

02初高衔接之不等式二

【仅教师可见】注意题目中若含有解集两字，按照解处理

1. 绝对值不等式

绝对值不等式的解法

- ①公式法
- ②平方法
- ③分情况讨论法

公式法

1 $|3x + 5| > 1$.

答案 $x > -\frac{4}{3}$ 或 $x < -2$.

解析 原式即 $3x + 5 > 1$ 或 $3x + 5 < -1$ ，解得 $x > -\frac{4}{3}$ 或 $x < -2$.

2 如何解不等式 $|2x - 1| < 4$

答案 $-\frac{3}{2} < x < \frac{5}{2}$

解析 问题的关键是如何去掉绝对值符号，常用的方法有两个

第一， $|2x - 1| < 4 \Leftrightarrow -4 < 2x - 1 < 4$ ，然后求解；当然，对于如图所示的简单的绝对值不等式，还可以通过它的几何意义求解.

$|2x - 1| < 4 \Leftrightarrow 2\left|x - \frac{1}{2}\right| < 4 \Leftrightarrow \left|x - \frac{1}{2}\right| < 2$ ，即到数轴上 $\frac{1}{2}$ 的点的距离小于 2 的点的集合，由数轴可知解集为 $-\frac{3}{2} < x < \frac{5}{2}$

$$|x^2 - 3| > 2x.$$

答案 $\{x|x < 1 \text{ 或 } x > 3\}.$

解析 原不等式可化为 $x^2 - 3 > 2x$ 或 $x^2 - 3 < -2x$,

$$\text{即 } x^2 - 2x - 3 > 0 \text{ 或 } x^2 + 2x - 3 < 0.$$

$$\therefore x > 3 \text{ 或 } x < -1 \text{ 或 } -3 < x < 1.$$

故原不等式的解集为 $\{x|x < 1 \text{ 或 } x > 3\}.$

4 不等式 $|2x - 1| - x < 1$ 的解是 _____.

答案 $(0, 2)$

解析 略.

平方法

5 解不等式: $|x - 1| < |x - 3|.$

答案 $x < 2.$

6 $2|x| > |x - 1|.$

答案 $x < -1 \text{ 或 } x > \frac{1}{3}.$

解析 两边平方得 $4x^2 > (x - 1)^2$, 移项得 $(x + 1)(3x - 1) > 0$, 解得 $x < -1$ 或 $x > \frac{1}{3}.$

分情况讨论法

7 不等式 $x + |2x + 3| \geq 2$ 的解集为 _____ .

答案 $(-\infty, -5] \cup \left[-\frac{1}{3}, +\infty\right)$

8 $|x - 2| + |2x - 3| < 4$.

答案 $\{x | \frac{1}{3} < x < 3\}$.

解析 $x \geq 2$ 时, $x - 2 + 2x - 3 < 4$, 解得: $x < 3$, $\frac{3}{2} < x < 2$ 时, $2 - x + 2x - 2 < 4$, 解得: $x < 4$,
 $x \leq \frac{3}{2}$ 时, $2 - x + 3 - 2x < 4$, 解得: $x > \frac{1}{3}$,
 故不等式的解集是: $\{x | \frac{1}{3} < x < 3\}$.

9 $|x + 1| - |2x - 1| > 1$.

答案 $\frac{1}{3} < x < 1$.

解析 ① $x < -1$ 时, $\Rightarrow x - 2 > 1$ 无解,
 ② $-1 \leq x < \frac{1}{2}$ 时, $\Rightarrow 3x > 1 \Rightarrow \frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$,
 ③ $x \geq \frac{1}{2}$ 时, $\Rightarrow -x + 2 > 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq x < 1$,
 综上: $\frac{1}{3} < x < 1$.

10 设 $x \in \mathbf{R}$, 解不等式 $2|x + 1| + |x| < 4$.

答案 $\left\{x \mid -2 < x < \frac{2}{3}\right\}$.

