

03对数运算与对数函数1

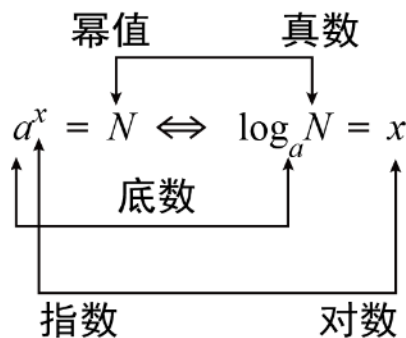
1. 对数运算

1. 对数的定义

一般地，如果 $a^b = N$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$)，

那么 b 叫做以 a 为底 N 的对数，记作 $b = \log_a N$ ，

其中 a 叫做对数的**底数**， N 叫做**真数**。



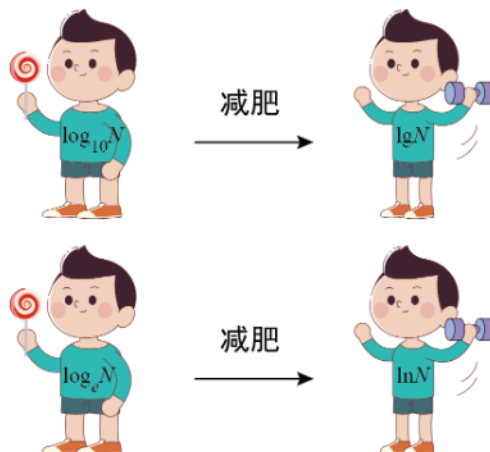
2. 两个特殊的对数

(1) **常用对数**：我们将**以10为底**的对数叫做常用对数；

为了简便， N 的常用对数 $\log_{10} N$ 简记为 $\lg N$ 。

(2) **自然对数**：在科学技术中常使用**以e为底**的对数，我们称之为自然对数；

为了简便， N 的自然对数 $\log_e N$ 简记为 $\ln N$ 。



教法备注

【补充】无理对数 $e=2.71828\dots$

3. 对数的性质

对数 $\log_a N$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 具有如下性质：

① 负数和零没有对数，即 $N > 0$ 。

② 1 的对数是 0，即 $\log_a 1 = 0$ ($\because a^0 = 1$)。

③ 底的对数是 1，即 $\log_a a = 1$ ($\because a^1 = a$)。

④ 对数恒等式：如果把 $a^b = N$ 中的 b 写成 $\log_a N$ ，那么 $a^{\log_a N} = N$ ，同理 $\log_a a^b = b$ 。

对数的基础性质

1 2019~2020学年天津河西区高一上学期期末第12题4分

计算 $\log_2 (4^7 \times 2^5) = \underline{\hspace{2cm}}$.

答案 19

解析 $\log_2 (4^7 \times 2^5) = \log_2 (2^{14} \times 2^5) = \log_2 2^{19} = 19\log_2 2 = 19$.

故答案为19 .

2 2019~2020学年11月天津和平区天津市耀华中学高一上学期月考第10题4分

计算： $(0.25)^0 - \left(\frac{1}{16}\right)^{-0.75} + \ln \sqrt{e} + 2^{2-\log_2 3} = \underline{\hspace{2cm}}$.

答案 $-\frac{31}{6}$

解析 原式 $= 1 - 8 + \frac{1}{2} + 4 \div 3$
 $= -\frac{31}{6}$.

3 2019~2020学年天津红桥区高一上学期期末第10题4分

求值： $\log_2 (\lg 10) = \underline{\hspace{2cm}}$.

答案 0

解析 $\log_2 (\lg 10) = \log_2 1 = 0$.

4. 对数的运算公式

如果 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, $M > 0$, $N > 0$, 那么:

$$(1) \log_a(MN) = \log_a M + \log_a N, \text{ 即积的对数等于对数的和.}$$

推广: $\log_a(N_1 N_2 \cdots N_K) = \log_a N_1 + \log_a N_2 + \cdots + \log_a N_K$.

$$(2) \log_a\left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N, \text{ 即商的对数等于对数的差.}$$

$$(3) \log_a M^n = n \log_a M (n \in \mathbf{R}).$$



同底对数运算

4

2018~2019 学年天津蓟县高一上学期期中第16题8分

化简:

$$\frac{\lg 2 + \lg 5 - \lg 8}{\lg 50 - \lg 40}.$$

答案

1.

