

02指数运算与指数函数

1. 指数运算的概念及运算公式



整数指数幂

1. 正整数指数幂

(1) 正整数指数幂的定义： $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_n (a \in \mathbf{N}^*)$.

(2) 正整数指数幂的运算法则：

$$\textcircled{1} a^m \cdot a^n = a^{m+n};$$

$$\textcircled{2} (a^m)^n = a^{mn};$$

$$\textcircled{3} a^m \div a^n = a^{m-n} (m > n, a \neq 0);$$

$$\textcircled{4} (ab)^n = a^n b^n;$$

$$\textcircled{5} \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

2. 正整数指数幂的推广

(1) 在上述法则③中，限定 $m > n$ ；

如果取消这种限制，则正整数指数幂就推广到了整数指数幂

(2) $a^0 (a \neq 0)$ 的取值——

① 根据法则③ $a^m \div a^m = a^{m-m} = a^0$ ，另一方面 $a^m \div a^m = 1$ ，因此得到 $a^0 = 1$

② 据此可得 $a^{-n} = \frac{1}{a^n} (a \neq 0, n \in \mathbf{N}^*)$ ，

3. 整数指数幂

根据2，上面的五条运算法则可以精简为三条：

$$\textcircled{1} a^m \cdot a^n = a^{m+n};$$

$$\textcircled{2} (ab)^n = a^n b^n;$$

$$\textcircled{3} (a^m)^n = a^{mn}.$$



根式的概念与性质

1. n 次方根的定义

一般地，如果 $x^n = a$ ，那么 x 叫做 a 的 **n 次方根**，其中 $n > 1$ 且 $n \in \mathbf{N}^*$ 。

2. 特别注意

① 当 n 是奇数时，正数的 n 次方根是一个正数，负数的 n 次方根是一个负数，此时 a 的 n 次方根用符号 $\sqrt[n]{a}$ 表示。

② 当 n 是偶数时，正数 a 的 n 次方根有两个，记为 $\pm\sqrt[n]{a}$ ，负数在实数范围内没有偶次方根。

3. 根式的定义

表达式 $\sqrt[n]{a}$ 叫做 **根式**，其中 n ($n > 1$ 且 $n \in \mathbf{N}^*$) 叫做 **根指数**， a 叫做 **被开方数**。

4. 根式的性质

根据 n 次方根的意义，可以得到：

$$(1) (\sqrt[n]{a})^n = a.$$

$$(2) \text{① 当 } n \text{ 是奇数时, } \sqrt[n]{a^n} = a; \text{② 当 } n \text{ 是偶数时, } \sqrt[n]{a^n} = |a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}.$$

$$(3) a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^{\frac{n}{m}}} = \sqrt[n]{a^{\frac{m}{m}}}$$



分数指数幂

1. 分数指数幂

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^{\frac{m}{n}}} (a > 0, m, n \in \mathbf{N}^*, n > 1),$$

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^{\frac{m}{n}}}} (a > 0, m, n \in \mathbf{N}^*, n > 1).$$

2. 0 的分数指数幂

0 的正分数指数幂是 0，0 的负分数指数幂没有意义。

3. 指数概念的扩充

规定了分数指数幂的意义以后，指数的概念就实现了由整数指数幂向有理数指数幂的扩充

2. 指数运算典型例题



基础运算公式

1 2020~2021学年天津河西区高一上学期期末第2题4分

设 $a > 0$ ，则下列运算正确的是（ ）。

- A. $a^{\frac{4}{3}} a^{\frac{3}{4}} = a$ B. $\left(a^{\frac{1}{4}}\right)^4 = a$ C. $a^{\frac{2}{3}} a^{-\frac{2}{3}} = 0$ D. $a \div a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{3}{2}}$

答案 B

解析 A选项： $a^{\frac{4}{3}} a^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{4}{3} + \frac{3}{4}} = a^{\frac{25}{12}} \neq a$ ，故A错误；

B选项： $\left(a^{\frac{1}{4}}\right)^4 = a^1 = a$ ，故B正确；

C选项： $a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{-\frac{2}{3}} = a^0 = 1 \neq 0$ ，故C错误；

D选项： $a \div a^{\frac{2}{3}} = a^{1 - \frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{3}} \neq a^{\frac{3}{2}}$ ，故D错误。