解析 当 $x > 0$ 时, 原不等式可化为 $2x + 2 + x < 4$, 解得 $0 < x < \frac{2}{3}$,
 当 $-1 \leq x \leq 0$ 时, 原不等式可化为 $2x + 2 - x < 4$, 解得 $-1 \leq x \leq 0$,
 当 $x < -1$ 时, 原不等式可化为 $-2x + 2 + x < 4$, 解得 $x > -2$,
 故不等式的解集是: $\{x | -2 < x < \frac{2}{3}\}$.

当 $x < -1$ 时, 原不等式可化为 $-2x - 2 - x < 4$, 解得 $-2 < x < -1$,

综上, 原不等式的解集为 $\left\{x \mid -2 < x < \frac{2}{3}\right\}$.

2. 高次不等式

1. 概念

最高次项的次数高于二次的不等式称为**高次不等式**

2. 一元高次不等式的解法

数轴穿根法(又称**穿针引线法**)

其一般步骤是:

①化形: 将不等式化为一端为0, 另一端为一次因式或二次不可约因式的**积**的形式, 并使**每个因式最高次项的系数为正**;

②求根, 标根: 求出各因式对应方程的根, 并在数轴上从小到大依次标出, 注意**点的虚实**;

③画曲线: 从数轴的**最右端上方**起, 自右至左依次经过各个点(根)画曲线, 注意**遇奇次重根穿过数轴, 遇偶次重根不过**;

④写解集: 记数轴上方为正, 下方为负, 根据不等号的方向, 写出不等式的解集.

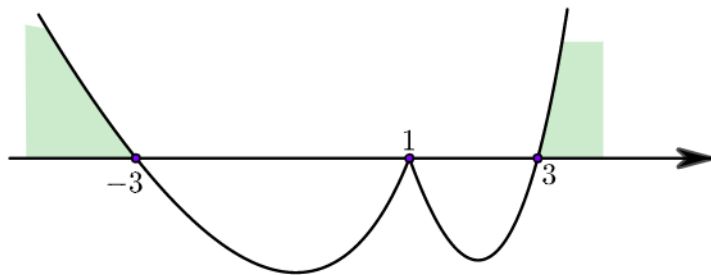
3. 举例

解不等式 $(x^2 + 2x - 3)(x - 1)(-8x + 24) \leq 0$ 时

原不等式等价于 $(x + 3)(x - 1)^2(x - 3) \geq 0$, 相应方程的根为 $-3, 1, 3$,

其中1为二次重根. 把各根在数轴上标出来, 如图, 由图可得原不等式的解集为

$(-\infty, -3] \cup 1 \cup [3, +\infty)$.



整式型——已因式分解

11 $(x+1)(x-2)(x+3)(x-4) > 0$ (直接求解) .

答案 $(-\infty, -3) \cup (-1, 2) \cup (4, +\infty)$

解析 略

12 $(x+2)(x+3)^2(x-1)^3 \leq 0$ (非严格不等号的处理) .

答案 $\{-3\} \cup [-2, -1]$

解析 略

13 $-x(x+2)(x-4) > 0$ (调整最高次项符号) .

答案 $(-\infty, -2) \cup (0, 4)$

解析 略

14 $(x+4)(x+5)^2(2-x)^3 < 0$ (系数符号处理, 指数奇偶判断) .

答案 $(-\infty, -5) \cup (-5, -4) \cup (2, +\infty)$

解析 略

15 $(x-1)(x^2-x+1) > 0$ (恒正因式处理) .

答案 $(1, +\infty)$

解析 略

整式型——未因式分解

16 $15x + x^2 - 2x^3 < 0$.

答案 $x < -\frac{5}{2}$ 或 $0 < x < 3$.

解析 $(2x^2 + 3x)(-x + 3) < 0$
 $x(2x + 5)(-x + 3) < 0$
 $x < -\frac{5}{2}$ 或 $0 < x < 3$.

17 $(x^2 + 6x + 8)(x^2 - 4x + 3) \leq 0$.

答案 $[-4, -2] \cup [1, 3]$.

解析 因式分解得： $(x + 2)(x + 4)(x - 1)(x - 3) \leq 0$,
 基于序示由标根法，易得解集为：
 $[-4, -2] \cup [1, 3]$.

18 $x^3 + x^2 - 3x - 3 > 0$.

