

01集合的概念与关系

1. 集合的概念

1.集合的含义

一般地，我们把研究范围内的对象统称为**元素**，通常用小写拉丁字母 $a, b, c, \dots$ 表示。

把满足某种要求或者标准的对象（元素）的总体称之为**集合**（简称为**集**），通常用大写拉丁字母 $A, B, C, \dots$ 表示。

2.特别说明：集合中元素的构成内容——

①集合的元素可以是任何研究对象，并不局限于数学元素。

②一个集合的元素个数并没有限制。一个元素可以构成一个集合，没有元素也可以构成集合

教法备注

【教师备注】没有元素的集合叫做**空集**，记作： $\emptyset$ 。

后面我们会重点提到它

3.元素与集合的关系

关系	读法	记法
a 是集合 A 中的元素	a 属于集合 A	$a \in A$
a 不是集合 A 中的元素	a 不属于集合 A	$a \notin A$

注意：元素与集合之间只有两种关系：属于($\in$)和不属于($\notin$)。

2. 集合中元素的性质



确定性

集合里的元素必须是确定的，

即给定一个集合，按照该集合的构成标准能够明确判定一个对象是否属于这个集合。

教法备注

【教师举例】如“个子高的同学”这一组对象就不能构成一个集合，因为“个子高”这个标准不够明确，而“身高超过170cm的同学”这一组对象可以构成一个集合。

1 2020~2021学年9月天津西青区天津市西青区杨柳青第一中学高一上学期月考第1题5分

下列几组对象可以构成集合的是（ ）。

- A. 充分接近 π 的实数的全体
- B. 某单位所有身高在1.7m以上的人
- C. 世界著名的科学家
- D. 善良的人

答案 B

解析 $\because$ 集合中的元素有确定性，
 $\therefore$ A，C，D的界限模糊。
 故选B。

互异性

集合中的元素一定是不同（互异）的。

也就是说，相同的元素在一个集合中只能出现一次。

教法备注

【教师举例】该性质很像超市的购物清单，如购买可乐，最后只会列出可乐这项，数量2会随后标注，而不需要打印“可乐”“可乐”两次，即同一类只列举一次。可引申到互异性这里，如方程 $x^2 - 2x + 1 = 0$ 的解虽然是两个相等的实根，但解集构成的集合是 $\{1\}$ ，而不是 $\{1, 1\}$ 。

2 2019~2020学年9月天津和平区天津市耀华中学高一上学期周测A卷第3题

已知集合 $M = \{a, b, c\}$ 中的三个元素可构成某一三角形的三边长，那么此三角形一定不是（ ）。

- A. 直角三角形
- B. 锐角三角形
- C. 钝角三角形
- D. 等腰三角形

答案 D

3 2020~2021学年9月天津西青区天津市西青区杨柳青第一中学高一上学期月考第3题5分

已知集合 $M = \{1, m+2, m^2+4\}$, 且 $5 \in M$, 则 m 的值为 () .

A. -1或1

B. 1或3

C. -1或3

D. 1, -1或3

答案 B

解析 $\because 5 \in \{1, m+2, m^2+4\}$,

$\therefore 5 = m+2$ 或 $5 = m^2+4$, 解得 $m = 3$ 或 $m = \pm 1$.

当 $m = 3$ 时, $M = \{1, 5, 13\}$; 当 $m = 1$ 时, $M = \{1, 3, 5\}$; 当 $m = -1$ 时, $M = \{1, 1, 5\}$, 不满足元素的互异性 .

$\therefore m = 1$ 或 $m = 3$.

故选B .

4 2020~2021学年10月天津和平区天津市汇文中学高一上学期月考第2题3分

已知集合 $A = \{a-2, 2a^2+5a, 12\}$, 且 $-3 \in A$, 则 a 等于 () .

A. -1

B. $-\frac{2}{3}$

C. $-\frac{3}{2}$

D. $-\frac{3}{2}$ 或 -1

答案 C

解析 $\because -3 \in A$,

$\therefore -3 = a-2$ 或 $-3 = 2a^2+5a$,

$\therefore a = -1$ 或 $a = -\frac{3}{2}$.

当 $a = -1$ 时, $a-2 = -3$, $2a^2+5a = -3$, 不符合集合中元素的互异性, 故 $a = -1$ 舍去 .

当 $a = -\frac{3}{2}$ 时, $a-2 = -\frac{7}{2}$, $2a^2+5a = -3$, 满足题意 .

$\therefore a = -\frac{3}{2}$.

故选C .

