

02初高衔接之不等式二练习题

1. 绝对值不等式

1 $|x - 3| > 1$.

答案 $x > 4$ 或 $x < 2$.

解析 略

2 $|2x - 3| \geq x + 1$.

答案 $x \in \left(-\infty, \frac{2}{3}\right] \cup [4, +\infty)$.

解析 ①当 $x + 1 \leq 0$ 即 $x \leq -1$ 时, 恒成立.

②当 $x > -1$ 时, $4x^2 + 9 - 12x \geq x^2 + 1 + 2x$,

即 $3x^2 - 14x + 8 \geq 0$,

解得 $x \in \left(-1, \frac{2}{3}\right] \cup [4, +\infty)$,

综上所述, $x \in \left(-\infty, \frac{2}{3}\right] \cup [4, +\infty)$.

3 $|x - 2| < |x + 1|$.

答案 $x > \frac{1}{2}$.

解析 $|x - 2| < |x + 1|$,

左右同时平方: $(x - 2)^2 < (x + 1)^2$,

$(x - 2)^2 - (x + 1)^2 < 0$,

$(x - 2 + x + 1)[x - 2 - (x + 1)] < 0$,

$$(2x - 1)(-3) < 0 ,$$

$$2x - 1 > 0 ,$$

$$x > \frac{1}{2} .$$

4 $|2x - 1| - |x - 2| < 0 .$

答案 $-1 < x < 1 .$

解析 $|2x - 1| - |x - 2| < 0 ,$

$$|2x - 1| < |x - 2| ,$$

左右同时平方得 $(2x - 1)^2 < (x - 2)^2 ,$

$$(2x - 1)^2 - (x - 2)^2 < 0 ,$$

$$[2x - 1 - (x - 2)](2x - 1 + x - 2) < 0 ,$$

$$(x + 1)(3x - 3) < 0 ,$$

$$(x + 1)(x - 1) < 0 ,$$

$$-1 < x < 1 .$$

5 不等式 $|x + 3| \leq |2x|$ 的解集是 _____ .

答案 $(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$

解析 不等式 $|x + 3| \leq |2x| ,$

$$(x + 3)^2 \leq 4x^2 ,$$

则 $3x^2 - 6x - 9 \geq 0 ,$

$$x^2 - 2x - 3 \geq 0 ,$$

$$(x - 3)(x + 1) \geq 0 ,$$

解得 $x \geq 3$ 或 $x \leq -1 ,$

所以不等式 $|x + 3| \leq |2x|$ 的解集为 $(-\infty, -1] \cup [3, +\infty) .$

6 $|x-1| + |x+3| < 6$.

答案 $\{x | -4 < x < 2\}$.

解析 当 $x < -3$ 时, $1-x-x-3 < 6$, 解得 $x > -4$, 所以 $-4 < x < -3$. 当 $-3 \leq x < 1$ 时, $1-x+x+3 < 6$ 即 $4 < 6$, 符合, 所以 $-3 \leq x < 1$. 当 $x \geq 1$ 时, $x-1+x+3 < 6$, $2x < 4$, 即 $x < 2$, 所以 $1 \leq x < 2$. 综上, 不等式的解集为 $\{x | -4 < x < 2\}$.

7 设 $x \in \mathbf{R}$, 解不等式 $|x| + |2x-1| > 2$.

答案 $\left\{x \mid x < -\frac{1}{3} \text{ 或 } x > 1\right\}$.

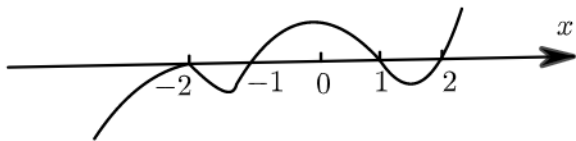
解析 当 $x < 0$ 时, 原不等式可化为 $-x+1-2x > 2$, 解得 $x < -\frac{1}{3}$,
当 $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ 时, 原不等式可化为 $x+1-2x > 2$, 即 $x < -1$, 无解;
当 $x > \frac{1}{2}$ 时, 原不等式可化为 $x+2x-1 > 2$, 解得 $x > 1$.
综上, 原不等式的解集为 $\left\{x \mid x < -\frac{1}{3} \text{ 或 } x > 1\right\}$.

