

04函数阶段性测试

一、选择题

Q1:函数的定义——图像诠释

Q2:相同函数

Q3:函数图像选择

Q4:比较大小

Q5:复合函数定义域

Q6:幂函数的单调性

Q7:零点存在性

Q8:根据函数单调性、奇偶性求解不等式

Q9:对数运算、二元一次方程的根

Q10:函数的最值、奇偶性

二、填空题

Q11:过定点

Q12:利用函数奇偶性进行赋值运算

Q13:指数函数的单调性

Q14:零点问题

Q15:分段函数零点个数

三、解答题

Q16:对数运算

Q17:利用函数奇偶性求解解析式；求解分段函数值域

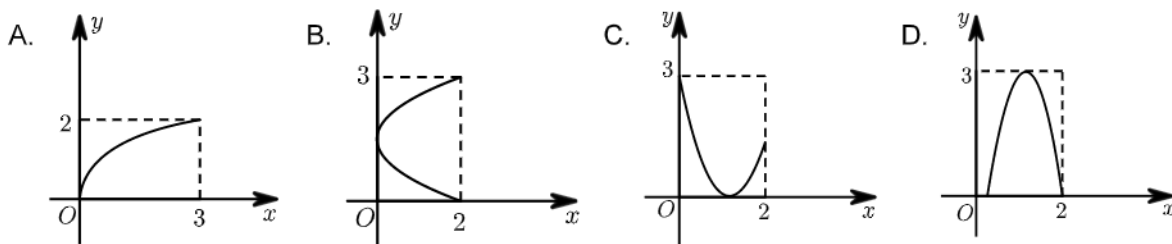
Q18:复合函数奇偶性的判断；复合函数单调性的证明

Q19:含参一元二次方程根的分布；一元二次函数的最值问题

Q20:借助函数奇偶性判断函数单调性；根据函数的奇偶性、单调性求解不等式

1. 选择题（共10小题，每小题4分，共40分）

(4分) 设 $M = \{x | 0 \leq x \leq 2\}$, $N = \{y | 0 \leq y \leq 3\}$, 给出下列图形, 其中能表示从集合 M 到 N 的一个函数的是 () .



答案 C

解析 集合 M 为函数定义域, 集合 N 为函数值域, 由函数定义可知, 故选 C.

2 2018~2019 学年天津河西区天津市实验中学高一上学期期中第2题3分

(4分) 下列各组函数中, 表示同一函数的是 () .

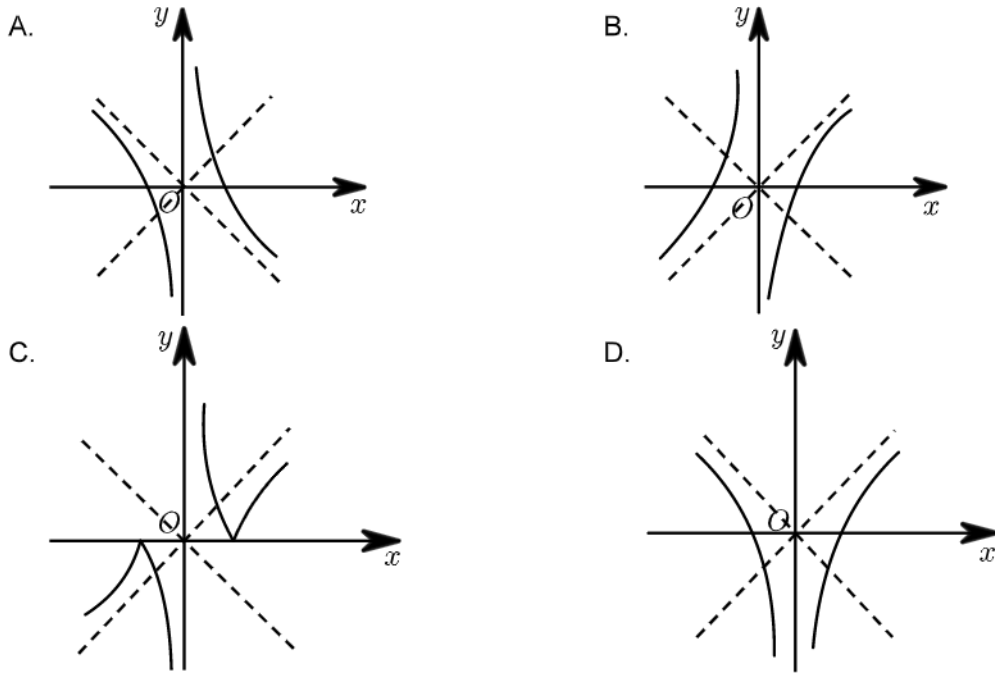
- A. $f(x) = 1$, $g(x) = x^0$ B. $y = e^{\ln x}$, $y = \ln e^x$
C. $y = \sqrt{x+1}\sqrt{x-1}$, $y = \sqrt{x^2-1}$ D. $y = |x|$, $y = \sqrt{x^2}$

