

02指数运算与指数函数练习题

1. 指数运算

1 2020~2021学年天津滨海新区塘沽第一中学高一上学期期中第4题5分

下列运算正确的是 () .

A. $a^2 \cdot a^3 = a^6$

B. $(3a)^3 = 9a^3$

C. $\sqrt[3]{a^8} = a$

D. $(-2a^2)^3 = -8a^6$

答案 D

解析 A选项: $a^2 \cdot a^3 = a^5$, 故A错误;

B选项: $(3a)^3 = 27a^3$, 故B错误;

C选项: $\sqrt[3]{a^8} = |a| = \begin{cases} a (a \geq 0) \\ -a (a < 0) \end{cases}$ 故C错误;

D选项: $(-2a^2)^3 = -8a^6$, 故D正确.

故选D.

2 2020~2021学年天津南开区天津市南开中学高一上学期期中第5题4分

$$\left(5\frac{1}{16}\right)^{0.5} + (-1)^5 \div \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} + \left(2\frac{10}{27}\right)^{-\frac{2}{3}} = () .$$

A. $-\frac{9}{4}$

B. $\frac{4}{9}$

C. $\frac{9}{4}$

D. $-\frac{4}{9}$

答案 C

解析

$$\begin{aligned} & \left(5\frac{1}{16}\right)^{0.5} + (-1)^5 \div \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} + \left(2\frac{10}{27}\right)^{-\frac{2}{3}} \\ &= \left(\frac{81}{16}\right)^{\frac{1}{2}} - 1 \times \frac{9}{16} + \left(\frac{64}{27}\right)^{-\frac{2}{3}} \\ &= \frac{9}{4} - \frac{9}{16} + \left[\left(\frac{4}{3}\right)^3\right]^{-\frac{2}{3}} \\ &= \frac{9}{4} - \frac{9}{16} + \frac{9}{16} \\ &= \frac{9}{4} \end{aligned}$$

故C.

3 2019~2020学年天津和平区天津市第一中学高一上学期期中第11题4分

计算： $\sqrt{6\frac{1}{4}} + \left(3\frac{3}{8}\right)^{\frac{1}{3}} + \sqrt[3]{125} = \underline{\hspace{2cm}}$.

答案 9

解析
$$\begin{aligned} & \sqrt{6\frac{1}{4}} + \left(3\frac{3}{8}\right)^{\frac{1}{3}} + \sqrt[3]{125} \\ &= \sqrt{\frac{25}{4}} + \left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{1}{3}} + \sqrt[3]{125} \\ &= \frac{5}{2} + \frac{3}{2} + 5 \\ &= 9. \end{aligned}$$

故答案为：9.

4 2019~2020学年天津河西区高一上学期期中第16题8分

计算下列各式（式中字母均是正数）.

$$\left(2a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}}\right)\left(-6a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}\right) \div \left(-3a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{5}{6}}\right).$$

答案 $4a$.

解析
$$\begin{aligned} \text{原式} &= [2 \times (-6) \div (-3)] \cdot a^{\frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6}} b^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{5}{6}} \\ &= 4ab^0 \\ &= 4a. \end{aligned}$$

2. 比较大小

5 2019~2020学年10月天津和平区天津市耀华中学高一上学期周测A卷第2题

若 $a > b > 0$ ，则下列不等式不成立的是（ ）.

A. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

B. $|a| > |b|$

C. $a + b < 2\sqrt{ab}$

$$D. \left(\frac{1}{2}\right)^a < \left(\frac{1}{2}\right)^b$$

答案 C

解析 A选项： $\because a > b > 0$,

$$\therefore ab > 0,$$

$$\therefore \frac{a}{ab} > \frac{b}{ab}$$

$$\therefore \frac{1}{b} > \frac{1}{a},$$

$\therefore$ A对.

B选项： $\because a > b > 0$,

$$\therefore |a| > |b|,$$

$\therefore$ B对.

C选项： $\because a > b > 0$,

$$\therefore a + b > 2\sqrt{ab},$$

$\therefore$ C错.

D选项： $\because y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 为减函数，

又： $\because a > b$,

$$\therefore \left(\frac{1}{2}\right)^a < \left(\frac{1}{2}\right)^b,$$

所以D对.

故选C.

6 2019~2020学年天津滨海新区塘沽第一中学高一上学期期中第4题5分

设 $a = 0.6^{0.6}$, $b = 0.6^{1.5}$, $c = 1.5^{0.6}$, 则 a, b, c 的大小关系是 ().

A. $a < b < c$

B. $a < c < b$

C. $b < a < c$

D. $b < c < a$

答案 C

解析 由题意可知 $1 > a = 0.6^{0.6} > b = 0.6^{1.5}$, $c = 1.5^{0.6} > 1$, 可知： $b < a < c$. 故选：C.

7 2018~2019学年10月天津和平区天津市耀华中学高一上学期月考第5题5分

设 $a = \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{2}{5}}$, $b = \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{3}{5}}$, $c = \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{2}{5}}$, 则 a, b, c 的大小关系是 () .

A. $b > c > a$

B. $a > b > c$

C. $c > a > b$

D. $a > c > b$

答案 D

解析 $y = a^x$ 中, 底数 $0 < a < 1$, 单调递减,

$$\therefore \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{3}{5}} < \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{2}{5}}, \text{ 即 } b < c,$$

指数部分相同, 底数不同,

利用图象可知 $a > c$.

故选D.

