

04对数函数2及基本初等函数综合

1. 对数函数综合问题



赋值运算

1

2018~2019学年天津静海县静海县第一中学高一上学期期中第15题10分

已知函数 $f(x) = \log_a(x+2) - 1$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) .

若 $f(6) = 2$, 求函数 $f(x)$ 的零点 .

答案

$x = 0$.

解析

$\because$ 函数 $f(x) = \log_a(x+2) - 1$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) ,

$f(6) = 2$, 即 $\log_a(6+2) - 1 = 2$,

$\therefore \log_a 8 = 3$,

即 $a^3 = 8$,

$\therefore a = 2$,

$\therefore f(x) = \log_2(x+2) - 1$,

令 $f(x) = 0$,

即 $\log_2(x+2) - 1 = 0$,

$\therefore x+2 = 2$,

$\therefore x = 0$,

即 $f(x)$ 的零点为 $x = 0$.

故答案为 : $x = 0$.

分段函数单调性

2 2017~2018学年天津河北区天津市第二中学高一上学期期中第9题4分

已知 $f(x) = \begin{cases} (3-a)x - a, & x < 1 \\ \log_a x, & x \geq 1 \end{cases}$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的增函数, 那么 a 的取值范围是 ().

- A. $(1, +\infty)$ B. $(-\infty, 3)$ C. $\left[\frac{3}{2}, 3\right)$ D. $(1, 3)$

答案 C

解析 $\because f(x) = \begin{cases} (3-a)x - a, & (x < 1) \\ \log_a x, & (x \geq 1) \end{cases}$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的增函数,

$$\therefore \begin{cases} 3-a > 0 \\ (3-a) \cdot 1 - a \leq \log_a 1 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} 3-a > 0 \\ 3-2a \leq 0 \end{cases},$$

$$\text{解得 } \frac{3}{2} \leq a < 3,$$

$$\therefore \text{实数 } a \text{ 的取值范围是 } \left[\frac{3}{2}, 3\right).$$

综上所述.

故选C.

复合函数单调性

3 2018~2019学年天津南开区天津市南开中学高一上学期期中第13题4分

函数 $f(x) = \lg(x^2 - 3x - 10)$ 的单调递增区间是 _____.

答案 $(5, +\infty)$

解析 由 $x^2 - 3x - 10 > 0$,

$$\text{得 } x < -2 \text{ 或 } x > 5,$$

而 $y = \lg u$ 是增函数,

由复合函数的同增异减法则知,

$f(x)$ 的单调增区间是 $(5, +\infty)$.

4 2018~2019学年天津河西区天津市第四中学高一上学期期中第6题3分

已知 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 2x)$ 的单调递增区间是() .

- A. $(1, +\infty)$ B. $(2, +\infty)$ C. $(-\infty, 0)$ D. $(-\infty, 1)$

答案 C

解析 令 $t = x^2 - 2x > 0$ 求得 $x < 0$, 或 $x > 2$, 故函数的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$,

且 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 2x) = g(t) = \log_{\frac{1}{2}} t$.

根据复合函数的单调性 , 本题即求函数 $t = x^2 - 2x$ 在定义域内的减区间 .

再利用二次函数的性质可得函数 $t = x^2 - 2x$ 在定义域内的减区间为 $(-\infty, 0)$,

故选C .

5 2019~2020学年天津河东区高一上学期期末第11题4分

函数 $y = \log_{\frac{1}{2}}(9 - x^2)$ 的单调递减区间为 _____ .

答案 $(-3, 0)$

解析 根据题意 , 设 $t = 9 - x^2$, 则 $y = \log_{\frac{1}{2}} t$,

$t = 9 - x^2 > 0$, 解可得 $-3 < x < 3$,

则在 $(-3, 0)$ 上 , $t = 9 - x^2$ 为增函数 , 在 $(0, 3)$ 上 , $t = 9 - x^2$ 为减函数 ;

而 $y = \log_{\frac{1}{2}} t$ 为减函数 ,

若函数 $y = \log_{\frac{1}{2}}(9 - x^2)$ 为减函数 , 则必有 $x \in (-3, 0)$.

对数函数与函数性质综合

6 2015~2016学年天津南开区南开大学附属中学高一上学期期中第18题8分

已知函数 $f(x) = \log_a(x+1)$, $g(x) = \log_a(1-x)$ (其中 $a > 0$, 且 $a \neq 1$) .