无序性

集合中元素的排列顺序无先后之分

教法备注

【教师举例】如集合 $\{1, 2\}$ 和集合 $\{2, 1\}$ 是同一个集合。

3. 集合的分类

1. 按元素的属性：

数集（构成集合中的元素是数）、点集（构成集合中的元素是点）等。

2. 按元素的个数：

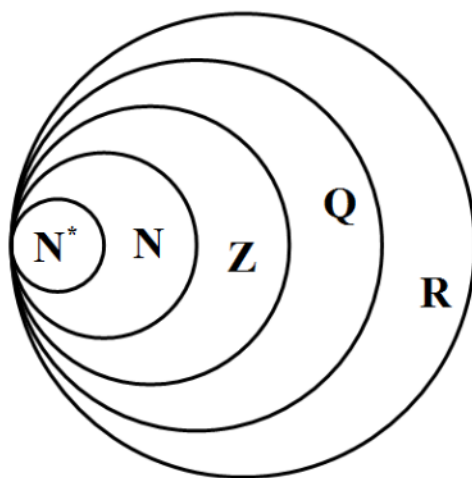
有限集、无限集。

3. 常见数集表示方法

为了书写方便，我们用特定的字母来表示一些常见数集，下面是几种常见数集的表示方法：

- ① 0和正整数构成的集合叫做**自然数集**，记作 $\mathbf{N}$ 。
- ② 正整数构成的集合叫做**正整数集**，记作 $\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}_+$ 。
- ③ 全体整数构成的集合叫做**整数集**，记作 $\mathbf{Z}$ 。
- ④ 全体有理数构成的集合叫做**有理数集**，记作 $\mathbf{Q}$ 。
- ⑤ 全体实数构成的集合叫做**实数集**，记作 $\mathbf{R}$ 。

4. 常见数集的关系



5 2019~2020学年9月天津和平区天津市耀华中学高一上学期周测A卷第5题

用“ $\in$ ”或“ $\notin$ ”符号填空：

(1) $3\frac{2}{7}$ _____ $\mathbf{Q}$.

(2) 3^2 _____ $\mathbf{N}$.

(3) π _____ $\mathbf{Q}$.

(4) $\sqrt{2}$ _____ $\mathbf{R}$.

(5) $\sqrt{9}$ _____ $\mathbf{Z}$.

(6) $(\sqrt{5})^2$ _____ $\mathbf{N}$.

答案

(1) 略

(2) 略

(3) 略

(4) 略

(5) 略

(6) 略

6 2019~2020学年9月天津和平区天津市耀华中学高一上学期周测A卷第2题

下面四个说法中正确的个数是 () .

① $\mathbf{N}$ 中的最小数为1；

② 若 $a \notin \mathbf{N}$, 则 $-a \notin \mathbf{N}$;

③ 若 $a \in \mathbf{N}$, $b \in \mathbf{N}$, 则 $a+b$ 的最小值为2；

④ 所有小的正数组成一个集合 .

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

答案

A

解析

① $\mathbf{N}$ 中的最小数为0，故①错误；

② 反例 $a = -1$, $-a = 1 \in \mathbf{N}$, 故②错误；

③ $a \in \mathbf{N}$, $b \in \mathbf{N}$, $\therefore a + b_{\min} = 0 + 0 = 0$, 故③错误；

④不满足确定性，故④错误．

故选A．

4. 集合的表示方法



列举法

1. 列举法的定义

把集合中的元素——列举出来，中间用逗号隔开，并用大括号“{}”括起来表示集合的方法叫做**列举法**．

2. 举例说明：

(1) 数学：绝对值小于10的偶数组成的集合用列举法表示为：_____

(2) 语文：中国四大名著，又称四大小说，是指：

_____（四部中国古典章回体小说）

(3) 英语：单词放弃abandon的字母组成用列举法表示为：_____

(4) 物理：下列措施中能减弱噪声的做法序号用列举法表示：_____

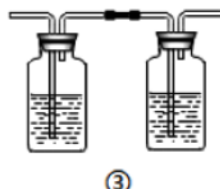
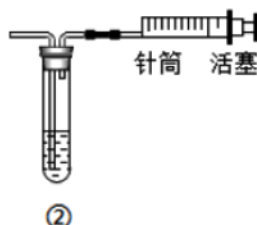
①机动车辆在市内严禁鸣笛

②学校将高音喇叭换成许多小音箱

③清除城市垃圾，保持环境整洁

④在城市街道两旁种草植树

(5) 化学：下列装置中，若不添加其他仪器，也不改变装置结构，能检查装置气密性的是仪器序号用列举法表示：_____



(6) 生物：细胞的基本结构包括用列举法表示为：_____

(7) 地理：如世界四大洋用列举法表示为：_____

(8) 历史：下列近代条约有涉及香港内容的序号用列举法表示为：_____

①《马关条约》②《北京条约》③《天津条约》④《南京条约》

(9) 政治：对下表中“微行为”的“微点评”正确的序号用列举法为：_____

序号	微行为	微点评
①	网友要求见面，爽快答应，只身一人前往	缺乏自我保护意识
②	照搬照抄班级学霸的课堂笔记	科学高效的学习方法
③	吃好喝好就是守护生命	守护生命还应养护精神
④	为班集体事务出谋划策	出风头，张扬个性

教法备注

【答案】（物化生史地政我不会不答疑要问的话去问对应学科o(*////▽////*)q）

(1) 数学： $\{-8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8\}$.