解析

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{\lg \frac{2 \times 5}{8}}{\lg \frac{50}{40}} \\ &= \frac{\lg \frac{5}{4}}{\lg \frac{5}{4}} \\ &= 1. \end{aligned}$$

5

2018~2019 学年天津西青区天津市西青区杨柳青第一中学高一上学期期中第17题8分

计算:

$$2\log_5 10 + \log_5 0.25 + \lg 0.25 - \lg 25 + \ln \frac{1}{e}.$$

答案

-1.

解析

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \log_5(100 \times 0.25) + \lg \frac{0.25}{25} - 1 \\ &= 2 - 2 - 1 \\ &= -1. \end{aligned}$$

6 2018~2019学年天津河西区高一上学期期末第15题8分

计算 $\log_3 \sqrt{27} + \lg 25 + \lg 4 - 7^{\log_7 2} - 27^{-\frac{2}{3}}$.

答案 $\frac{25}{18}$.

解析 $\log_3 \sqrt{27} + \lg 25 + \lg 4 - 7^{\log_7 2} - 27^{-\frac{2}{3}}$
 $= \log_3 3^{\frac{3}{2}} + \lg(25 \times 4) - 2 - 3^{3 \times (-\frac{2}{3})}$
 $= \frac{3}{2} + 2 - 2 - \frac{1}{9}$
 $= \frac{25}{18}$.

精进不休 日新月异

7 2019~2020学年11月天津和平区天津市第二十中学高一上学期月考第14题8分

计算：

$e^{\ln 4} + \log_{\sqrt{5}} 25 + \lg 25 + \lg 2 \cdot \lg 50 + (\lg 2)^2$.

答案 10 .

解析 原式 $= 4 + \log_{\frac{1}{\sqrt{5}}} 5^2 + \lg 5^2 + \lg 2(1 + \lg 5) + (\lg 2)^2$
 $= 4 + 4 + 2 \lg 5 + \lg 2 + \lg 2 \cdot \lg 5 + (\lg 2)^2$
 $= 8 + 2 \lg 5 + \lg 2 + \lg 2(\lg 5 + \lg 2)$
 $= 8 + 2 \lg 5 + 2 \lg 2$
 $= 8 + 2(\lg 5 + \lg 2)$
 $= 8 + 2$
 $= 10$.

5. 对数换底公式：

$\log_N M = \frac{\log_a M}{\log_a N}$ ，由此可得：

$$(1) \log_N M \cdot \log_M N = 1.$$

$$(2) \log_{N^m} M^n = \frac{n}{m} \log_N M.$$

$$(3) \log_N M = \frac{\log_a M}{\log_a N} = \frac{\log_b M}{\log_b N}.$$

由(3)可得：

$$(4) \log_a M \cdot \log_b N = \log_a N \cdot \log_b M.$$

换底公式

8 2018~2019学年天津河东区高一上学期期中第16题8分

化简下列各式：

$$(\log_3 5 - \log_3 15)(\log_3 2 + \log_9 2) \log_5 7 \log_{49} \frac{1}{5} \log_8 9.$$

答案 $\frac{1}{2}$.

解析 $(\log_3 5 - \log_3 15)(\log_3 2 + \log_9 2) \log_5 7 \log_{49} \frac{1}{5} \log_8 9,$
 $= \log_3 \frac{5}{15} \times \left(\log_3 2 + \frac{1}{2} \log_3 2 \right) \cdot \log_5 7 \cdot \log_{7^2} \frac{1}{5} \cdot \log_{2^3} 3^2,$
 $= -1 \times \log_3 2 \times 2^{\frac{1}{2}} \times \frac{\ln 7}{\ln 5} \times \frac{\ln \frac{1}{5}}{2 \ln 7} \times \frac{2}{3} \log_2 3,$
 $= -1 \times \left(-\frac{1}{2} \right) \times \frac{2}{3} \times \frac{\ln 2^{\frac{3}{2}}}{\ln 3} \times \frac{\ln 3}{\ln 2},$
 $= \frac{1}{2}.$