- (1) 求函数 $f(x) + g(x)$ 的定义域 .
- (2) 判断函数 $f(x) - g(x)$ 的奇偶性, 并予以证明 .
- (3) 求使 $f(x) + g(x) < 0$ 成立的 x 的集合 .

教法备注

【教师备注】第一问：注意复合函数定义域的求解，需要**分别求出 $f(x)$, $g(x)$ 的定义域**，最后**取交集**，而**不是进行同底对数运算，最后求解 $(x+1)(x-1) > 0$** .

第三问：注意分类讨论，同时结果要和第一问的定义域取交集，以及最终**结果要写成集合的形式** .

答案

- (1) $\{x | -1 < x < 1, x \in \mathbf{R}\}$.
- (2) 函数 $H(x) = f(x) - g(x)$ 为奇函数；证明见解析 .
- (3) 当 $0 < a < 1$ 时， x 的集合是 $\emptyset$;
当 $a > 1$ 时， x 的集合为 $\{x | 0 < x < 1 \text{ 或 } -1 < x < 0\}$.

解析

- (1) 由题意得： $\begin{cases} x+1 > 0 \\ 1-x > 0 \end{cases}$,
 $\therefore -1 < x < 1$,
 $\therefore$ 所求定义域为 $\{x | -1 < x < 1, x \in \mathbf{R}\}$.
- (2) 函数 $f(x) - g(x)$ 为奇函数 ,
令 $H(x) = f(x) - g(x)$,
则 $H(x) = \log_a(x+1) - \log_a(1-x) = \log_a \frac{x+1}{1-x}$,
 $\therefore H(-x) = \log_a \frac{-x+1}{1+x} = -\log_a \frac{x+1}{1-x} = -H(x)$,
 $\therefore$ 函数 $H(x) = f(x) - g(x)$ 为奇函数 .
- (3) $\therefore f(x) + g(x) = \log_a(x+1) + \log_a(1-x)$
 $= \log_a(1-x^2) < 0 = \log_a 1$,
 $\therefore$ 当 $a > 1$ 时， $0 < 1-x^2 < 1$,

$\therefore 0 < x < 1$ 或 $-1 < x < 0$,

当 $0 < a < 1$ 时, $1 - x^2 > 1$, 不等式无解,

综上: 当 $0 < a < 1$ 时, x 的集合是 $\emptyset$;

当 $a > 1$ 时, x 的集合为 $\{x | 0 < x < 1 \text{ 或 } -1 < x < 0\}$.

精进不休 日新月异

7 设函数 $f(x) = \lg(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

- (1) 确定函数 $f(x)$ 的定义域 .
- (2) 判断函数 $f(x)$ 的奇偶性 .
- (3) 证明函数 $f(x)$ 在其定义域上是单调增函数 .

答案

- (1) 函数定义域为 $\mathbf{R}$.
- (2) 证明见解析 .
- (3) $\sqrt{x_1^2 + 1} < \sqrt{x_2^2 + 1}$.

解析

- (1) $\because \sqrt{x^2} = |x|$.

$$\therefore \sqrt{x^2 + 1} > |x| \geq x .$$

$$\text{当 } x < 0 \text{ 时, } x + \sqrt{x^2 + 1} > x + |x| = 0 .$$

$$\text{当 } x \geq 0 \text{ 时, } x + \sqrt{x^2 + 1} > 0 .$$

$$\therefore \text{由 } x + \sqrt{x^2 + 1} > 0 \text{ 恒成立 .}$$

即函数定义域为 $\mathbf{R}$.

- (2) $f(x)$ 为定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数 .

$$\begin{aligned} \because f(-x) &= \lg(\sqrt{x^2 + 1} - x) \\ &= \lg \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} \\ &= \lg \frac{(\sqrt{x^2 + 1})^2 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} \\ &= \lg \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} \\ &= -\lg \sqrt{x^2 + 1} + x = -f(x) . \end{aligned}$$

$\therefore f(x)$ 为定义域内的奇函数 .