(2) 语文： $\{《三国演义》, 《西游记》, 《水浒传》, 《红楼梦》\}$

(3) 英语： $\{a, b, d, o, n\}$

(4) 物理： $\{①, ②, ④\}$

(5) 化学： $\{①, ②, ④\}$

(6) 生物： $\{细胞核、细胞质、细胞膜\}$

(7) 地理： $\{太平洋, 大西洋, 印度洋, 北冰洋\}$,

(8) 历史： $\{②, ④\}$

(9) 政治： $\{①, ③\}$

3.列举法的要求

——列举、不重不漏

4.列举法的适用范围

①元素个数少且有限时，全部列举；

②元素个数多且有限时，可以列举部分，中间用省略号表示；

③元素个数无限但有规律时，可以列举前面一部分，后面用省略号表示。

教法备注

【教师举例】

①如 $\{1, 2, 3\}$ ；

②如从1到100的所有自然数组成的集合可以表示为 $\{1, 2, 3, \dots, 100\}$;

③如自然数集 $\mathbf{N}$ 可以表示为 $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

描述法

1.描述法的定义

用集合所含元素的共同特征表示集合的法称为**描述法**.

用符号表示便是 $A = \{x \in I | p(x)\}$

其中的 x 表示集合的**代表元素**, I 表示元素 x 的**取值范围**, $p(x)$ 则表示元素 x 的**共同特征**.

教法备注

【教法备注】

①“**代表元素**”，是表示这个集合元素的一般符号，

如表示数集时，我们可以选用 $x, y, z, \dots$ 作为代表元素；

表示点集时，可以选用有序实数对 (x, y) 作为代表元素.

②“**取值范围**”，一般来说集合元素 x 的取值范围 I 需写明确，但若从上下文的关系或者所研究问题的环境下看， $x \in I$ 若是**显而易见**的话，则“ $\in I$ ”**可以省略**，只写元素 x .

如集合 $\{x \in \mathbf{R} | x + 2 = 5\}$ 可以简写为 $\{x | x + 2 = 5\}$.

③“**共同特征**”，即代表元素满足的条件、具备的属性，

如不等式 $x - 7 < 3$ 的解都满足条件 $x < 10$ ，那么不等式 $x - 7 < 3$ 的解集可表示为

$\{x | x < 10\}$.

7 2019~2020学年9月天津和平区天津市耀华中学高一上学期周测A卷第10题

已知集合 $P = \{-2, -1, 0, 1\}$ ，集合 $Q = \{y | y = |x|, x \in P\}$ ，则 $Q = \underline{\hspace{2cm}}$.

答案 $\{0, 1, 2\}$

解析 ① $x = -2$ 时， $|x| = 2$ ，

② $x = -1$ 时， $|x| = 1$ ，

③ $x = 0$ 时， $|x| = 0$ ，

④ $x = 1$ 时， $|x| = 1$ ，

$$\therefore Q = \{0, 1, 2\}.$$

故答案为： $\{0, 1, 2\}$.

8 2019~2020学年10月天津河西区天津市第四十二中学高一上学期月考第4题3分

若集合 $A = \{x \in \mathbf{R} \mid ax^2 + 4x + 1 = 0\}$ 中只有一个元素，则 $a = (\quad)$.

A. $a = 16$ 或 $a = 0$

B. $a = 4$ 或 $a = 0$

C. $a = 2$ 或 $a = 0$

D. $a = 2$ 或 $a = 4$

答案 B

解析 因为集合 $A = \{x \in \mathbf{R} \mid ax^2 + 4x + 1 = 0\}$ 中只有一个元素，所以方程 $ax^2 + 4x + 1 = 0$ 只有一个根，

若 $a = 0$ ，则方程等价于 $4x + 1 = 0$ ，解得 $x = -\frac{1}{4}$ ，满足条件，

若 $a \neq 0$ ，则判别式 $\Delta = 0$. 即 $16 - 4a = 0$ ，

解得 $a = 4$ ，

综上 $a = 4$ 或 $a = 0$.

故选：B .

9 2019~2020学年9月天津北辰区天津市第四十七中学高一上学期月考第9题4分

若集合 $A = \{x \mid x^2 - x - 12 \leq 0\}$ ， $B = \{x \mid |x| < 1\}$ ， $C = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$ ，则集合 $C = (\quad)$.

