10 $y = 3x^2 + \frac{16}{2+x^2}$ 的最小值为 ()

A. $8 - 2\sqrt{2}$

B. 8

C. $8\sqrt{3}$

D. $8\sqrt{3} - 6$

答案 D

解析 $y = 3x^2 + \frac{16}{2+x^2} = 3(2+x^2) + \frac{16}{2+x^2} - 6$

$\geq 2\sqrt{3(2+x^2) \cdot \frac{16}{2+x^2}} - 6 = 8\sqrt{3} - 6,$

$3(2+x^2) = \frac{16}{2+x^2}$ 即 $x^2 = \frac{4\sqrt{3}-6}{3}$ 取到.

豪厘不伐 将用斧柯

11 $y = 8x^2 + \frac{16}{2+x^2}$ 的最小值为 _____

答案 8

解析 $y = 8x^2 + \frac{16}{2+x^2} = 8(2+x^2) + \frac{16}{2+x^2} - 16$
 $\geq 2\sqrt{8(2+x^2) \cdot \frac{16}{2+x^2}} - 16 = 16\sqrt{2} - 16,$
 $8(2+x^2) = \frac{16}{2+x^2}$ 即 $x^2 = \sqrt{2} - 2$ 取到.

哎嘿取不到, 所以只能在 $x^2 = 0$ 时取到最小值, 结果是8

分式型——二次比一次

12 2019~2020学年天津河西区高一上学期期中第14题4分

已知 $t > 0$, 则函数 $f(t) = \frac{t^2 - 4t + 1}{t}$ 的最小值为 _____.

答案 -2

解析 $f(t) = \frac{t^2 - 4t + 1}{t}$
 $= t + \frac{1}{t} - 4$
 $\geq 2\sqrt{t \cdot \frac{1}{t}} - 4 = -2.$
 故答案为: -2.

13 2019~2020学年天津南开区天津市南开中学高一上学期期中第14题4分

已知 $x > 2$, 则 $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 5}{2x - 4}$ 的最小值为 _____.

答案 1

解析 $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 5}{2x - 4}$

$$= \frac{(x-2)^2 + 1}{2x-4}$$

$$= \frac{1}{2} \left(x-2 + \frac{1}{x-2} \right),$$

$$\because x > 2,$$

$$\therefore x-2 > 0$$

$$\therefore x-2 + \frac{1}{x-2} \geq 2\sqrt{(x-2) \cdot \frac{1}{x-2}} = 2 \text{ (当且仅当 } x=3 \text{ 时等号成立)}$$

$$\therefore f(x) \text{ 的最小值为 } 1.$$

故答案为：1 .

14 2016~2017学年北京东城区北京汇文中学高一下学期期末第14题3分

函数 $f(x) = \frac{-x^2 + x - 4}{x}$ ($x > 0$) 的最大值为 _____, 此时 x 的值为 _____.

答案 1: -3

2: 2

解析

$$f(x) = \frac{-x^2 + x - 4}{x} = -x - \frac{4}{x} + 1,$$

$$\text{当 } x > 0 \text{ 时, } x + \frac{4}{x} \geq 2\sqrt{4} = 4,$$

$$\text{所以 } f(x) \leq -4 + 1 = -3.$$

$$\text{当且仅当 } x = \frac{4}{x} \text{ 时, 即 } x = 2 \text{ 时, 取得最大值.}$$



分式型——一次比二次

15 若对任意 $x > 0$, $\frac{x}{x^2 + 3x + 1} \leq a$ 恒成立, 则 a 的取值范围是 _____.

答案

$$\left[\frac{1}{5}, +\infty\right)$$

解析

$$\because x > 0,$$

$$\therefore \frac{x}{x^2 + 3x + 1} = \frac{1}{x + 3 + \frac{1}{x}} \leq \frac{1}{2 + 3} = \frac{1}{5}.$$

$$\text{欲使 } \frac{x}{x^2 + 3x + 1} \leq a \text{ 恒成立,}$$

$$\text{只需 } a \geq \left(\frac{x}{x^2 + 3x + 1}\right)_{\max} = \frac{1}{5}.$$

$$\therefore a \text{ 的取值范围是 } \left[\frac{1}{5}, +\infty\right).$$



分式型——二次比二次

16 2019~2020学年10月天津南开区天津市南开中学高一上学期周测B卷第40题

函数 $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{x^2 + 1}$ ($x > 0$) 的最大值为 _____.

答案 $\frac{5}{2}$

解析 $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{x^2 + 1}$
 $= 1 + \frac{3x}{x^2 + 1} \leq 1 + \frac{3x}{2x}$
 $= \frac{5}{2},$
 当 $x = 1$ 时取得最大值 $\frac{5}{2}.$

4. 两个参数的均值考查形式

直接使用基本不等式

17 2020~2021学年10月天津和平区天津市第二十中学高一上学期月考第12题4分

已知正数 x, y 满足 $x + y = 18$, 则 xy 的最大值为 _____.