- (3) 设 $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$, 且 $x_1 < x_2$.

$$\begin{aligned} \text{则 } f(x_1) - f(x_2) &= \lg(\sqrt{x_1^2 + 1} + x_1) - \lg(\sqrt{x_2^2 + 1} + x_2) \\ &= \lg \frac{\sqrt{x_1^2 + 1} + x_1}{\sqrt{x_2^2 + 1} + x_2} . \end{aligned}$$

$$\because x_1 < x_2 .$$

$$\therefore \sqrt{x_1^2 + 1} < \sqrt{x_2^2 + 1} .$$

$$\therefore O < \frac{\sqrt{x_1^2 + 1} + x_1}{\sqrt{x_2^2 + 1} + x_2} < 1 .$$

$$\therefore \lg \frac{\sqrt{x_1^2 + 1} + x_1}{\sqrt{x_2^2 + 1} + x_2} < 0 .$$

$$\therefore f(x_1) - f(x_2) < 0 , \text{ 即 } f(x_1) < f(x_2) .$$

$\therefore f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上是增函数 .

又 $\because f(x)$ 是奇函数 .

$\therefore f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数 .

8 2018~2019 学年天津河西区天津市实验中学高一上学期期中第 19 题

已知函数 $f(x) = \log_a(1+x)$, $g(x) = \log_a(3-x)$. ($a > 0, a \neq 1$)

(1) 当 $a > 1$ 时 , 若 $h(x) = f(x) + g(x)$ 的最大值为 2 , 求 a 的值 .

(2) 求使 $f(x) - g(x) > 0$ 的 x 取值范围 .

答案

(1) 2 .

(2) 当 $a > 1$ 时 , 解得 $1 < x < 3$;

当 $0 < a < 1$ 时 , 解得 $-1 < x < 1$.

解析

(1) 当 $a > 1$ 时 , $h(x) = f(x) + g(x) = \log_a[(1+x)(3-x)] = \log_a(-x^2 + 2x + 3)$ 的定义域为 $(-1, 3)$,

且在 $(-1, 1)$ 上递增 , 在 $(1, 3)$ 上递减 ,

所以 $x = 1$ 时 , $h(x)$ 取得最大值为 $h(1)$

$$= \log_a(-1 + 2 + 3) = \log_a 4 ,$$

由题意得 $\log_a 4 = 2$, 解得 $a = 2$.

(2) $\because f(x) - g(x) > 0 \Leftrightarrow \log_a(1+x) - \log_a(3-x) > 0 \Leftrightarrow \log_a(1+x) > \log_a(3-x)$,

当 $a > 1$ 时 , $1+x > 3-x > 0$, 解得 $1 < x < 3$;

当 $0 < a < 1$ 时 , $3-x > 1+x > 0$, 解得 $-1 < x < 1$.

 复合型对数函数的值域

9 2018~2019学年天津西青区天津市西青区杨柳青第一中学高一上学期期中第19题8分

已知函数 $f(x) = \log_2(x+1) - 2$.

若 $x \in (-1, 3]$, 求 $f(x)$ 的值域 .

答案 $(-\infty, 0]$.

解析 $\because x \in (-1, 3]$,

$$\therefore x+1 \in (0, 4] ,$$

$$\therefore \log_2(x+1) \in (-\infty, 2] ,$$

$$\therefore f(x) \text{ 值域为 } (-\infty, 0] .$$

10 2018~2019学年天津静海县静海县第一中学高一上学期期中第15题10分

已知函数 $f(x) = \log_a(x+2) - 1$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) .

若 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上的最大值与最小值互为相反数, 求 a 的值 .

答案 $2\sqrt{3}$.

解析 无论 $a > 1$ 或 $0 < a < 1$,

$f(x)$ 均为单调函数 ,

$\therefore$ 最值均在区间端点取得 ,

$\therefore f(x)$ 在 $x \in [1, 2]$ 上的最大值与最小值互为相反数 ,

$$\therefore f(1) + f(2) = 0 ,$$

$$\text{即 } \log_a 3 - 1 + \log_a 4 - 1 = 0 ,$$

$$\therefore \log_a 12 = 2 ,$$

$$\therefore a^2 = 12 ,$$

$$\therefore a = \pm 2\sqrt{3} ,$$

又 $\because a > 0$ 且 $a \neq 1$,

$$\therefore a = 2\sqrt{3}.$$

故答案为： $2\sqrt{3}$.

2. 基本初等函数综合



分段函数赋值运算

11

2018~2019学年10月天津河北区天津市第二中学高一上学期月考第7题5分

已知函数 $f(x) = \begin{cases} x+2, & x \leq -1 \\ x^2, & x > -1 \end{cases}$, 若 $f(x_0) = 3$, 则 x_0 的值为 () .