答案 D

解析 A选项: $f(x) = 1$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $g(x) = x^0$ 的定义域为 $\{x | x \neq 0\}$, 定义域不同, 不是同一函数, 故 A 错误;
B选项: $y = e^{\ln x}$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $y = \ln e^x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 定义域不同, 不是同一函数, 故 B 错误;
C选项: $y = \sqrt{x+1}\sqrt{x-1}$ 的定义域为 $[1, +\infty)$, $y = \sqrt{x^2-1}$ 的定义域为 $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$, 定义域不同, 不是同一函数, 故 C 错误;
D选项: $y = |x|$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $y = \sqrt{x^2} = |x|$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 解析式和定义域都相同, 是同一函数, 故 D 正确;
故选 D.

3 2018~2019学年天津和平区高一上学期期中第8题4分

(4分) 函数 $f(x) = x - \frac{1}{x}$ 的图象为 () .



答案 B

解析 $f(x) = x - \frac{1}{x}$ 为奇函数，排除D，
当 $x > 0$ 时， $f(x)$ 单调递增。
故选B。

4 2018~2019学年天津和平区高一上学期期中第7题4分

(4分) 设 $a = \log_{0.7} 0.8$ ， $b = \log_{1.1} 0.9$ ， $c = 1.1^{0.9}$ ，则 a 、 b 、 c 的大小顺序是 () .

- A. $a < b < c$ B. $b < c < a$ C. $b < a < c$ D. $c < a < b$

答案 C

解析 $a = \lg_{0.7} 0.8 < \lg_{0.7} 0.7 = 1$ ，
即 $0 < a < 1$ ， $b = \lg_{1.1} 0.9 < 0$ ， $c = 1.1^{0.9} > 1.1^0 = 1$ ，
即 $c > 1$ ，
 $\therefore c > a > b$ 。

故选C.

5 2018~2019学年天津和平区高一上学期期中第4题4分

(4分) 函数 $f(x) = \sqrt{\log_{0.6}(2-x)}$ 的定义域为().

- A. $[1, 2)$ B. $(1, 2]$ C. $(1, 2)$ D. $(-\infty, 2)$

答案 A

解析 定义域为 $\begin{cases} 2-x > 0 \\ \log_{0.6}(2-x) \geq 0 \end{cases}$,

解得 $x \in [1, 2)$.

故选A.

6 2018~2019学年天津和平区高一上学期期中第5题4分

(4分) 幂函数 $f(x) = x^a$ 的图象过点 $(-2, 4)$, 那么函数 $f(x)$ 的单调递增区间是().

- A. $(-\infty, +\infty)$ B. $[0, +\infty)$ C. $(-\infty, 0]$ D. $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$

答案 B

解析 $f(x) = x^a$ 过点 $(-2, 4)$, 即 $4 = (-2)^a$, 得 $a = 2$.

$\therefore f(x) = x^2$,

$\therefore$ 单调递增区间为 $[0, +\infty)$.

故选B.