A. $\{x \mid -3 \leq x \leq -1, \text{ 或 } 1 \leq x \leq 4\}$

B. $\{x \mid -3 \leq x \leq -1, \text{ 或 } 1 < x \leq 4\}$

C. $\{x \mid -3 \leq x < -1, \text{ 或 } 1 \leq x \leq 4\}$

D. $\{x \mid -3 \leq x < -1, \text{ 或 } 1 < x \leq 4\}$

答案 A

解析 由题得： $A = [-3, 4]$ ， $B = (-1, 1)$ ，

则 $C = \{x \mid -3 \leq x \leq -1, \text{ 或 } 1 \leq x \leq 4\}$ ，

故选：A .

10 2020~2021学年10月天津河西区天津市第四中学高一上学期月考第14题4分

已知集合 $A = \{1, 2\}$, $B = \{(x, y) | x \in A, y \in A, x + y \in A\}$, 则 B 中所含元素的个数为 _____ .

答案 1

解析 $\because$ 集合 $A = \{1, 2\}$,

$\therefore B = \{(x, y) | x \in A, y \in A, x + y \in A\} = \{(1, 1)\}$,

$\therefore B$ 中所含元素的个数为1 .

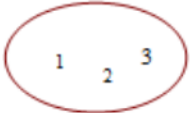
故答案为：1 .

图示法

1. 图示法的定义

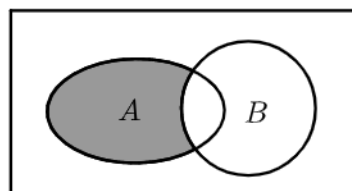
Venn图：Venn图是用**封闭曲线**来表示集合的，它能直观的表示集合元素的构成及集合之间的关系 .

2. 举例说明

例如： 表示集合 $\{1, 2, 3\}$.

11 2020~2021学年10月天津北辰区天津市第四十七中学高一上学期月考第1题4分

已知全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} | x \geq 2\}$, 下图中阴影部分所表示的集合为 () .



A. $\{1\}$

B. $\{0, 1\}$

C. $\{1, 2\}$

D. $\{0, 1, 2\}$

答案 B

解析 由图知阴影部分为： $A \cap (\complement_U B)$ ，

$$\because B = [2, +\infty),$$

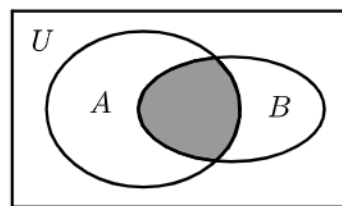
$$\therefore \complement_U B = (-\infty, 2),$$

$$\therefore (\complement_U B) \cap A = \{0, 1\}.$$

故选B.

12 2020~2021学年10月江西南昌青山湖区南昌三中雷式学校高一上学期月考第8题5分

设全集 $U = \mathbf{R}$ ，集合 $A = \left\{x \in \mathbf{Z} \mid \frac{x}{3-x} \geq 0\right\}$ ， $B = \{x \in \mathbf{Z} \mid x^2 \leq 9\}$ ，则图中阴影部分表示的集合为（ ）.



A. $\{1, 2\}$

B. $\{0, 1, 2\}$

C. $\{x \mid 0 \leq x < 3\}$

D. $\{x \mid 0 \leq x \leq 3\}$

答案 B

解析 图中阴影部分表示的集合为 $A \cap B$ ，

$$A = \left\{x \in \mathbf{Z} \mid \frac{x}{3-x} \geq 0\right\} = \{0, 1, 2\}, B = \{x \in \mathbf{Z} \mid x^2 \leq 9\} = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\},$$

$$A \cap B = \{0, 1, 2\}.$$

故选B.

区间表示法

1. 区间表示法的定义

在数学中，我们经常研究**数轴上一段连续的实数的集合**，比如集合 $\{x|1 < x < 4\}$ ，
为了更为方便的表示这类集合，我们引入了集合的**区间表示法**。

2.常用写法

设 $a, b \in \mathbf{R}$, 且 $a < b$,

定义	名称	符号	数轴表示
$\{x a \leq x \leq b\}$	闭区间	$[a, b]$	
$\{x a < x < b\}$	开区间	(a, b)	
$\{x a \leq x < b\}$	左闭右开区间	$[a, b)$	
$\{x a < x \leq b\}$	左开右闭区间	$(a, b]$	
$\{x x \geq a\}$	左闭右开区间	$[a, +\infty)$	
$\{x x \leq a\}$	左开右闭区间	$(-\infty, a]$	
$\{x x > a\}$	开区间	$(a, +\infty)$	
$\{x x < a\}$	开区间	$(-\infty, a)$	

3.解释说明

- ①其中， a, b 叫做区间的**端点**。
- ②其中“ $+\infty$ ”读作“**正无穷大**”，表示数值无限大；“ $-\infty$ ”读作“**负无穷大**”，表示数值无限小

教法备注

【教师备注】“ ∞ ”是一种思想，是无限延续下去的意思，“ $+\infty$ ”代表的是数字一直变大，一直变大的**趋势**，并不确切代表某一个很大的数，所以去比较“ ∞ ”和“ $\infty + 1$ ”哪一个更大本身就是没有意义的。