9 2019~2020学年12月天津河西区天津市新华中学高一上学期月考第10题5分

计算： $\log_3 \frac{\sqrt[4]{27}}{3} + \lg 25 + \lg 4 + 7^{\log_7 2} + \log_2 3 \cdot \log_9 4 = \underline{\hspace{2cm}}.$

答案 $\frac{19}{4}$

解析 $\log_3 \frac{\sqrt[4]{27}}{3} + \lg 25 + \lg 4 + 7^{\log_7 2} + \log_2 3 \cdot \log_9 4$
 $= \log_3 \frac{3^{\frac{3}{4}}}{3} + \lg(25 \times 4) + 2 + \log_2 3 \cdot \log_3 2$

$$\begin{aligned}
 &= \log_3 3^{-\frac{1}{4}} + 2 + 2 + 1 \\
 &= \frac{19}{4} . \\
 &\text{故答案为: } \frac{19}{4} .
 \end{aligned}$$

2. 对数函数的图像与性质

1. 对数函数的定义

函数 $y = \log_a x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 叫做对数函数;

其中 x 是自变量, 函数的定义域是 $(0, +\infty)$, 值域为实数集 $\mathbf{R}$.

2. 两个特殊的对数函数

(1) 以10为底的对数函数 $y = \lg x$ 叫做常用对数函数;

(2) 以e为底的对数函数 $y = \ln x$ 叫做自然对数函数.

3. 对数函数的图像及性质

	$a > 1$	$0 < a < 1$
图像		
性质	定义域: $(0, +\infty)$	
	值域: $\mathbf{R}$	
	过点 $(1, 0)$, 即当 $x=1$ 时, $y=0$	
	$x \in (0, 1)$ 时 $y < 0$, $x \in (1, +\infty)$ 时 $y > 0$	$x \in (0, 1)$ 时 $y > 0$, $x \in (1, +\infty)$ 时 $y < 0$
	在 $(0, +\infty)$ 上是增函数	在 $(0, +\infty)$ 上是减函数

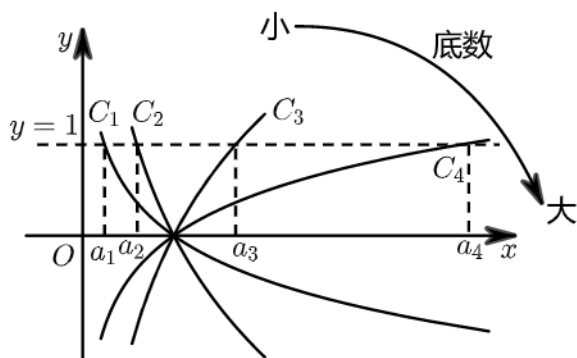
4.底数对对数函数图像的影响

(1)设 $y_1 = \log_a x$, $y_2 = \log_b x$, 其中 $a > 1$, $b > 1$ (或 $0 < a < 1$, $0 < b < 1$),

当 $x > 1$ 时“底大图低”, 即若 $a > b$, 则 $y_1 < y_2$;

当 $0 < x < 1$ 时“底大图高”, 即若 $a > b$, 则 $y_1 > y_2$.

这一性质可通过下图帮助理解, 其中, C_1, C_2, C_3, C_4 分别是函数 $y = \log_{a_1} x$, $y = \log_{a_2} x$, $y = \log_{a_3} x$, $y = \log_{a_4} x$ 的图象, 则必有 $a_4 > a_3 > 1 > a_2 > a_1 > 0$.



(2)在同一坐标系中, $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$)的图象与 $y = \log_{\frac{1}{a}} x$ ($a > 0, a \neq 1$)的图象关于 x 轴对称.

定义

10 2018~2019学年天津南开区南开大学附属中学高一上学期期中第6题3分

在 $b = \log_{(a-2)}(5-a)$ 中, 实数 a 的取值范围是().

