

01集合至函数难点攻克练习题

1. 集合

1 2020~2021学年10月天津和平区天津市第二十中学高一上学期月考第11题4分

若 $A = \{a^2, a+1, -3\}$, $B = \{a-3, 2a-1, a^2+1\}$, $A \cap B = \{-3\}$, 则 $a =$ _____ .

答案 -1

解析 $A \cap B = \{-3\}$, 则 $-3 \in B$,

分3种情况讨论: ① $a-3 = -3$, 则 $a = 0$, 则 $B = \{-3, -1, 1\}$, $A = \{0, 1, -3\}$, 此时

$A \cap B = \{1, -3\}$, 不合题意,

② $2a-1 = -3$, 则 $a = -1$, 此时 $A = \{1, 0, -3\}$, $B = \{-4, -3, 2\}$, 此时 $A \cap B = \{-3\}$, 符合题意,

③ $a^2+1 = -3$, 此时 a 无解, 不合题意;

则 $a = -1$,

故答案为-1.

2 2019~2020学年天津南开区天津市南开中学高一上学期单元测试《集合、不等式、均值不等式》第2题

已知集合 $A = \{x | x^2 - x - 12 \leq 0\}$, $B = \{x | 2m-1 < x < m+1\}$, 且 $A \cap B = B$, 则实数 m 的取值范围为 ().

A. $[-1, 2)$

B. $[-1, 3]$

C. $[2, +\infty)$

D. $[-1, +\infty)$

答案 D

解析 由 $x^2 - x - 12 \leq 0$, 得 $(x+3)(x-4) \leq 0$,

即 $-3 \leq x \leq 4$, 所以 $A = \{x | -3 \leq x \leq 4\}$,

又 $A \cap B = B$, 所以 $B \subseteq A$.

①当 $B = \emptyset$ 时, 有 $m+1 \leq 2m-1$,

解得 $m \geq 2$;

②当 $B \neq \emptyset$ 时, 有
$$\begin{cases} -3 \leq 2m - 1 \\ m + 1 \leq 4 \\ 2m - 1 < m + 1 \end{cases},$$

解得 $-1 \leq m < 2$,

综上, m 的取值范围为 $[-1, +\infty)$.

故选D .

3

2019~2020学年9月天津北辰区天津市第四十七中学高一上学期月考第17题13分

已知关于 x 的不等式 $x^2 - x + a - a^2 \leq 0$.

(1) 求不等式的解集 A .

(2) 已知集合 $B = \{x | -1 < x < 1\}$, 若 $a > \frac{1}{2}$, $A \cap B = A$, 求实数 a 的取值范围 .

答案

(1) ①当 $a > \frac{1}{2}$, $A = \{x | 1 - a \leq x \leq a\}$,

② 当 $a = \frac{1}{2}$, $A = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$,

③当 $a < \frac{1}{2}$, $A = \{x | a \leq x \leq 1 - a\}$.

(2) $\left(\frac{1}{2}, 1 \right)$.

解析

(1) 由 $x^2 - x + a - a^2 \leq 0$ 可得 $(x - a)[x - (1 - a)] \leq 0$,

①当 $a > 1 - a$ 即 $a > \frac{1}{2}$ 时, 不等式的解集 $A = \{x | 1 - a \leq x \leq a\}$,

② 当 $a = 1 - a$ 即 $a = \frac{1}{2}$ 时, 不等式的解集为 $A = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$,

③当 $a < 1 - a$ 即 $a < \frac{1}{2}$ 时, 不等式的解集为 $A = \{x | a \leq x \leq 1 - a\}$.

(2) 由(1)可知, 当 $a > \frac{1}{2}$ 时, $A = \{x | 1 - a \leq x \leq a\}$,

$\because B = \{x | -1 < x < 1\}$,

$\because A \cap B = A$,

$\therefore A \subseteq B$,

$$\begin{cases} a < 1 \\ 1 - a > -1 \\ a > \frac{1}{2} \end{cases},$$

解可得, $1 > a > \frac{1}{2}$,

$\therefore$ 实数 a 的取值范围 $\left(\frac{1}{2}, 1 \right)$.