A. 1

B. 1或 $\sqrt{3}$

C. $\pm\sqrt{3}$

D. $\sqrt{3}$

答案

D

解析

当 $x_0 \leq -1$ 时, $f(x_0) = x_0 + 2 = 3$, 解得 $x_0 = 1$, 舍去,

当 $x_0 > -1$ 时,

$f(x_0) = x_0^2 = 3$, 解得 $x_0 = -\sqrt{3}$ 或 $\sqrt{3}$,

$\therefore x_0 = \sqrt{3}$.

12

2018~2019学年9月天津河东区天津市第五十四中学高一上学期月考第4题3分

设函数 $f(x) = \begin{cases} 1-x^2, & x \leq 1 \\ x^2+x-2, & x > 1 \end{cases}$, 则 $f\left(\frac{1}{f(2)}\right)$ 的值为 () .

A. $\frac{15}{16}$

B. $-\frac{27}{16}$

C. $\frac{8}{9}$

D. 18

答案

A

解析

$$\because f(x) = \begin{cases} 1-x^2, & x \leq 1 \\ x^2+x-2, & x > 1 \end{cases}$$

$$\therefore f\left(\frac{1}{f(2)}\right) = f\left(\frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16} . \text{ 故选A.}$$

13 2018~2019学年天津西青区天津市西青区杨柳青第一中学高一上学期期末第11题5分

已知 $f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x, & x \leq 0 \\ \log_2 x, & x > 0 \end{cases}$, 若 $f(a) = \frac{1}{2}$, 则 a 的值等于 _____

答案 $\sqrt{2}$

解析 由题意得：若 $a \leq 0$, 则 $2^a = \frac{1}{2}$, $\therefore a = 1$ (舍去),

若 $a > 0$, 则 $\log_2 a = \frac{1}{2}$, $\therefore a = \sqrt{2}$,

$\therefore a = \sqrt{2}$.

14 2018~2019学年天津河东区高一上学期期中第10题4分

已知函数 $f(x) = \begin{cases} \log_{\frac{1}{3}}(x+1), & x > 0 \\ -x^2 - 3x, & x \leq 0 \end{cases}$, 则 $f(f(-2)) =$ _____.

答案 -1

解析 $\because -2 < 0$,

$$\therefore f(-2) = -(-2)^2 - 3(-2),$$

$$= -4 + 6 = 2 > 0,$$

$$\therefore f(2) = \log_{\frac{1}{3}}(2+1) = -1,$$

$$\therefore f(f(-2)) = -1.$$

故答案为：-1.

相同函数

15 2018~2019学年天津河东区高一上学期期中第2题4分

下列函数中与 $y = x$ 相同的为() .

A. $s = \frac{t^2}{t}$

B. $u = \log_2 2^y$

C. $y = \sqrt{x^2}$

D. $m = |n|$

答案 B

解析 $y = x$ 的定义域值域均为 $\mathbf{R}$,

A中 , 定义域为 $\{t|t \neq 0\}$ 不符 ,

B中 , $u = \log_2 2^y = y$ 与题意相符 ,

C中 , $y = \sqrt{x^2} = |x| \geq 0$ 不符 ,

D中 , $m = |n| \geq 0$ 不符 .

故选B .

16 2018~2019学年天津西青区天津市西青区杨柳青第一中学高一上学期期中第4题4分

下列函数中 , 与 $y = x$ 相同的函数是() .

A. $y = \sqrt{x^2}$

B. $y = \lg 10^x$

C. $y = \frac{x^2}{x}$

D. $y = (\sqrt{x-1})^2 + 1$

答案 B

解析 A选项 : $y = \sqrt{x^2} = |x| (x \in \mathbf{R})$, 与函数 $y = x$ 的对应法则不同 , 不是同一函数 ;

B选项 : $y = \lg 10^x = x (x \in \mathbf{R})$, 与函数 $y = x$ 的定义域相同 , 对应法则也相同 , 是同一函数 ;

C选项 : $y = \frac{x^2}{x} = x (x \neq 0)$, 与函数 $y = x$ 的定义域不同 , 不是同一函数 ;

D选项 : $y = (\sqrt{x-1})^2 + 1 = x (x \geq 1)$, 与函数 $y = x$ 的定义域不同 , 不是同一函数 .

故选B.

17 2018~2019学年天津河西区天津市第四中学高一上学期期中第2题3分

下列各组函数中 $f(x)$ 和 $g(x)$ 表示相同的函数的是() .