A. $a > 5$ 或 $a < 2$

B. $2 < a < 3$ 或 $3 < a < 5$

C. $2 < a < 5$

D. $3 < a < 4$

答案 B

解析

由 $b = \log_{(a-2)}(5-a)$ 可得 $\begin{cases} 5-a > 0 \\ a-2 > 0 \\ a-2 \neq 1 \end{cases}$,

解得 $\begin{cases} a < 5 \\ a > 2 \\ a \neq 3 \end{cases}$,

即实数 a 的取值范围是 $2 < a < 3$ 或 $3 < a < 5$.

故选B.

11 2018~2019学年天津河东区高一上学期期中第5题4分

使式子 $\log_{2x-1}(3-x)$ 有意义的 x 的范围是() .

A. $\frac{1}{2} < x < 3$ 且 $x \neq 1$

B. $\frac{1}{2} < x < 3$

C. $0 < x < \frac{1}{2}$

D. $x > 3$

答案 A

解析

$$\begin{cases} 2x-1 > 0 \\ 3-x > 0 \\ 2x-1 \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x < 3 \\ x \neq 1 \end{cases},$$

$$\therefore \frac{1}{2} < x < 3 \text{ 且 } x \neq 1.$$

故选A .

12 2018~2019学年12月天津西青区天津市西青区杨柳青第一中学高一上学期月考第12题4分

函数 $y = \frac{1}{\sqrt{3-x}} - \log_7(x^2 - x)$ 的定义域是 _____ .

答案 $(-\infty, 0) \cup (1, 3)$

解析 由题意得：

$$\begin{cases} 3-x > 0 \\ x^2-x > 0 \end{cases}$$

解得 $x < 0$ 或 $1 < x < 3$,

故函数的定义域是 $(-\infty, 0) \cup (1, 3)$.

故答案为： $(-\infty, 0) \cup (1, 3)$.

 定点

13 2019~2020学年12月天津河西区天津市新华中学高一上学期月考第9题5分

函数 $f(x) = \log_a(2x-3) - 4$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的图象恒过定点 _____ .

答案 $(2, -4)$

解析 由对数函数 $y = \log_a x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) ,

恒过定点 $(1, 0)$ 知 ,

$y = \log_a(2x-3) - 4$ 恒过定点 $(2, -4)$.

故答案为： $(2, -4)$.

14 2020~2021学年江西鹰潭贵溪市江西省贵溪市实验中学高一上学期期中第14题5分

已知函数 $y = \log_a(x+3) - \frac{8}{9}$ ($a > 0, a \neq 1$) 的图象恒过定点 A , 若点 A 也在函数 $f(x) = 3^x + b$ 的图象上 , 则 $b =$ _____ .

答案 -1

解析 $\because y = \log_a(x+3) - \frac{8}{9}$ 恒过定点 A .

$$\therefore A\left(-2, -\frac{8}{9}\right) .$$

又点 A 也在函数 $f(x) = 3^x + b$ 的图象上 ,

$$\therefore 3^{-2} + b = -\frac{8}{9} .$$

$$\therefore b = -1 .$$



比较大小

15 2016~2017学年天津高一上学期期中第4题4分

已知 $a = \log_{0.6} 0.5$, $b = \ln 0.5$, $c = 0.6^{0.5}$, 则 () .

A. $a > b > c$

B. $a > c > b$

C. $c > a > b$

D. $c > b > a$

答案 B

解析 $\log_{0.6} 0.5 > 1$, $\ln 0.5 < 0$, $0 < 0.6^{0.5} < 1$,

即 $a > 1$, $b < 0$, $0 < c < 1$,

故 $a > c > b$.

故选B .

16 2019~2020学年天津河北区高一上学期期末第4题4分

已知 $a = \log_{0.7} 0.8$, $b = \log_{1.1} 0.9$, $c = 1.1^{0.9}$, 则 a , b , c 的大小关系是 () .

A. $b < a < c$

B. $a < c < b$

C. $a < b < c$

D. $c < a < b$

答案 A

解析 $a = \log_{0.7} 0.8 > \log_{0.7} 1 = 0$,

且 $a = \log_{0.7} 0.8 < \log_{0.7} 0.7 = 1$,

$\therefore a \in (0, 1)$.