2. 高次不等式

8 解不等式 $(x+2)^2(x-1)^3(x+1)(x-2) < 0$.

答案 $(-\infty, -2) \cup (-2, -1) \cup (1, 2)$.

解析 由 $(x+2)^2(x-1)^3(x+1)(x-2) < 0$, 可画出大致图象如下:

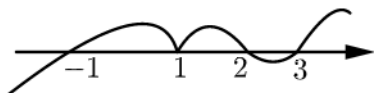


根据穿针引线法, 可得 $x \in (-\infty, -2) \cup (-2, -1) \cup (1, 2)$.

9 $(x+1)(x-1)^2(x-2)^3(x-3) \leq 0$.

答案 $(-\infty, -1] \cup \{1\} \cup [2, 3]$.

解析 由高次不等式得：

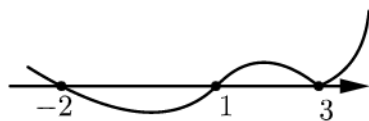


$\therefore$ 解集为 $(-\infty, -1] \cup \{1\} \cup [2, 3]$.

10 不等式 $(x-1)(x+2)(x-3)^2 \leq 0$ 的解集为 _____ .

答案 $[-2, 1] \cup \{3\}$

解析 根据穿根法，如图，



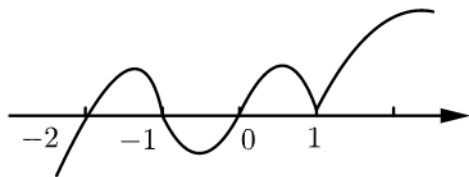
$\therefore -2 \leq x \leq 1$ 或 $x = 3$.

$\therefore$ 解集为 $[-2, 1] \cup \{3\}$.

11 $x(x-1)^2(x+1)^3(x+2) \geq 0$.

答案 $x \geq 0$ 或 $-2 \leq x \leq -1$.

解析 $x(x-1)^2(x+1)^3(x+2) \geq 0$,



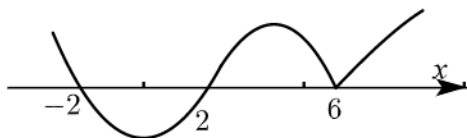
$\therefore x \geq 0$ 或 $-2 \leq x \leq -1$.

12 $(x^2 - 4)(x - 6)^2 \leq 0$.

答案 $\{x | -2 \leq x \leq 2 \text{ 或 } x = 6\}$.

解析 $\because (x^2 - 4)(x - 6)^2 = (x - 2)(x + 2)(x - 6)^2 \leq 0$,

由穿针引线法如图



$\therefore$ 不等式解集为 $\{x | -2 \leq x \leq 2 \text{ 或 } x = 6\}$.

13 不等式 $(2 - x)(x + 3)(x^2 + 1) \leq 0$ 的解为 _____.

答案 $\{x | x \leq -3 \text{ 或 } x > 2\}$

解析 根据题意, $x^2 + 1 > 0$,

$$\text{则 } (2 - x)(x + 3)(x^2 + 1) \leq 0 \Rightarrow (x - 2)(x + 3) \geq 0,$$

解可得 $x \leq -3$ 或 $x \geq 2$,

即不等式的解集为 $\{x | x \leq -3 \text{ 或 } x > 2\}$.

故答案为: $\{x | x \leq -3 \text{ 或 } x > 2\}$.

14 $\frac{x^2 + x - 2}{(x - 1)^2} \leq 0$.

答案 $-2 \leq x < 1$.

解析 略

15 $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x - 3} \geq 0$.

答案 $x < -3$ 或 $x \geq 2$.

解析 略

16 $\frac{3x-5}{x^2+2x-3} \leq 2$.