2. 充分条件、必要条件

4 2020~2021学年天津和平区天津市第一中学高一上学期期中第7题3分

已知 $p: \frac{1}{x-2} \geq 1$, $q: |x-a| < 1$, 若 p 是 q 的充分不必要条件, 则实数 a 的取值范围为 ().

- A. $(-\infty, 3]$ B. $[2, 3]$
C. $(2, 3]$ D. $(2, 3)$

答案 C

解析

$$\begin{aligned} \because \frac{1}{x-2} \geq 1, \\ \therefore \frac{1}{x-2} - 1 \geq 0, \\ \therefore \frac{1-x+2}{x-2} \geq 0, \\ \therefore \frac{x-3}{x-2} \leq 0, \\ \therefore \begin{cases} (x-3)(x-2) \leq 0 \\ x-2 \neq 0 \end{cases}, \\ \therefore 2 < x \leq 3, \\ \because |x-a| < 1, \\ \therefore -1 < x-a < 1, \\ \therefore a-1 < x < 1+a, \\ \text{又} \because p \text{ 是 } q \text{ 的充分不必要条件}, \\ \therefore \begin{cases} 3 < 1+a \\ 2 \geq a-1 \end{cases}, \\ \therefore 2 < a \leq 3. \end{aligned}$$

故选: C.

5 2020~2021学年10月天津南开区南开大学附属中学高一上学期月考第15题4分

命题 $A: |x-1| < 3$, 命题 $B: (x+2)(x+a) < 0$; 若 A 是 B 的充分而不必要条件, 则实数 a 的取值范围是 _____.

答案 $(-\infty, -4)$

解析

$$A: \{x | -2 < x < 4\},$$

$$B: \{x | -2 < x < -a\} \text{ 或 } \{x | -a < x < -2\},$$

$\therefore A$ 是 B 的充分不必要条件,

$$\therefore B \supseteq A,$$

$$\therefore -a > 4,$$

$$\therefore (-\infty, -4).$$

3. 基本不等式

6

2020~2021学年10月天津河北区天津市第十四中学高一上学期月考第16题

设 a, b 为实数, 且 $a + b = 3$, 则 $2^a + 2^b$ 的最小值是 ().

A. 6

B. $4\sqrt{2}$

C. $2\sqrt{2}$

D. $2\sqrt{6}$

答案

B

解析

因为 $2^a > 0, 2^b > 0$, 由基本不等式得 $2^a + 2^b \geq 2\sqrt{2^a \cdot 2^b} = 2\sqrt{2^{a+b}} = 4\sqrt{2}$, 当且仅当 $a = b = \frac{3}{2}$ 时取等号.

故选B.

7

2019~2020学年10月天津南开区天津市南开中学高一上学期周测B卷第4题

“ $a, b > 0$ 且 $a \neq b$ ”是“ $ab < \frac{a^2 + b^2}{2}$ ”的 ().

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

答案

A

解析

充分性:

若 $a, b > 0$ 且 $a \neq b$,

$$\therefore (a - b)^2 > 0,$$

$$\therefore a^2 + b^2 > 2ab,$$

$$\therefore \frac{a^2 + b^2}{2} > ab,$$

必要性：

$$\text{若 } ab < \frac{a^2 + b^2}{2},$$

$$\therefore (a - b)^2 > 0 \text{ 不能得出 } a, b > 0,$$

$\therefore$ 充分不必要.

故选：A.

8 2018~2019学年天津南开区天津市育红中学高二上学期期中第8题5分

已知 $x > 0, y > 0$ ，且 $\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 1$ ，若 $x + 2y > m^2 + 2m$ 恒成立，则实数 m 的取值范围是（ ）.