答案 81

解析 $\because x > 0, y > 0,$
 $x + y = 18,$
 $\therefore x + y \geq 2\sqrt{xy},$ 当 $x = y = 9$ 时等号成立,
 则 $xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = 81,$
 所以 xy 的最大值为 81.

18 2019~2020学年天津河北区高二上学期期末第6题4分

若 $a, b \in \mathbf{R}$, 且 $ab > 0$, 则下列不等式中, 恒成立的是 () .

A. $a^2 + b^2 > 2ab$

B. $a + b \geq 2\sqrt{ab}$

C. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{2}{\sqrt{ab}}$

D. $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2$

答案 D

解析

方法一: A项. 当 $a = b$ 时, 有 $a^2 + b^2 = 2ab$, 故A项不符合题意;

B项. 当 $a > 0$, 且 $b > 0$ 时, 有 $a + b \geq 2\sqrt{ab}$, 当且仅当 $a = b$ 时, 取“=”;

当 $a < 0$, 且 $b < 0$ 时, 有 $-a - b \geq 2\sqrt{(-a)(-b)}$, 即 $a + b \leq -2\sqrt{ab}$, 当且仅当 $a = b$ 时, 取“=”, 故B项不符合题意;

C项. 因为 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab}$, 当 $a > 0$, 且 $b > 0$ 时, 有 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{2}{\sqrt{ab}}$, 当且仅当 $a = b$ 时取“=”;

当 $a < 0$, 且 $b < 0$, 且 $b < 0$ 时, 有 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq -\frac{2}{\sqrt{ab}}$, 当且仅当 $a = b$ 时取“=”, 故C项错误;

D项. 因为 $ab > 0$, 所以 $\frac{b}{a} > 0$, $\frac{a}{b} > 0$, 所以有 $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2$, 当且仅当 $a = b$ 时取“=”.

故选: D .

方法二: $\because a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2 \geq 0$, A错误,

对B、C, 当 $a < 0, b < 0$ 时, 明显错误,

对D, $\because ab > 0, \therefore \frac{b}{a} > 0, \frac{a}{b} > 0, \therefore \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2\sqrt{\frac{b}{a} \times \frac{a}{b}} = 2$,

当且仅当 $\frac{b}{a} = \frac{a}{b}$ 即 $a = b$ 时取等号, 故选D .

调和形式

教法备注

【教师备注】也即1的代换

【示例】已知 $x + y = m (x, y > 0)$, m 为常数, 求 $\frac{a}{x} + \frac{b}{y}$ (a, b 为大于0的常数) 的最小值.

【解法】采用的是整体代换的思想

教法备注

【教师备注】

$$\begin{aligned} \frac{a}{x} + \frac{b}{y} &= \frac{1}{m} \cdot m \left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} \right) = \frac{1}{m} \cdot (x + y) \left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} \right) = \frac{1}{m} \cdot \left(a + b + \frac{bx}{y} + \frac{ay}{x} \right) \geq \frac{1}{m} \\ &\cdot \left(a + b + 2\sqrt{\frac{bx}{y} \cdot \frac{ay}{x}} \right) = \frac{a + b + 2\sqrt{ab}}{m} \end{aligned}$$

19 2019~2020学年10月天津南开区天津市南开中学高一上学期周测B卷第25题

已知正数 x, y 满足 $\frac{8}{x} + \frac{1}{y} = 1$, 则 $x + 2y$ 的最小值是 ().

A. 18

B. 16

C. 8

D. 10

答案 A

解析

$$\because \frac{8}{x} + \frac{1}{y} = 1,$$

$$\therefore x + 2y = (x + 2y) \cdot \left(\frac{8}{x} + \frac{1}{y} \right) = 10 + \frac{x}{y} + \frac{16y}{x} \geq 10 + 8 = 18 \text{ (当且仅当 } x = 4y \text{ 时等号成立)}.$$

答案为18.

故选A.

20 2019~2020学年10月天津和平区天津市第一中学高一上学期周测B卷第4题

已知 $a > 0$, $b > 0$, $a + b = 2$, 则 $y = \frac{1}{a} + \frac{4}{b}$ 的最小值是().

- A. $\frac{7}{2}$ B. 4 C. $\frac{9}{2}$ D. 5

答案 C

解析

因为 $a > 0$, $b > 0$, $a + b = 2$,

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{a} + \frac{4}{b} &= \frac{1}{2}(a+b) \left(\frac{1}{a} + \frac{4}{b} \right) = \frac{1}{2} \left(5 + \frac{b}{a} + \frac{4a}{b} \right) \\ &\geq \frac{1}{2} \left(5 + 2\sqrt{\frac{b}{a} \times \frac{4a}{b}} \right) = \frac{9}{2}; \end{aligned}$$

当且仅当 $\frac{b}{a} = \frac{4a}{b}$ 且 $a + b = 2$ ($a > 0$, $b > 0$),

即 $a = \frac{2}{3}$, $b = \frac{4}{3}$ 是等号成立.

故选C.

21 2019~2020学年10月天津和平区天津市耀华中学高一上学期月考第13题4分

已知正数 x , y 满足 $x + 2y = 2$, 则 $\frac{x+8y}{xy}$ 的最小值为 ____.