答案 $x > 1$ 或 $-1 \leq x \leq \frac{1}{2}$ 或 $x < -3$.

解析 略

17 $\frac{4x-2}{x+1} > x$.

答案 $(-\infty, -1) \cup (1, 2)$.

解析 $\frac{4x-2}{x+1} - x = \frac{-x^2+3x-2}{x+1} > 0 \Rightarrow \frac{(x-1)(x-2)}{x+1} < 0$,

等价于 $(x+1)(x-1)(x-2) < 0$,

基于序示由标根法, 得解集为 $(-\infty, -1) \cup (1, 2)$.

3. 无理不等式

18 不等式 $\sqrt{x+3} < 2$ 的解是 _____ .

答案 $[-3, 1)$

解析 由 $\sqrt{x+3} < 2$ 可得 $\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ x+3 < 4 \end{cases}$, 解得 $3 \leq x < 1$

故不等式的解集为 $[-3, 1)$,

故答案为: $[-3, 1)$.

19 解关于 x 的不等式： $\sqrt{x-1} + 2x \leq 5$.

答案 $[1, 2]$.

解析 $\sqrt{x-1} + 2x \leq 5 \Leftrightarrow 5 - 2x \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 5-2x \geq 0 \\ (5-2x)^2 \geq x-1 \end{cases} \Rightarrow 1 \leq x \leq 2.$

故不等式的解集为 $[1, 2]$.

20 $\sqrt{3-2x} > x$.

答案 $x < 1$.

解析 略.

21 解不等式 $\sqrt{2x+5} > x+1$.

答案 $\left\{x \mid -\frac{5}{2} \leq x < 2\right\}$.

解析 方法一：原不等式等价于 $\begin{cases} x+1 \geq 0, \\ 2x+5 > x^2+2x+1, \end{cases}$ ①或 $\begin{cases} 2x+5 \geq 0, \\ x+1 < 0. \end{cases}$ ②

由①得 $\begin{cases} x \geq -1, \\ x^2 < 4 \end{cases} \Rightarrow -1 \leq x < 2$; 由②得 $\begin{cases} x \geq -\frac{5}{2}, \\ x < -1 \end{cases} \Rightarrow -\frac{5}{2} \leq x < -1.$

$\therefore$ 原不等式的解集为 $\left\{x \mid -\frac{5}{2} \leq x < 2\right\}$.

方法二：设 $t = \sqrt{2x+5}$, 则 $x = \frac{t^2-5}{2}$.

原不等式化为 $t > \frac{t^2-5}{2} + 1$, 即 $t^2 - 2t - 3 < 0$, 解得 $-1 < t < 3$,

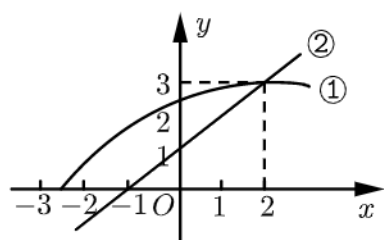
$\therefore 0 \leq \sqrt{2x+5} < 3, 0 \leq 2x+5 < 9, -\frac{5}{2} \leq x < 2.$

$\therefore$ 原不等式的解集为 $\left\{x \mid -\frac{5}{2} \leq x < 2\right\}$.

方法三：令 $\begin{cases} y = \sqrt{2x+5}, \\ y = x+1. \end{cases}$

在直角坐标平面上①、②所表示的曲线如图所示. 曲线①、②交于点 $P(2, 3)$, 且在 $\left[-\frac{5}{2}, 2\right)$

上, ①位于②的上方, 因此, 解集为 $\left\{x \mid -\frac{5}{2} \leq x < 2\right\}$.



22 $\sqrt{2x^2 - 6x + 4} < x + 2$.

答案 $(0, 1] \cup [2, 10)$.

解析 略 .

23 $\sqrt{x^2 - 1} > \sqrt{2x^2 + 4x}$.

答案 $(-2 - \sqrt{3}, -2]$.

解析 略 .