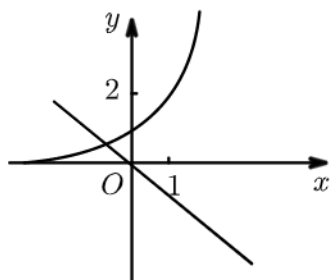
7 2018~2019学年天津和平区高一上学期期中第3题4分

(4分) 函数 $f(x) = 2^x + x$ 的零点所在的一个区间是().

- A. $(1, 2)$ B. $(0, 1)$ C. $(-1, 0)$ D. $(-2, -1)$

答案 C

解析 $f(x) = 2^x + x = 0$ ，即 $2^x = -x$ ，这两个函数图象交点，所在区间即 $f(x)$ 零点所在区间。



由图可知，交点所在区间为 $(-1, 0)$ 。

故选C。

8 2018~2019学年天津和平区高一上学期期中第9题4分

(4分) 已知偶函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递增，则满足条件 $f(2x+1) < f(5)$ 的 x 的取值范围是 ()。

- A. $(-3, 2)$ B. $(-2, 3)$ C. $(-2, 2)$ D. $[-3, 2]$

答案 A

解析 偶函数在 $[0, +\infty)$ 上单调递增，
在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减，
 $\therefore f(2x+1) < f(5)$ ，
 $\therefore 2x+1$ 到对称轴的距离，小于5到对称轴的距离。解得 $x \in (-3, 2)$ 。
故选A。

9 2018~2019学年天津和平区高一上学期期中第6题4分

(4分) 已知 $\lg a$ ， $\lg b$ 是方程 $6x^2 - 4x - 3 = 0$ 的两根，则 $\left(\lg \frac{b}{a}\right)^2$ 等于 ()。

- A. $\frac{4}{9}$ B. $\frac{13}{9}$ C. $\frac{14}{9}$ D. $\frac{22}{9}$

答案 D

解析 由韦达定理得：

$$\lg a + \lg b = \frac{2}{3}, \lg a \cdot \lg b = -\frac{1}{2},$$

$$\left(\lg \frac{b}{a}\right)^2 = (\lg b - \lg a)^2$$

$$= (\lg b + \lg a)^2 - 4 \lg a \cdot \lg b$$

$$= \frac{22}{9}.$$

故选D.

10 2018~2019学年天津和平区高一上学期期中第10题4分

(4分) 已知 $f(x)$ 为奇函数, 且当 $x < 0$ 时, $f(x) = x^2 + 4x + 1$, 若当 $x \in [1, 4]$ 时, $a \leq f(x) \leq b$ 恒成立, 则 $b - a$ 的最小值为().

A. 3

B. 4

C. 5

D. 6

答案 B

解析 $\because x < 0$ 时, $f(x) = x^2 + 4x + 1$,

$x \in (-4, -2)$ 时, $f(x)$ 单调递减, $x \in (-2, -1)$ 时, $f(x)$ 单调递增,

那么, $x > 0$ 时,

$x \in (1, 2)$ 时, $f(x)$ 单调递增,

$x \in (2, 4)$ 时, $f(x)$ 单调递减,

$\therefore$ 在 $[1, 4]$ 上, $f(x)_{\max} = f(2) = -f(-2) = 3$,

$f(x)_{\min} = f(4) = -f(-4) = -1$,

即 $-1 \leq f(x) \leq 3$,

$\therefore$ 当 $x \in [1, 4]$ 时, $a \leq f(x) \leq b$ 恒成立,

$\therefore [-1, 3] \subseteq [a, b]$,

$\therefore b - a \geq 3 - (-1) = 4$.

故选B.

2. 填空题 (本大题共5小题, 每小题4分, 共20分)

11 2018~2019学年天津南开区南开大学附属中学高一上学期期中第14题4分

(4分) 函数 $g(x) = \frac{1}{3}a^{2x+1} - 2$ 过定点 _____ .

答案 $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{3}\right)$

解析 令 $2x+1=0$ 得 $x=-\frac{1}{2}$,
 则 $g\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}a^0 - 2 = -\frac{5}{3}$,
 $\therefore$ 函数 $g(x)$ 的图像恒过定点 $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{3}\right)$.
 故答案为 : $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{3}\right)$.