答案 $(-\sqrt{3}, -1) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$.

解析 原式为 $x^2(x - 1) - 3(x + 1) > 0$
 $\therefore (x + 1)(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}) > 0$
 $\therefore$ 得解集为 $(-\sqrt{3}, -1) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$.

$$x^4 + 8x^2 - 9 < 0.$$

教法备注

【题型】恒正因式的处理

答案 $x \in (-1, 1)$.

解析 $x^4 + 8x^2 - 9 < 0$

$$\Rightarrow (x^2 - 1)(x^2 + 9) < 0$$

$$\Rightarrow x^2 < 1$$

$$\Rightarrow x \in (-1, 1).$$

分式型——已因式分解

20 $\frac{x+5}{(x-1)^2} \geq 2.$

教法备注

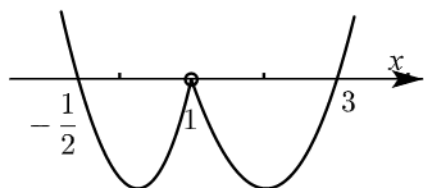
【金金备注】 这道题应该放在分式型——未因式分解的部分……放在这个位置很明显是我马虎看错了，但是学生版已经走印刷了就没办法调整了，大家讲的时候把这道题跳过放在22题后面讲吧！

答案 $\left\{ x \mid -\frac{1}{2} \leq x < 1 \text{ 或 } 1 < x \leq 3 \right\}.$

解析 由 $\frac{x+5}{(x-1)^2} \geq 2$ 可得，即 $\frac{x+5}{(x-1)^2} - 2 = \frac{(3-x)(2x+1)}{(x-1)^2} \geq 0,$

$$\text{等价于 } \begin{cases} (x-3)(2x+1)(x-1)^2 \leq 0, \\ x-1 \neq 0 \end{cases}$$

由穿针引线法如图



$\therefore$ 不等式解集为 $\left\{x \mid -\frac{1}{2} \leq x < 1 \text{ 或 } 1 < x \leq 3\right\}$.

21 $\frac{(-3x-3)(2x-2)}{x+5} \leq 0$.

教法备注

【题型】系数符号的处理

答案 $x \geq 1$ 或 $-5 < x \leq -1$.

解析 略

分式型——未因式分解

22 不等式 $\frac{x^2-16}{x-1} \geq 0$ 的解集是 _____.

教法备注

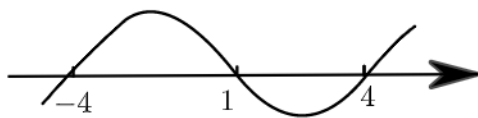
【题型】端点数值的取舍

答案 $x \in [-4, 1) \cup [4, +\infty)$

解析 $\frac{x^2-16}{x-1} = \frac{(x+4)(x-4)}{x-1} \geq 0$,

$$\begin{cases} (x+4)(x-4)(x-1) \geq 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases},$$

由数轴标根法得：



$x \in [-4, 1) \cup [4, +\infty)$.

故答案为： $x \in [-4, 1) \cup [4, +\infty)$.

$$\frac{7x-2}{x+4} \geq x.$$

教法备注

【题型】需移项通分，端点数值的取舍

答案 $x \in (-\infty, -4) \cup [1, 2].$

解析

$$\begin{aligned} \frac{7x-2}{x+4} &\geq x \\ \Rightarrow x - \frac{7x-2}{x+4} &\leq 0 \\ \Rightarrow \frac{(x-1)(x-2)}{x+4} &\leq 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} (x-1)(x-2)(x+4) \leq 0 \\ x \neq -4 \end{cases} \\ \Rightarrow x &\in (-\infty, -4) \cup [1, 2]. \end{aligned}$$