$b = \log_{1.1} 0.9 < \log_{1.1} 1 = 0$,

$$\therefore b \in (-\infty, 0) .$$

$$c = 1.1^{0.9} > 1.1^0 = 1 .$$

$$\therefore c \in (1, +\infty) .$$

$$\therefore c > a > b \text{ 即 } b < a < c .$$

故选A .

17 2018~2019学年天津南开区天津市南开中学高一上学期期中第4题4分

已知 $x = \ln 3$, $y = \log_5 0.3$, $z = e^{-\frac{1}{2}}$, 则 () .

A. $x < y < z$

B. $z < x < y$

C. $z < y < x$

D. $y < z < x$

答案 D

解析 $x = \ln 3 > \ln e = 1$,

$$y = \log_5 0.3 < \log_5 1 = 0 ,$$

$$z = e^{-\frac{1}{2}} \in (0, 1) ,$$

$$\therefore y < z < x .$$

故选D .

18 2019~2020学年天津红桥区高一上学期期末第7题4分

若 $a = \log_2 3$, $b = \log_3 2$, $c = \log_{\frac{1}{3}} 9$, 则 () .

A. $c < b < a$

B. $b < a < c$

C. $a < b < c$

D. $a < c < b$

答案 A

解析 $\because y = \log_2 x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单增 ,

$$\therefore \log_2 3 > \log_2 2 = 1 ,$$

$$\therefore a > 1 ,$$

$\because y = \log_3 x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单增 ,

$$\therefore \log_3 1 < \log_3 2 < \log_3 3 ,$$

$$\therefore 0 < \log_3 2 < 1,$$

$$\therefore 0 < b < 1,$$

$$\therefore c = \log_{\frac{1}{3}} 9 = -\log_3 9 = -2,$$

$$\therefore a > b > c.$$

故选A.

19 2019~2020学年天津南开区天津市南开中学高一上学期期末第4题4分

已知 $a = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{6}$, $b = \log_3 \frac{1}{2}$, $c = 3^{-\frac{1}{2}}$, 则 a, b, c 的大小关系为 ().

A. $a < b < c$

B. $b < a < c$

C. $c < b < a$

D. $b < c < a$

答案 D

解析

$$a = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{6} = \log_{3^{-1}} \frac{1}{6} = \log_3 6 > \log_3 3 = 1,$$

$$b = \log_3 \frac{1}{2} < \log_3 3 = 1, \quad b = \log_3 \frac{1}{2} < \log_3 1 = 0,$$

$$c = 3^{-\frac{1}{2}} < 3^0 = 1, \quad c > 0,$$

$$\text{故 } a > c > b.$$

故选D.

20 2019~2020学年11月天津和平区天津市第二十中学高一上学期月考第4题3分

设 $a = 0.5^{0.4}$, $b = \log_{0.5} 0.3$, $c = \log_8 0.4$, 则 a, b, c 的大小关系是 ().

A. $a < b < c$

B. $c < b < a$

C. $c < a < b$

D. $b < c < a$

答案 C

解析

$$\therefore 0 < a = 0.5^{0.4} < 0.5^0 = 1,$$

$$b = \log_{0.5} 0.3 > \log_{0.5} 0.5 = 1,$$

$$c = \log_8 0.4 < \log_8 1 = 0,$$

$$\therefore a, b, c \text{ 的大小关系是 } c < a < b.$$

故选C.

精进不休 日新月异

21 2019~2020学年天津河西区高一上学期期末第6题3分

设 $a = \log_3 7$, $b = 2^{1.1}$, $c = 0.8^{3.1}$, 则 () .

A. $b < a < c$

B. $c < a < b$

C. $c < b < a$

D. $a < c < b$

答案 B

解析 $1 < \log_3 7 < 2$, $b = 2^{1.1} > 2$, $c = 0.8^{3.1} < 1$, 则 $c < a < b$.

故选B.

22 2019~2020学年11月天津和平区天津市耀华中学高一上学期月考第3题5分

设 $a = \log_3 \pi$, $b = \log_2 \sqrt{3}$, $c = \log_3 \sqrt{2}$, 则 () .