12 2018~2019学年天津南开区南开大学附属中学高一上学期期中第12题4分

(4分) 设 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是偶函数, 若当 $x > 0$ 时, 有 $f(x) = \log_2(x+1)$, 则 $f(-7) =$ _____ .

答案 3

解析 $\because f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是偶函数 ,
 $\therefore f(-7) = f(7)$,
 $\because$ 当 $x > 0$ 时, 有 $f(x) = \log_2(x+1)$,
 $\therefore f(7) = \log_2(7+1) = 3$,
 $\therefore f(-7) = f(7) = 3$.
 故答案为 : 3 .

13 2018~2019学年天津和平区高一上学期期中第13题4分

(4分) 若指数函数 $f(x) = (a^2 - 1)^x$ ($a > 0$) 是减函数, 则实数 a 的取值范围是 _____ .

答案 $(1, \sqrt{2})$

解析 $f(x) = (a^2 - 1)^x$ 为指数函数且单调递减, 则 $\begin{cases} a > 0 \\ 0 < a^2 - 1 < 1 \end{cases}$,
 解得 $a \in (1, \sqrt{2})$.

14 2018~2019学年天津静海县静海县第一中学高一上学期期中第14题5分

(4分) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{x+1}, & 0 \leq x < 1 \\ |x-3|-1, & x \geq 1 \end{cases}$, 则函数 $g(x) = f(x) - \frac{1}{e}$ ($e = 2.71828 \dots$, 是自然对数的底数)的所有零点之和为 _____.

答案 $6 + \frac{1}{2e-1}$

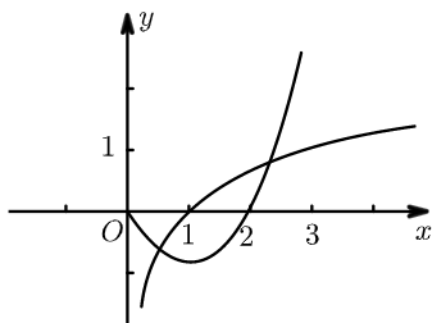
解析 当 $0 \leq x < 1$ 时, 由 $g(x) = f(x) - \frac{1}{e} = 0$,
 得 $f(x) = \frac{1}{e}$,
 $\therefore \frac{2x}{x+1} = \frac{1}{e}$,
 解得: $x = \frac{1}{2e-1}$;
 当 $x \geq 1$ 时, 由 $g(x) = f(x) - \frac{1}{e} = 0$, 得 $f(x) = \frac{1}{e}$,
 $\therefore |x-3|-1 = \frac{1}{e}$,
 解得: $x = 4 + \frac{1}{e}$ 或 $x = 2 - \frac{1}{e}$,
 综上所述: 函数 $g(x)$ 的所有零点之和为 $6 + \frac{1}{2e-1}$.
 故答案为: $6 + \frac{1}{2e-1}$.

15 2018~2019学年天津和平区高一上学期期中第14题4分

(4分) 函数 $f(x) = \begin{cases} |x+2|-1, & x \leq 0 \\ \ln x - x^2 + 2x, & x > 0 \end{cases}$ 的零点的个数是 _____.

答案 4

解析 $x \leq 0$ 时, $|x+2|-1 = 0$, $x = -1$ 或 $x = -3$,
 $x > 0$ 时, $\ln x - x^2 + 2x = 0$, 即 $\ln x = x^2 - 2x$.
 如图:



有2个交点，则有2个零点，

∴ 综上，共有4个零点．

3. 解答题 (共5小题，共40分)

16 2018~2019学年天津南开区南开大学附属中学高一上学期期中第16题8分

(8分) 化简或求值：

(1) (4分) $(\sqrt{a-1})^2 + \sqrt{(1-a)^2} + \sqrt[3]{(1-a)^3}$.

(2) (4分) $\lg 500 + \lg \frac{8}{5} - \frac{1}{2} \lg 64 + 50(\lg 2 + \lg 5)^2$.

答案

(1) 原式 = $a - 1$.

(2) 原式 = 52 .