3. 过定点问题

8 2020~2021学年天津河北区天津市第七十八中学高一上学期期中第14题

函数 $f(x) = a^{x-1} - 2$ 恒过定点 _____ .

答案 $(1, -1)$

解析 当 $x = 1$ 时, $a^{x-1} = a^0 = 1$,

则函数 $f(x) = a^{x-1} - 2$ 恒过定点 $(1, -1)$.

故答案为: $(1, -1)$.

9 2018~2019学年天津西青区天津市西青区杨柳青第一中学高一上学期期中第13题4分

不论 $a(a > 0, a \neq 1)$ 为何值, 函数 $f(x) = a^{x-3} - 1$ 的图象一定经过点 P , 则点 P 的坐标为 _____ .

答案 $(3, 0)$

解析 函数 $f(x)$ 过定点, 即需要指数的次数等于0即可,

不论 $a(a > 0, a \neq 1)$ 为何值,

函数 $f(x) = a^{x-3} - 1$ 的图象过的定点为: $x - 3 = 0$,

将 $x = 3$ 代入解析式得 $y = 0$,

故点 $P(3, 0)$.

4. 解不等式

10 2020~2021学年天津和平区天津市耀华中学高一上学期期末第1题4分

已知集合 $A = \{x | x^2 - 5x + 6 \leq 0\}$, 集合 $B = \{x | 2^x > 4\}$, 则集合 $A \cap B = ()$.

- A. $\{x | 2 \leq x \leq 3\}$ B. $\{x | 2 \leq x < 3\}$ C. $\{x | 2 < x \leq 3\}$ D. $\{x | 2 < x < 3\}$

答案 C

解析

$$\because x^2 - 5x + 6 \leq 0,$$

$$\therefore (x - 2)(x - 3) \leq 0,$$

$$\therefore 2 \leq x \leq 3,$$

$$\therefore A = [2, 3],$$

$$\because 2^x > 4 = 2^2,$$

又 $\because y = 2^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单增,

$$\therefore x > 2,$$

$$\therefore B = (2, +\infty],$$

$$\therefore A \cap B = (2, 3],$$

故选C.

11 2020~2021学年天津和平区天津市汇文中学高一上学期期中第1题3分

设集合 $A = \{x | 2^x - 8 \geq 0\}$, $B = \{x | x^2 - 7x + 10 \leq 0\}$, 则 $A \cap B = ()$.

- A. $\{x | 2 \leq x \leq 3\}$ B. $\{x | 3 \leq x \leq 5\}$ C. $\{x | x \leq 5\}$ D. $\{x | x \geq 2\}$

答案 B

解析 先化简集合 A, B , 再根据交集运算求解即可.

$$A = \{x | 2^x - 8 \geq 0\} = \{x | x \geq 3\}, B = \{x | x^2 - 7x + 10 \leq 0\} = \{x | 2 \leq x \leq 5\},$$

$$\text{故 } A \cap B = \{x | 3 \leq x \leq 5\}.$$

故选: B

5. 综合问题

12 2019~2020学年天津和平区天津市第一中学高一上学期期中第20题12分

已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的单调递减的奇函数 $f(x)$, 当 $x > 0$ 时, $f(x) = \frac{x}{3} - 2^x$.

(1) 求 $f(-1)$ 的值.

(2) 求 $f(x)$ 的解析式.

(3) 若对任意的 $t \in \mathbf{R}$, 不等式 $f(t^2 - 2t) + f(2t^2 - k) < 0$ 恒成立, 求实数 k 的取值范围.

答案

$$(1) f(-1) = \frac{5}{3}.$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} \frac{x}{3} - 2^x, & (x > 0) \\ 0, & (x = 0) \\ \frac{x}{3} + \frac{1}{2^x}, & (x < 0) \end{cases}.$$

$$(3) \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right).$$

解析

(1) 由 $f(x)$ 是奇函数,

$$\text{令 } x = -1, \text{ 可得 } f(-1) = -f(1) = -\left(\frac{1}{3} - 2\right) = -\frac{1}{3} + 2,$$

$$\therefore f(-1) = \frac{5}{3}.$$

(2) 定义域为 $\mathbf{R}$ 的单调递减的奇函数 $f(x)$,

$$\text{则 } f(0) = 0,$$

$$\text{当 } x > 0 \text{ 时, } f(x) = \frac{x}{3} - 2^x,$$

$$\text{当 } x < 0 \text{ 时, } -x > 0,$$

$$\text{则 } f(-x) = -\frac{x}{3} - 2^{-x},$$

$\therefore f(x)$ 是奇函数,

$$\therefore -f(x) = -\frac{x}{3} - 2^{-x},$$

$$\text{即 } f(x) = \frac{x}{3} + \frac{1}{2^x},$$

$\therefore f(x)$ 的解析式为：

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{3} - 2^x, & (x > 0) \\ 0, & (x = 0) \\ \frac{x}{3} + \frac{1}{2^x}, & (x < 0) \end{cases}.$$

(3) 不等式 $f(t^2 - 2t) + f(2t^2 - k) < 0$ 恒成立，

$$\text{即 } f(t^2 - 2t) < -f(2t^2 - k),$$

由 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的单调递减的奇函数，

$$\therefore t^2 - 2t > k - 2t^2,$$

$$\text{即 } 3t^2 - 2t > k,$$

$$\text{可得 } 3\left(t - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3} > k \text{ 对任意的 } t \in \mathbf{R},$$

$$\therefore k < -\frac{1}{3},$$

故得实数 k 的取值范围是 $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$.