A. $a > b > c$

B. $a > c > b$

C. $b > a > c$

D. $b > c > a$

答案 A

解析 方法一: $a = \log_3 \pi > \log_3 3 = 1$,

$$b = \log_2 \sqrt{3} = \frac{1}{2} \log_2 3 \in \left(\frac{1}{2}, 1 \right),$$

$$c = \log_3 \sqrt{2} = \frac{1}{2} \log_3 2 < \frac{1}{2}.$$

$$\therefore a > b > c.$$

故选A.

方法二: 因为 $\log_3 \sqrt{2} < \log_2 \sqrt{2} < \log_2 \sqrt{3}$, 所以 $b > c$, 因为 $\log_2 \sqrt{3} < \log_2 2 = \log_3 3 < \log_3 \pi$,

所以 $a > b$, 所以 $a > b > c$.

故选A.

解不等式

23 2018~2019学年天津和平区天津市耀华中学高一上学期期中第17题8分

已知全集为实数集 $\mathbf{R}$, $A = \{x | \log_2(3-x) \leq 2\}$, $B = \left\{x | \frac{5}{x+2} \geq 1\right\}$.

(1) $A \cap B$, $A \cup B$.

(2) $(\complement_{\mathbf{R}} A) \cap B$.

答案

(1) $A \cap B = \{x | -1 \leq x < 3\}$, $A \cup B = \{x | -2 < x \leq 3\}$.

(2) $\complement_{\mathbf{R}} A \cap B = \{x | -2 < x < -1 \text{ 或 } x = 3\}$.

解析

$$\begin{aligned} (1) \quad A &= \{x | \log_2(3-x) \leq 2\} \\ &= \{x | \log_2(3-x) \leq \log_2 4\} \\ &= \{x | -1 \leq x < 3\}, \\ B &= \left\{x | \frac{5}{x+2} \geq 1\right\} = \left\{x | \frac{5-x-2}{x+2} \geq 0\right\} = \{x | -2 < x \leq 3\}, \\ A \cap B &= \{x | -1 \leq x < 3\}, \quad A \cup B = \{x | -2 < x \leq 3\}. \\ (2) \quad \complement_{\mathbf{R}} A &= \{x | x < -1 \text{ 或 } x \geq 3\}, \\ \complement_{\mathbf{R}} A \cap B &= \{x | -2 < x < -1 \text{ 或 } x = 3\}. \end{aligned}$$

24 2018~2019学年天津河西区高一上学期期末第16题8分

已知全集 $U = \mathbf{R}$, $A = \left\{x | \frac{1}{2} < 2^x < 4\right\}$, $B = \{x | \log_3 x \leq 2\}$.

(1) 求 $A \cap B$.

(2) 求 $\complement_U(A \cup B)$.

答案

(1) $A \cap B = \{x | 0 < x < 2\}$.

(2) $\complement_U(A \cup B) = \{x | x \leq -1 \text{ 或 } x > 9\}$.

解析

$$\begin{aligned} (1) \quad A &= \left\{x | \frac{1}{2} < 2^x < 4\right\} = \{x | -1 < x < 2\}, \\ B &= \{x | \log_3 x \leq 2\} = \{x | 0 < x \leq 9\}, \\ \therefore A \cap B &= \{x | 0 < x < 2\}. \end{aligned}$$

$$(2) \quad A \cup B = \{x | -1 < x \leq 9\},$$

$$\complement_U(A \cup B) = \{x | x \leq -1 \text{ 或 } x > 9\}.$$

25 2019~2020学年11月天津和平区天津市第二十中学高一上学期月考第3题3分

设 $x \in \mathbf{R}$ ，则“ $\lg x < 0$ ”是“ $2^{x-1} < 1$ ”的（ ）.

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

答案 A

解析

$$\because \lg x < 0,$$

$$\therefore 0 < x < 1,$$

$$\because 2^{x-1} < 1,$$

$$\therefore x - 1 < 0,$$

$$\therefore x < 1,$$

$$\therefore \{x | 0 < x < 1\} \subsetneq \{x | x < 1\},$$

$\therefore$ “ $\lg x < 0$ ”是“ $2^{x-1} < 1$ ”的充分不必要条件.

故选A.