A. $f(x) = \lg x^2$, $g(x) = 2 \lg x$

B. $f(x) = x$, $g(x) = \sqrt{x^2}$

C. $f(x) = 1(x \in \mathbf{R} \text{ 且 } x \neq 0)$, $g(x) = \frac{x}{|x|}$

D. $f(x) = x$, $g(x) = \sqrt[3]{x^3}$

答案 D

解析 A . $f(x) = \lg x^2$ 定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, $g(x) = 2 \lg x$ 定义域为 $(0, +\infty)$, 故 $f(x) \neq g(x)$, 故A错误 ;

B . $f(x) = x$, $g(x) = \sqrt{x^2} = |x| \neq x$, 故B错误 ;

C . 当 $x < 0$ 时 , $g(x) = \frac{x}{|x|} = \frac{x}{-x} = -1 \neq 1$, 故C错误 ;

D . $f(x) = x = \sqrt[3]{x^3} = g(x)$, 正确 .

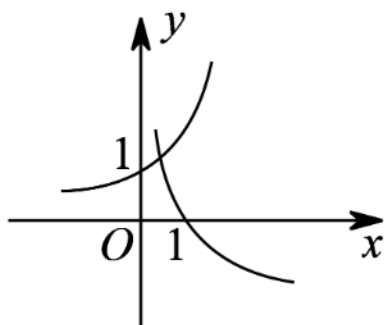
故选D .

函数图像

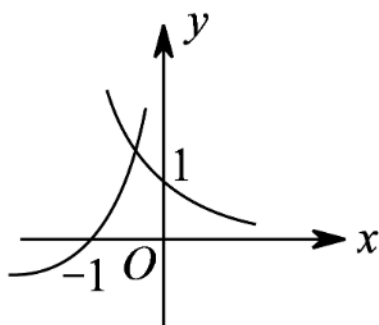
18 2018~2019学年天津河西区天津市第四十二中学高一上学期期中第5题3分

函数 $y = a^x$ 与 $y = \log_{\frac{1}{a}} x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 在同一坐标系中的图象可能是 () .

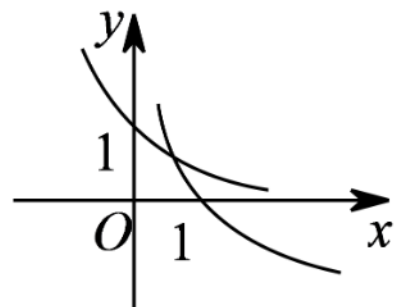
A.



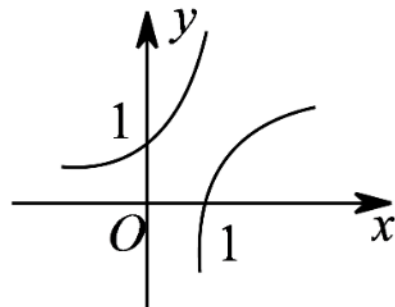
B.



C.



D.



答案 A

解析 $y = \log_{\frac{1}{a}} x$ 化简为: $y = -\log_a x$,

根据 $y = -\log_a x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$ 可排除B,

选项C, 根据 $y = a^x$ 的图象可知 $0 < a < 1$, $y = -\log_a x$ 的图象应该为单调增函数, 故不正确,

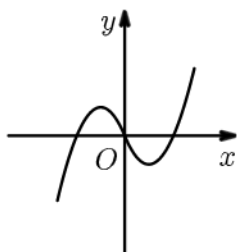
选项D, 根据 $y = a^x$ 的图象可知 $a > 1$, $y = -\log_a x$ 的图象应该为单调减函数, 故不正确.

故选A.

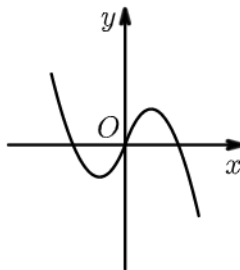
19 2018~2019学年12月天津南开区天津中学高一上学期月考第7题3分

函数 $y = x(x^2 - 1)$ 的大致图象是 () .

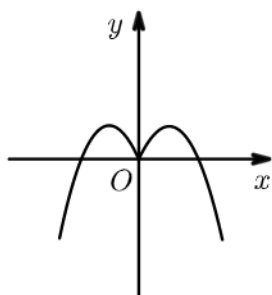
A.



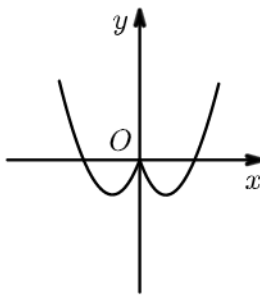
B.



C.



D.