24 $\frac{x^2-3x}{x^2-x-2} \leq x.$

答案 $(-1, 0] \cup \{1\} \cup (2, +\infty).$

解析

$$\begin{aligned} \because \frac{x^2-3x}{x^2-x-2} &\leq x, \\ \therefore \frac{x(x-1)^2}{(x-2)(x+1)} &\geq 0, \\ \therefore x-1=0 &\text{或} \begin{cases} x \geq 0 \\ (x-2)(x+2) > 0 \end{cases} \text{或} \begin{cases} x < 0 \\ (x-2)(x+1) < 0 \end{cases}, \\ \text{解得: } -1 < x &\leq 0 \text{ 或 } x = 1 \text{ 或 } x > 2, \\ \text{故不等式的解集是 } &(-1, 0] \cup \{1\} \cup (2, +\infty). \end{aligned}$$

3. 无理不等式

无理不等式求解依据

$$\begin{aligned} (1) \sqrt{f(x)} > g(x) &\Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > [g(x)]^2 \end{cases} \text{或} \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}. \\ (2) \sqrt{f(x)} < g(x) &\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < [g(x)]^2 \end{cases}. \end{aligned}$$

根号式大于或大于等于右侧式

25 不等式 $\sqrt{x+1} > x-1$ 的解为 _____ .

答案 $[-1, 3)$

解析 当 $-1 \leq x \leq 1$ 时, 显然合题;

当 $x > 1$ 时, $\sqrt{x+1} > x-1$, 即 $x+1 > (x-1)^2$, 解得 $1 < x < 3$;

综上, 不等式 $\sqrt{x+1} > x-1$ 的解为 $[-1, 3)$.

26 $\sqrt{x^2 - 4x} \geq x$.

答案 $x \leq 0$.

解析 $x^2 - 4x \geq x^2$

$x \leq 0$.

27 $\sqrt{x^2 + 3x - 4} > x+1$

答案 $\{x | x \leq -4 \text{ 或 } x > 5\}$

解析 $\sqrt{x^2 + 3x - 4} > x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x^2 + 3x - 4 \geq 0 \\ x^2 + 3x - 4 > (x+1)^2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x+1 < 0 \\ x^2 + 3x - 4 \geq 0 \end{cases}$, 解得 $\{x | x \leq -4 \text{ 或 } x > 5\}$.

根号式小于或小于等于右侧式

28 不等式 $\sqrt{x-1} < 2x-8$ 的解集是 _____ .

答案 $(5, +\infty)$

解析 由 $\sqrt{x-1} < 2x-8$ 得 $2(x-1) - \sqrt{x-1} - 6 > 0$, 即 $(2\sqrt{x-1}+3)(\sqrt{x-1}-2) > 0$.
而 $\sqrt{x-1} \geq 0$, 于是只能 $\sqrt{x-1}-2 > 0$, 解得 $x > 5$,
即原不等式的解集为 $(5, +\infty)$.
故答案为: $(5, +\infty)$.

29 解不等式 $\sqrt{2x^2+1} - x \leq 1$.

答案 $\{x|0 \leq x \leq 2\}$.

解析 $\sqrt{2x^2+1} - x \leq 1$,
 $\sqrt{2x^2+1} \leq x+1$,
 $2x^2+1 \leq x^2+2x+1$,
 $x^2-2x \leq 0$,
 $\therefore \{x|0 \leq x \leq 2\}$.

两边根号式

30 解不等式 $\sqrt{3x-4} - \sqrt{x-3} > 0$.

答案 $\{x|x \geq 3\}$.

解析 $\because$ 根式有意义, $\therefore$ 必须有: $\begin{cases} 3x-4 \geq 0 \\ x-3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \geq 3$,
又有: 原不等式可化为 $\sqrt{3x-4} > \sqrt{x-3}$,
两边平方得: $3x-4 > x-3$, 解之: $x > \frac{1}{2}$,
 $\therefore \{x|x \geq 3\} \cap \left\{x|x > \frac{1}{2}\right\} = \{x|x \geq 3\}$.

31 $\sqrt{10-2x} - \sqrt{x-2} > 0$

答案 $\{x|2 \leq x < 4\}$

解析 解原不等式可化为 $\begin{cases} 10 - 2x \geq 0 \\ x - 2 \geq 0 \\ 10 - 2x > x - 2 \end{cases}$ 解得 $\{x|2 \leq x < 4\}$

32 $\sqrt{x^2 - 4x + 3} - \sqrt{x - 1} > 0$.

答案 $(4, +\infty)$.