解析

(1) 由题知 $a - 1 > 0$ 即 $a > 1$,

$$\text{所以 } (\sqrt{a-1})^2 + \sqrt{(1-a)^2} + \sqrt[3]{(1-a)^3}$$

$$= a - 1 + |1 - a| + 1 - a$$

$$= a - 1 .$$

(2) $\lg 500 + \lg \frac{8}{5} - \frac{1}{2} \lg 64 + 50(\lg 2 + \lg 5)^2$

$$= \lg(5 \times 10^2) + \lg 8 - \lg 5 - \lg \sqrt{64} + 50[\lg(2 \times 5)]^2$$

$$= \lg 5 + 2 + \lg 8 - \lg 5 - \lg 8 + 50$$

$$= 52 .$$

17 2018~2019学年天津南开区南开大学附属中学高一上学期期中第19题10分

(8分)

设 $f(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 当 $0 \leq x \leq 2$ 时, $y = x$; 当 $x > 2$ 时, $y = f(x)$ 的图像是顶点在 $P(4, 3)$, 且过点 $A(2, 2)$ 的抛物线的一部分.

(1) (4分) 求函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, -2)$ 上的解析式.

(2) (4分) 求函数 $f(x)$, $x \in (-4, 2)$ 的值域.

答案

(1) $f(x) = -2(x+3)^2 + 4$, $x \in (-\infty, -2)$.

(2) $[0, 4]$.

解析

(1) 当 $x > 2$ 时, 设 $f(x) = a(x-3)^2 + 4$,

$\therefore f(x)$ 的图象过点 $A(2, 2)$,

$\therefore f(2) = a(2-3)^2 + 4 = 2$,

$\therefore a = -2$,

$\therefore f(x) = -2(x-3)^2 + 4$,

设 $x \in (-\infty, -2)$, 则 $-x > 2$,

$\therefore f(-x) = -2(-x-3)^2 + 4$,

又 $\therefore f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为偶函数,

$\therefore f(-x) = f(x)$,

$\therefore f(x) = -2(x-3)^2 + 4$,

$\therefore f(x) = -2(x+3)^2 + 4$, $x \in (-\infty, -2)$.

(2) $\because 0 \leq x \leq 2$ 时, $y = x$, 且 $f(x)$ 为偶函数,

$\therefore -2 \leq x < 0$ 时, $y = -x$,

$\therefore -4 < x < 2$ 时, $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 2 \\ -x, & -2 \leq x < 0 \\ -2(x+3)^2 + 4, & -4 < x < -2 \end{cases}$,

$\therefore f(x)$ 在 $x = -3$ 时取得最大值为4,

在 $x = 0$ 时取得最小值为0,

$\therefore f(x)$ 在 $(-4, 2)$ 上的值域为 $[0, 4]$.

18

2018~2019学年天津和平区高一上学期期中第19题8分

(8分) 设 $f(x) = \frac{x(1-2^x)}{1+2^x}$.

(1) (4分) 判断函数 $f(x)$ 的奇偶性.

(2) (4分) 讨论函数 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调性.

答案

(1) $f(x)$ 为偶函数.

(2) $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的减函数.

解析

(1) 对于函数 $f(x)$, 其定义域为 $(-\infty, +\infty)$,

$\therefore$ 对定义域内任意 x ,

$$\begin{aligned} \text{都有 } f(-x) &= \frac{-x(1-2^{-x})}{1+2^{-x}} \\ &= \frac{-x(2^x-1)}{2^x+1} \\ &= \frac{x(1-2^x)}{1+2^x} \\ &= f(x), \end{aligned}$$

$\therefore f(x)$ 为偶函数.