5.集合之间的关系

子集

1.子集的定义

对于两个集合 A, B ，如果集合 A 中的任意一个元素都是集合 B 的元素，那么集合 A 叫做集合 B 的**子集**。记作 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$ ，读作“ A 含于 B ”或“ B 包含 A ”。

2.定义的符号表示

若 $\forall x \in A$ 都有 $x \in B$, 则 $A \subseteq B$

这是作为证明 A 是集合 B 的子集的最基本方法

3.子集的图示



3.判断集合不是子集关系的依据

当集合 A 不包含于集合 B (或集合 B 不包含集合 A) 时, 记作 $A \not\subseteq B$, 此时集合 A 中至少存在一个元素不是集合 B 的元素.

4.包含关系具有传递性

即如果 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq C$, 则 $A \subseteq C$ (借助于 Venn 图比较好理解).

5.集合和它本身的关系

根据定义不难得到如下结论: **任何一个集合都是它本身的子集**, 即 $A \subseteq A$.

13 2020~2021学年10月天津和平区天津市第二十中学高一上学期月考第3题3分

已知集合 $A = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0, x \in \mathbf{R}\}$, $B = \{x | 0 < x < 5, x \in \mathbf{N}\}$, 则满足条件 $A \subseteq C \subseteq B$ 的集合 C 的个数为()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

答案 D

解析 解: 由题意可得, $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$,

$\therefore A \subseteq C \subseteq B$,

$\therefore$ 满足条件的集合 C 有 $\{1, 2\}$, $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 2, 3, 4\}$, 共4个,

故选: D.

14 2019~2020学年9月天津和平区天津市耀华中学高一上学期周测B卷第13题

已知 $A = \{x | x < -1 \text{ 或 } x > 5\}$, $B = \{x | a < x < a + 4\}$, 若 $B \subseteq A$, 则实数 a 的取值范围是 _____.

答案 $a \leq -5 \text{ 或 } a \geq 5$

解析 $\because B \subseteq A$,

$$\therefore a + 4 \leq -1 \text{ 或 } a \geq 5,$$

$$\therefore a \leq -5 \text{ 或 } a \geq 5.$$

故答案为: $a \leq -5 \text{ 或 } a \geq 5$.

15 2020~2021 学年天津南开区天津市南开中学高一上学期开学考试第13题4分

设集合 $A = \{x | -1 \leq x + 1 \leq 6\}$, $B = \{x | m - 1 < x < 2m + 1\}$, 若 $A \supseteq B$, 则 m 的取值范围是 _____.

答案 $(-\infty, -2] \cup [-1, 2]$

解析 $-1 \leq x + 1 \leq 6$,

$$\therefore -2 \leq x \leq 5,$$

$$\therefore A = [-2, 5],$$

$$\because B \subseteq A,$$

$$\text{I} : B = \emptyset,$$

$$\therefore m - 1 \geq 2m + 1,$$

$$\therefore m \leq -2,$$

$$\text{II} : B \neq \emptyset,$$

$$\text{即 } m > -2,$$

$$\therefore \begin{cases} 2m + 1 \leq 5 \\ m - 1 \geq -2 \end{cases},$$

$$\therefore -1 \leq m \leq 2,$$

综上 $m \in (-\infty, -2] \cup [-1, 2]$.

16 2020~2021学年天津南开区天津市南开中学高一上学期开学考试第17题12分

设集合 $A = \{x | x^2 + 4x = 0\}$, $B = \{x | x^2 + 2(a+1)x + a^2 - 1 = 0\}$, 若 $B \subseteq A$, 求实数 a 的取值范围 .

答案 $a \in (-\infty, -1] \cup \{1\}$.

解析 $x^2 + 4x = 0$,
 $x(x+4) = 0$,
 $\therefore A = \{0, -4\}$,
 $\because B \subseteq A$,
 (i) $B = \emptyset$,
 $4(a+1)^2 - 4(a^2 - 1) < 0$,
 $a^2 + 2a + 1 - a^2 + 1 < 0$,
 $\therefore a < -1$;
 (ii) $B = \{0\}$,
 $x^2 = 0$,
 $\therefore \begin{cases} 2(a+1) = 0 \\ a^2 - 1 = 0 \end{cases}$,
 $\therefore a = -1$;
 (iii) $B = \{-4\}$,
 $(x+4)^2 = 0$,
 $x^2 + 8x + 16 = 0$,
 $\therefore \begin{cases} 2(a+1) = 8 \\ a^2 - 1 = 16 \end{cases}$,
 无解 ;
 (iv) $B = \{0, -4\}$,
 $x(x+4) = 0$,
 $x^2 + 4x = 0$,
 $\begin{cases} 2(a+1) = 4 \\ a^2 - 1 = 0 \end{cases}$,
 $\therefore a = 1$,
 综上 , $a \in (-\infty, -1] \cup \{1\}$.