A. $(-\infty, -2] \cup [4, +\infty)$

B. $(-\infty, -4] \cup [2, +\infty)$

C. $(-2, 4)$

D. $(-4, 2)$

答案 D

解析

$$\therefore \frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 1,$$

$$\therefore x + 2y = (x + 2y) \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{y} \right)$$

$$= 4 + \frac{4y}{x} + \frac{x}{y} \geq 4 + 2\sqrt{4} = 8,$$

$$\therefore x + 2y > m^2 + 2m \text{ 恒成立},$$

$$\therefore m^2 + 2m < 8,$$

$$\therefore -4 < m < 2.$$

9 2018~2019学年天津静海县静海县第一中学高二上学期期中第6题5分

已知 $x > 1, y > 1$ ，且 $\lg x \cdot \lg y = 1$ ，则 xy 的最小值为（ ）.

A. 100

B. 10

C. 1

D. $\frac{1}{10}$

答案 A

解析

$$x > 1, y > 1,$$

$$\therefore \lg x > 0, \lg y > 0,$$

$$\text{且 } 1 = \lg x \cdot \lg y \leq \left(\frac{\lg x + \lg y}{2} \right)^2,$$

$$\therefore \lg x + \lg y = \lg xy \geq 2,$$

则 $xy \geq 100$, 则 xy 的最小值为 100.

故选 A.

4. 函数三要素

10 2019~2020 学年天津河西区高一上学期期中第 19 题 10 分

为保护水资源, 提倡节约用水, 某城市对居民生活用水实行“阶梯水价”, 计费方法如下表:

每户每月用水量	水价
不超过 12m^3 的部分	3 元/ m^3
超过 12m^3 但不超过 18m^3 的部分	6 元/ m^3
超过 18m^3 的部分	9 元/ m^3

设某户居民本月实际用水量为 x (单位: m^3), 应交纳水费为 y (单位: 元).

- 求 y 关于 x 的函数解析式.
- 若某户居民本月交纳的水费为 48 元, 求此户居民本月用水量.

答案

$$(1) \quad y = \begin{cases} 3x, & 0 < x \leq 12 \\ 6x - 36, & 12 < x \leq 18 \\ 9x - 90, & x > 18 \end{cases}.$$

(2) 14.

解析

(1) 设每户每月用水量为 x , 水价为 y 元,

$$\text{则 } y = \begin{cases} 3x, & 0 < x \leq 12 \\ 36 + (x - 12) \times 6, & 12 < x \leq 18 \\ 36 + 36 + (x - 18) \times 9, & x > 18 \end{cases},$$

$$\text{即 } y = \begin{cases} 3x, & 0 < x \leq 12 \\ 6x - 36, & 12 < x \leq 18 \\ 9x - 90, & x > 18 \end{cases}.$$

(2) 由题意得 $12 < x \leq 18$,

$$\therefore 48 = 6x - 36, \quad x = 14.$$

11 2019~2020学年天津河东区高一上学期期末第2题5分

函数 $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x-2}$ 的定义域是 () .

- A. $(-1, +\infty)$
- B. $(-1, 2) \cup (2, +\infty)$
- C. $(-1, 2)$
- D. $[-1, 2) \cup (2, +\infty)$

答案 B

解析 要使函数 $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x-2}$ 有意义,

$$\text{则} \begin{cases} x+1 > 0 \\ x-2 \neq 0 \end{cases},$$

解得 $x > -1$ 且 $x \neq 2$,

所以函数 $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x-2}$ 的定义域为 $(-1, 2) \cup (2, +\infty)$.

故选B.

12 2019~2020学年天津和平区天津市耀华中学高一上学期期末第11题4分

函数 $f(x) = \frac{2^x - 1}{2^x + 1}$ 的值域为 _____ .

答案 $(-1, 1)$

解析 $\because f(x) = \frac{2^x - 1}{2^x + 1} = \frac{2^x + 1 - 2}{2^x + 1} = 1 - \frac{2}{2^x + 1}$

$$\because 2^x + 1 > 1$$

$$\therefore 0 < \frac{2}{2^x + 1} < 2$$

$$\therefore -2 + 1 < f(x) < 0 + 1$$

$$\text{即 } -1 < f(x) < 1$$

综上所述, 答案为: $(-1, 1)$.