(2) 设 x_1, x_2 是区间上任意两个实数, 且 $0 < x_1 < x_2$,

$$\begin{aligned} f(x_1) &= \frac{x_1(1-2^{x_1})}{1+2^{x_1}}, \quad f(x_2) = \frac{x_2(1-2^{x_2})}{1+2^{x_2}}, \\ \text{则 } f(x_1) - f(x_2) &= \frac{x_1(1-2^{x_1})}{1+2^{x_1}} - \frac{x_2(1-2^{x_2})}{1+2^{x_2}} \\ &= \frac{(x_1-x_2)(1-2^{x_1+x_2}) + (x_1+x_2)(2^{x_2}-2^{x_1})}{(1+2^{x_1})(1+2^{x_2})}, \end{aligned}$$

$\therefore x_1 - x_2 < 0, x_1 + x_2 > 0,$

$\therefore 1 - 2^{x_1+x_2} < 0, 2^{x_2} 2^{x_1} > 0, 1 + 2^{x_1} > 0, 1 + 2^{x_2} > 0,$

$\therefore f(x_1) - f(x_2) > 0$, 即 $f(x_1) > f(x_2)$,

$\therefore f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的减函数.

19

2018~2019学年天津南开区南开大学附属中学高一上学期期中第18题10分

(8分) 设 x_1, x_2 是关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 2(m-1)x + m+1 = 0$ 的两个实根, 又

$$f(m) = x_1^2 + x_2^2.$$

(1) (4分) 求函数 $f(m)$ 的解析式.

(2) (4分) 求此函数的最小值.

答案

(1) $f(m) = 4m^2 - 10m + 2$ ($m \geq 3$ 或 $m \leq 0$).

(2) 2.

解析

(1) 设 x_1, x_2 是关于 x 的一元二次方程,

$$x^2 - 2(m-1)x + m+1 = 0 \text{ 的两个实根,}$$

$$\text{则: } \Delta = 4(m-1)^2 - 4(m+1) \geq 0,$$

$$\text{解得 } m \geq 3 \text{ 或 } m \leq 0,$$

$$\text{则: } x_1 + x_2 = 2(m-1), x_1 - x_2 = m+1,$$

$$\text{则 } f(m) = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$$

$$= 4m^2 - 10m + 2 \quad (m \geq 3 \text{ 或 } m \leq 0).$$

$$(2) \text{ 由 (1) 得: } f(m) = 4m^2 - 10m + 2 = 4\left(m - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{17}{4},$$

$$\therefore m \leq 0 \text{ 或 } m \geq 3,$$

$$\therefore m = 0 \text{ 时, } f(m) \text{ 最小, 最小值为 } 2.$$

20 2018~2019 学年天津和平区高一上学期期中第20题10分

(8分) 已知 $f(x)$ 是定义在 $[-1, 1]$ 上的奇函数, 且对于任意的 $a, b \in [-1, 1]$, 当 $a+b \neq 0$ 时, 都有

$$\frac{f(a) + f(b)}{a+b} < 0.$$

(1) (4分) 求证: $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上是减函数.

(2) (4分) 解不等式 $f\left(x - \frac{1}{2}\right) + f\left(x - \frac{1}{4}\right) < 0$.

答案

(1) 证明见解析.

$$(2) \left(\frac{3}{8}, \frac{5}{4}\right].$$

解析

(1) 在 $[-1, 1]$ 上任取 $x_1 < x_2$,

$$\because f(x) \text{ 是奇函数,}$$

$$\therefore f(x_2) - f(x_1) = f(x_2) + f(-x_1),$$

$$\therefore \frac{f(x_2) + f(-x_1)}{x_2 - x_1} < 0,$$

$$\therefore \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0,$$

$$\therefore f(x_2) < f(x_1),$$

$$\therefore f(x) \text{ 在 } [-1, 1] \text{ 上是减函数.}$$

$$(2) \because f\left(x - \frac{1}{2}\right) + f\left(x - \frac{1}{4}\right) < 0,$$

$$\therefore f\left(x - \frac{1}{2}\right) - f\left(\frac{1}{4} - x\right) < 0,$$

$$\text{即 } f\left(x - \frac{1}{2}\right) < f\left(\frac{1}{4} - x\right),$$

$\because f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上是减函数,

$$\therefore x - \frac{1}{2} > \frac{1}{4} - x,$$

$$\therefore x > \frac{3}{8}.$$

$$\text{又 } \because -1 \leq x - \frac{1}{2} \leq 1, -1 \leq x - \frac{1}{4} \leq 1.$$

$$\text{综上所述: } a \in \left(\frac{3}{8}, \frac{5}{4}\right].$$