17 2019~2020学年9月天津和平区天津市耀华中学高一上学期周测B卷第20题

已知 $I = \{1, 2, 3\}$, A, B 是集合 I 的两个非空子集, 且 A 中所有数的和大于 B 中所有数的和, 则集合 A, B 共有 _____ 对.

答案 20

解析 当 A, B 均有一个元素时: 有3对,
 当 B 有一个元素, A 有2个元素时: 有 $3 \times 3 - 1 = 8$ 对,
 当 B 有一个元素, A 有3个元素时: 有3对,
 当 B 有2个元素, A 有2个元素时: 有3对,
 当 B 有2个元素, A 有3个元素时: 有3对,
 共20对.

真子集

1. 真子集的定义

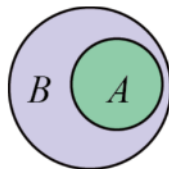
如果 $A \subseteq B$, 并且 B 中至少有一个元素不属于 A , 那么集合 A 叫做集合 B 的 **真子集**

记作 $A \subsetneq B$ 或 $B \supsetneq A$, 读作“ A 真包含于 B ”或“ B 真包含 A ”.

2. 真包含关系同样具有传递性

即如果 $A \subsetneq B$ 且 $B \subsetneq C$, 则 $A \subsetneq C$.

3. 真子集的图示



18 2019~2020学年9月天津南开区天津市第二十五中学高一上学期月考第5题4分

已知 $\{1\} \subsetneq M \subseteq \{1, 2, 3\}$ 的集合 M 的个数是 () .

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

答案 C

解析 已知 $\{1\} \subsetneq M \subseteq \{1, 2, 3\}$,
故 M 可以取 : $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 2, 3\}$.
故选 C .

19 2019~2020学年10月天津南开区天津市南开中学高一上学期月考第19题10分

已知 $M = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $N = \{x | x^2 - 2x + a = 0\}$, 若 $N \subsetneq M$, 求 a 的取值范围 .

答案 $a \in [1, +\infty)$.

解析 由题意得 , $M = \{1, 2\}$,
且 $N \subsetneq M$,
(1) $N = \emptyset$ 时 , 则 $\Delta = 4 - 4a < 0$, 得 $a > 1$;
(2) $N \neq \emptyset$, 即 $a \leq 1$ 时 , 对于方程 $x^2 - 2x + a = 0$.
①若方程有一根 , 则 $a = 1$,
即 $x^2 - 2x + 1 = 0$, $x = 1$,
此时 $N = \{1\}$, 满足题意 ;
②若方程有两根 , 则两根必为1和2 ,
 $\therefore \begin{cases} 1 - 2 + a = 0 \\ 4 - 4 + a = 0 \end{cases}$, 无解 ,
综上所述 , $a \in [1, +\infty)$.

20 2019~2020学年9月天津和平区天津市耀华中学高一上学期周测B卷第16题

集合 $M = \{x | x = 1 + a^2, a \in \mathbf{N}^*\}$, $P = \{x | x = a^2 - 4a + 5, a \in \mathbf{N}^*\}$, 则 M 、 P 的关系为 M _____
 P .

答案 $\subsetneq$

解析 集合 P 得 $x = a^2 - 4a + 5 = (a - 2)^2 + 1$, $a \in \mathbf{N}^*$,

$\therefore M$ 的元素均为 P 的元素，
但 P 中元素 1，不是集合 M 的元素，
故 $M \subsetneq P$ 。

集合相等

1. 集合相等的定义

如果集合 A 中的每一个元素都是集合 B 的元素，反过来，集合 B 的每一个元素都是集合 A 的元素，那么我们就说集合 A 与集合 B **相等**，记作 $A = B$ 。

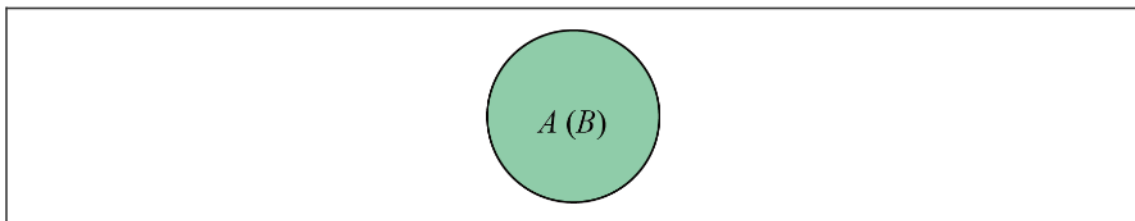
教法备注

【教师备注】两个集合相等，只需要所含元素完全相同即可，**与顺序无关**。

2. 集合相等在子集角度的描述

如果集合 A 是集合 B 的子集 ($A \subseteq B$)，且集合 B 是集合 A 的子集 ($A \subseteq B$)，此时两集合的元素是一样的，我们称集合 A 与集合 B **相等**。