答案 A

解析 $f(-x) = -x(x^2 - 1) = -f(x)$ 为奇函数, 排除 C, D,

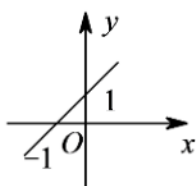
当 x 充分大时, 比如 $x = 2$ 时, $y = 6 > 0$.

故选 A.

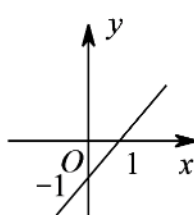
20 2018~2019学年天津和平区天津市耀华中学高一上学期期中第5题4分

函数 $y = \frac{|x|}{x} + x$ 的图象是 () .

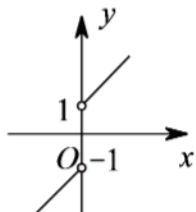
A.



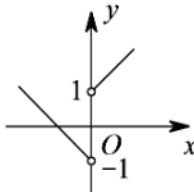
B.



C.



D.



答案 C

解析 函数 $y = \frac{|x|}{x} + x = \begin{cases} x+1, & x > 0 \\ x-1, & x < 0 \end{cases}$.

所以函数的图象是C .

故选C .



零点问题

21 2018~2019学年天津和平区高一上学期期中第3题4分

函数 $f(x) = 2^x + x$ 的零点所在的一个区间是 () .

A. (1, 2)

B. (0, 1)

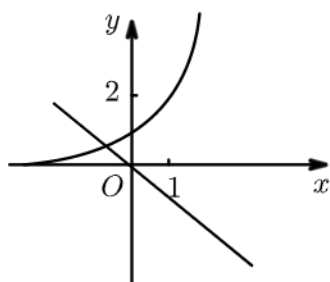
C. (-1, 0)

D. (-2, -1)

答案 C

解析 $f(x) = 2^x + x = 0$, 即 $2^x = -x$, 这两个函数图象交点 ,

所在区间即 $f(x)$ 零点所在区间 .



由图可知，交点所在区间为 $(-1, 0)$ 。

故选C。

22 2018~2019学年天津蓟县高一上学期期中第9题4分

函数 $f(x) = \frac{1}{x} - \log_2 x$ 的零点所在区间是()。

A. $(0, \frac{1}{2})$

B. $(\frac{1}{2}, 1)$

C. $(1, 2)$

D. $(2, 3)$

答案 C

解析 $f(\frac{1}{2}) = 2 + 1 = 3 > 0$ ， $f(1) = 1 > 0$ ， $f(2) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} < 0$ ，

故函数 $f(x) = \frac{1}{x} - \log_2 x$ 的零点必落在区间 $(1, 2)$ 。

故选C。

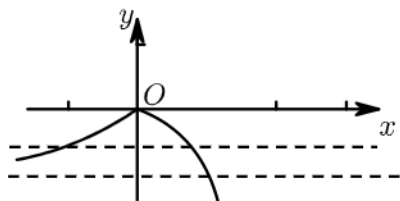
23 2018~2019学年天津河西区天津市第四中学高一上学期期中第8题3分

已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2, & x \geq 0 \\ 2^x - 1, & x < 0 \end{cases}$ ，若函数 $g(x) = f(x) - b$ 有两个零点，则实数 b 的取值范围是 () .

- A. $0 < b < 1$ B. $b < 0$ C. $-2 < b < 0$ D. $-1 < b < 0$

答案 D

解析 作出函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2, & x \geq 0 \\ 2^x - 1, & x < 0 \end{cases}$ 的图象，



令 $g(x) = 0$ ，可得 $f(x) = b$ ，

画出直线 $y = b$ ，平移可得当 $-1 < b < 0$ 时，

直线 $y = b$ 和函数 $y = f(x)$ 有两个交点，

则 $g(x)$ 的零点有两个．

故选D．

24 2018~2019学年12月天津南开区南开大学附属中学高一上学期月考第3题3分

函数 $f(x) = x^2 - 2^x$ 零点个数是 () .

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

答案 C

解析 根据指数函数与二次函数的图象，可知 $x < 0$ 时， $y = 2^x$ 递增，值域 $(0, 1)$ ，

$y = x^2$ 递减，值域 $(0, +\infty)$ ，有一个交点， $x > 0$ 时， $f(2) = 2^2 - 2^2 = 0$ ， $f(4) = 4^2 - 2^4 = 0$ ，

综上 $f(x) = x^2 - 2^x$ 有3个零点．

故选C．