答案 9

解析

$$\therefore \frac{x+8y}{xy} = \frac{x+8y}{xy} \times \frac{x+2y}{2} = \frac{x^2 + 16y^2 + 10xy}{2xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{y} + \frac{16y}{x} + 10 \right) \geq \frac{1}{2} \times (8 + 10) = 9,$$

当且仅当 $x = \frac{4}{3}$, $y = \frac{1}{3}$ 时取等号,

$\therefore \frac{x+8y}{xy}$ 的最小值是9.

换元法

22 2016年天津河北区高三二模理科第14题5分

设 x, y 是正实数, 且 $x + y = 1$, 则 $\frac{x^2}{x+2} + \frac{y^2}{y+1}$ 的最小值是 _____.

答案 $\frac{1}{4}$

解析 设 $x+2=s, y+1=t$, 则 $s+t=x+y+3=4$,

$$\begin{aligned} \text{所以 } & \frac{x^2}{x+2} + \frac{y^2}{y+1} \\ &= \frac{(s-2)^2}{s} + \frac{(t-1)^2}{t} \\ &= \left(s-4+\frac{4}{s}\right) + \left(t-2+\frac{1}{t}\right) \\ &= (s+t) + \left(\frac{4}{s} + \frac{1}{t}\right) - 6 \\ &= \left(\frac{4}{s} + \frac{1}{t}\right) - 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{因为 } & \frac{4}{s} + \frac{1}{t} = \frac{1}{4} \left(\frac{4}{s} + \frac{1}{t}\right) (s+t) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{4t}{s} + \frac{s}{t} + 5\right) \geq \frac{9}{4}, \end{aligned}$$

$$\text{当且仅当 } \begin{cases} \frac{4t}{s} = \frac{s}{t} \\ s+t=4 \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} s = \frac{8}{3} \\ t = \frac{4}{3} \end{cases} \text{ 也即 } \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases} \text{ 时取等,}$$

故当 $x = \frac{2}{3}, y = \frac{1}{3}$ 时, $\frac{x^2}{x+2} + \frac{y^2}{y+1}$ 取得最小值 $\frac{1}{4}$.

配凑

23 2019~2020学年天津和平区天津市耀华中学高一上学期单元测试《基本不等式(2)》第11题

已知 $x > y > 0$, 且 $xy = 1$, 求 $\frac{x^2 + y^2}{x - y}$ 的最小值及此时 x, y 的值 .

答案 最小值为 $2\sqrt{2}$, 此时 $x = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$, $y = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$.

解析

$$\begin{aligned} & \frac{x^2 + y^2}{x - y} \\ &= \frac{x^2 + y^2 - 2xy + 2xy}{x - y} \\ &= \frac{(x - y)^2 + 2}{x - y} \\ &= x - y + \frac{2}{x - y} \end{aligned}$$

$$\geq 2\sqrt{2} ,$$

$$\text{“=”取得条件为: } x - y = \frac{2}{x - y} ,$$

$$\text{即 } x - y = \sqrt{2} ,$$

$$x = y + \sqrt{2} ,$$

$$\text{又: } xy = 1 ,$$

$$\therefore (y + \sqrt{2})y = 1 ,$$

$$\therefore y^2 + \sqrt{2}y - 1 = 0 ,$$

$$\therefore y > 0 ,$$

$$\therefore y = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} ,$$

$$\therefore x = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} .$$

24 设 $a > b > 0$, 则 $a^2 + \frac{1}{ab} + \frac{1}{a(a-b)}$ 的最小值是 _____ .

答案 4

解析

方法一：∵ $a > b > 0$, 故 $ab > 0$, $a(a-b) > 0$,

$$a^2 + \frac{1}{ab} + \frac{1}{a(a-b)} = a^2 - ab + ab + \frac{1}{ab} + \frac{1}{a(a-b)} = ab + \frac{1}{ab} + a(a-b) + \frac{1}{a(a-b)} \geq 2 + 2 = 4$$

当且仅当 $ab = 1$, $a(a-b) = 1$ 时等号成立 , 解得 $a = \sqrt{2}$, $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\text{方法二：} a^2 + \frac{1}{ab} + \frac{1}{a(a-b)} = a^2 + \frac{a-b+b}{ab(a-b)} = a^2 + \frac{1}{b(a-b)} ,$$

∵ $a > 0$, $a-b > 0$, ∴ $b(a-b) \leq \left(\frac{b+a-b}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}$, 当 $b = a-b$, 即 $a = 2b$ 时取到等号 .

$$\text{从而 } a^2 + \frac{1}{ab} + \frac{1}{a(a-b)} \geq a^2 + \frac{4}{a^2} \geq 2\sqrt{a^2 \cdot \frac{4}{a^2}} = 4 ,$$

当且仅当 $a^2 = \frac{4}{a^2}$, 即 $a = \sqrt{2}$ 时取到等号 .

从而当 $a = \sqrt{2}$, $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时 , 等号同时取到 , 此时 $a^2 + \frac{1}{ab} + \frac{1}{a(a-b)}$ 有最小值 4 .

故答案为 : 4 .