3. 集合相等的图示



21 2019~2020学年9月天津和平区天津市耀华中学高一上学期周测B卷第4题

设 $a, b \in \mathbf{R}$ ，集合 $\{1, a+b, a\} = \{0, \frac{b}{a}, b\}$ ，则 $b-a = (\quad)$ 。

A. 1

B. -1

C. 2

D. -2

答案 C

解析 因为 $\{1, a+b, a\} = \{0, \frac{b}{a}, b\}$ ， $a \neq 0$ ，所以 $a+b=0$ ，则 $\frac{b}{a} = -1$ ，所以 $a = -1$ ， $b = 1$ ，所以 $b-a = 2$ 。

22 2019~2020学年10月天津河西区天津市第四十二中学高一上学期月考第7题3分

下列集合中，表示同一集合的是（ ）。

- A. $M = \{(3, 2)\}$, $N = \{(2, 3)\}$
- B. $M = \{1, 2\}$, $N = \{(1, 2)\}$
- C. $M = \{(x, y) | x + y = 1\}$, $N = \{y | x + y = 1\}$
- D. $M = \{3, 2\}$, $N = \{2, 3\}$

答案 D

解析 根据集合的定义，依次分析选项可得：

对于A： M 、 N 都是点集， $(2, 3)$ 与 $(3, 2)$ 是不同的点，则 M 、 N 是不同的集合，故A错误；

对于B： M 是数集，表示1，2两个数， N 是点集，则 M 、 N 是不同的集合，故B错误；

对于C： M 是点集，表示直线 $x + y = 1$ 上所有的点，而 N 是数集，表示函数 $x + y = 1$ 的值域，则 M 、 N 是不同的集合，故C错误；

对于D： M 、 N 都是数集，都表示2，3两个数，是同一个集合，故D正确。

故选D。

空集

1.空集的定义

不含任何元素的集合叫**空集**，通常记为 $\emptyset$ 。

2.数0、 $\{0\}$ 、 $\emptyset$ 、 $\{\emptyset\}$ 的关系

数0不是集合，是一个元素；

$\{0\}$ 是含一个元素0的集合；

$\emptyset$ 是不含任何元素的集合（它既不是有限集也不是无限集）；

$\{\emptyset\}$ 是指以 $\emptyset$ 为元素的集合

3.空集的规定

空集是任何集合的子集，即 $\emptyset \subseteq A$ 。

空集是任何非空集合的真子集，即 $\emptyset \subsetneq A (A \neq \emptyset)$ 。

4.重点命题辨析

由于空集的存在，关于子集的下述定义其实是**错误**的：

若 $A \subseteq B$ ，则 A 是由 B 中的部分元素所组成的集合

教法备注

【教师备注】在遇到“ $A \subseteq B$ 或 $A \subsetneq B$ ，且 $B \neq \varnothing$ ”时，需考虑 $A = \varnothing$ 时是否满足题意，这里 $A = \varnothing$ 的情形易忽视，应引起足够的重视。

23 2019~2020学年10月天津河西区天津市第四十二中学高一上学期月考第5题3分

下列四个集合中，是空集的是（ ）。

- A. $\{x|x+3=3\}$
- B. $\{(x,y)|y^2=-x^2, x,y \in \mathbf{R}\}$.
- C. $\{x|x^2-x+1=0, x \in \mathbf{R}\}$
- D. $\{x|x^2 \leq 0\}$

答案 C

解析 利用空集的定义直接判断选项是否是空集，即可。

$\because x+3=3, \therefore x=0, A=\{0\}$ ；A不是空集，A不正确。

$\because y^2=-x^2, x,y \in \mathbf{R}, \therefore x=0, y=0; B=\{(0,0)\}$ ；B不是空集，B不正确。

$\because x^2-x+1=0, x \in \mathbf{R}, \Delta < 0, \therefore C=\varnothing$ ；C是空集，正确。

$\because x^2 \leq 0, \therefore x=0; D=\{0\}$ ；D不是空集，D不正确。

故选C。

元素与集合、集合与集合的关系

1.区分元素与集合、集合与集合关系

元素与集合的关系是属于与不属于的关系，用符号“ $\in$ ”、“ $\notin$ ”表示

而集合与集合之间的关系是包含、不包含、真包含、相等的关系，用符号“ $\subseteq$ ”、“ $\not\subseteq$ ”、“ $\subsetneq$ ”、“ $=$ ”表示。

2.集合间的包含关系

若 $A \subseteq B$ ，则 A 和 B 有两种可能的关系： $A \subsetneq B$ 或 $A = B$ 。

24 2019~2020学年9月天津北辰区天津市第四十七中学高一上学期月考第8题4分

有下列四个命题：① $\{0\}$ 是空集，②若 $a \in \mathbf{N}$ ，则 $-a \notin \mathbf{N}$ ，③集合 $A = \{x \in \mathbf{R} | x^2 - 2x + 1 = 0\}$ 有两个元素，④集合 $B = \left\{x \in \mathbf{Q} \mid \frac{6}{x} \in \mathbf{N}\right\}$ 是有限集，其中正确命题的个数为（ ）。

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

答案 A

解析 ① $\{0\}$ 是空集，故①不正确。

②若 $a \in \mathbf{N}$ ，当 $a = 0$ ， $-a \in \mathbf{N}$ ，故②不正确。

③集合 $A = \{x \in \mathbf{R} | x^2 - 2x + 1 = 0\} = \{1\}$ 只有1个元素，故③不正确。

④集合 $B = \left\{x \in \mathbf{Q} \mid \frac{6}{x} \in \mathbf{N}\right\}$ 是无限集，故④错误。

25 2020~2021学年10月天津和平区天津市汇文中学高一上学期月考第1题3分

已知集合 $M = \{x | x^2 = 1\}$ ， N 为自然数集，则下列表示不正确的是（ ）。

- A. $1 \in M$ B. $M = \{-1, 1\}$
C. $\phi \subseteq M$ D. $M \subseteq N$

答案 D

解析 $M = \{1, -1\}$ ，

$N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ ，

A、B、C正确，D错误。

故选D。

26 2019~2020学年天津河东区高一上学期期中第1题4分

若集合 $A = \{x \in \mathbf{R} | x > -1\}$ ，则（ ）。

- A. $0 \subseteq A$ B. $\{0\} \subseteq A$
C. $\{0\} \in A$ D. $\emptyset \in A$

答案 B

解析 A选项： $0 \subseteq A$ ，应当是 $0 \in A$ ，集合与元素的关系应当是属于关系；
B选项：集合与集合之间的关系应当是包含关系，故B正确；
C选项：集合与集合之间的关系应当是包含关系，故C不正确；
D选项：空集是任何集合的子集，故D不正确。
故选B.

6. 子集个数的确定

若有限非空集合 A 中含有 n 个元素，则有：

- (1) 集合 A 的子集个数为 2^n .
- (2) 集合 A 的真子集个数为 $2^n - 1$.
- (3) 集合 A 的非空子集个数为 $2^n - 1$.
- (4) 集合 A 的非空真子集个数为 $2^n - 2$.

27 2020~2021学年10月天津河北区天津市第十四中学高一上学期月考第7题

集合 $A = \{x \in \mathbf{Z} \mid -2 < x < 2\}$ 的子集个数为 () .

- A. 4 B. 6 C. 7 D. 8

答案 D

解析 $\because A = \{x \in \mathbf{Z} \mid -2 < x < 2\} = \{-1, 0, 1\}$,
 $\therefore$ 集合 A 的子集个数为 $2^3 = 8$ 个 .
故选D项 .

28 2020~2021学年天津和平区天津市第一中学高一上学期期中第1题3分

已知集合 $A = \{x \in \mathbf{Z} \mid -x^2 + x + 2 > 0\}$, 则集合 A 的真子集个数为 () .

- A. 3 B. 4 C. 7 D. 8

答案 A

解析 $\because$ 对于不等式 $-x^2 + x + 2 > 0$, 解得 $-1 < x < 2$,
 $\therefore A = \{x \in \mathbf{Z} \mid -x^2 + x + 2 > 0\} = \{0, 1\}$,
 $\therefore$ 真子集有 $2^2 - 1 = 3$ (个),
 故选A.

29 2020~2021学年9月天津西青区天津市西青区杨柳青第一中学高一上学期月考第5题5分

设集合 $A = \{x \mid x^2 - 2x - 3 < 0, x \in \mathbf{N}\}$, 则集合A的真子集有 () .

- A. 8个 B. 6个 C. 7个 D. 5个

答案 C

解析 $\because x^2 - 2x - 3 < 0$,
 $\therefore (x - 3)(x + 1) < 0$,
 $\therefore -1 < x < 3$,
 又 $\because x \in \mathbf{N}$,
 $\therefore A = \{0, 1, 2\}$ 共3个元素,
 其真子集为 $2^3 - 1 = 7$.

30 2019~2020学年9月天津和平区天津市耀华中学高一上学期周测B卷第10题

如果 $A = \{x \mid x^2 + 4x + 2a = 0\}$ 的子集共有4个, 那么a的取值集合是 _____ .

答案 $a \in (-\infty, 2)$

解析 $\because$ 集合A的子集个数有4个,
 $\therefore$ 集合A的元素有2个,
 $\therefore x^2 + 4x + 2a = 0$ 有2个不等实根,
 $\therefore \Delta > 0$,

$$\therefore 16 - 8a > 0 ,$$

$$\therefore a < 2 .$$