故选B。

2 2019~2020学年天津红桥区高一上学期期末第1题4分

设 $a > 0$ ，则下列运算中正确的是（ ）。

- A. $a^{\frac{2}{3}} a^{\frac{3}{2}} = a$ B. $a \div a^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{2}{3}}$ C. $a^{\frac{1}{2}} a^{-2} = 0$ D. $\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 = a$

答案 D

解析 A选项： $a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{13}{6}}$ ，故错误。

B选项： $a \div a^{\frac{3}{2}} = a^{-\frac{1}{2}}$ ，故错误。

C选项： $a^{\frac{1}{2}} a^{-2} = a^{-\frac{3}{2}}$ ，故错误。

D选项： $\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 = a$ ，故正确。

故选D。

3 2020~2021学年天津红桥区高一上学期期末第11题4分

已知 $10^m = 2$ ， $10^n = 3$ ，则 $10^{m-n} =$ _____.

答案 $\frac{2}{3}$

解析 $\because 10^m = 2, 10^n = 3,$
 $\therefore 10^{m-n} = \frac{10^m}{10^n} = \frac{2}{3}.$

实数运算

4 2020~2021学年天津和平区天津市汇文中学高一上学期期中第16题8分

化简求值：

$$0.001^{-\frac{1}{3}} - \left(\frac{7}{8}\right)^0 + 16^{\frac{3}{4}} + (\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3})^6.$$

答案 89.

解析 原式 $= [(0.1)^3]^{-\frac{1}{3}} - \left(\frac{7}{8}\right)^0 + (2^4)^{\frac{3}{4}} + \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^6 \times \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^6$
 $= 0.1^{-1} - 1 + 2^3 + 2^3 \times 3^2$
 $= 10 - 1 + 8 + 8 \times 9$
 $= 89.$

5 2020~2021学年天津河东区高一上学期期中第16题8分

求值： $\left(2\frac{7}{9}\right)^{0.5} + 0.1^{-2} + \left(2\frac{10}{27}\right)^{-\frac{2}{3}} - 3\pi^0 + \frac{37}{48}.$

答案 100.

解析 原式 $= \left(\frac{25}{9}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{0.1^2} + \frac{1}{\left(\frac{64}{27}\right)^{\frac{2}{3}}} - 3 + \frac{37}{48}$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{\frac{25}{9}} + \frac{1}{0.01} + \frac{1}{\left[\left(\frac{4}{3}\right)^3\right]^{\frac{2}{3}}} - 3 + \frac{37}{48} \\
 &= \frac{5}{3} + 100 + \frac{1}{\left(\frac{4}{3}\right)^2} - 3 + \frac{37}{48} \\
 &= \frac{5}{3} + 100 + \frac{9}{16} - 3 + \frac{37}{48} \\
 &= 97 + \frac{80 + 27 + 37}{48} \\
 &= 97 + \frac{144}{48} \\
 &= 100.
 \end{aligned}$$

6 2020~2021学年12月天津和平区天津市耀华中学高一上学期月考第19题

计算： $(0.0081)^{-\frac{1}{4}} - \left[3 \times \left(\frac{7}{8}\right)^0\right]^{-1} \times \left[81^{-0.25} + \left(3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}\right]^{-\frac{1}{2}}$.

答案 3 .

解析

$$\begin{aligned}
 &(0.0081)^{-\frac{1}{4}} - \left[3 \times \left(\frac{7}{8}\right)^0\right]^{-1} \times \left[81^{-0.25} + \left(3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}\right]^{-\frac{1}{2}} \\
 &= \left[(0.3)^4\right]^{-\frac{1}{4}} - \frac{1}{3} \left[(3^4)^{-\frac{1}{4}} + \left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}\right]^{-\frac{1}{2}} \\
 &= 0.3^{-1} - \frac{1}{3} \times \left[\frac{1}{3} + \left(\left(\frac{3}{2}\right)^3\right)^{-\frac{1}{3}}\right]^{-\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{10}{3} - \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{2}} \\
 &= 3.
 \end{aligned}$$

精进不休 日新月异

7 2019~2020学年天津河西区高一上学期期中第16题8分

计算下列各式（式中字母均是正数）.

$$2\sqrt{3} \times 3 \times \sqrt[3]{1.5} \times \sqrt[4]{12}.$$

答案 18 .

解析

$$\begin{aligned}\text{原式} &= 2 \times 3^{\frac{1}{2}} \times 3 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \times (12)^{\frac{1}{6}} \\ &= 2 \times 3^{\frac{1}{2}} \times 3 \times 3^{\frac{1}{3}} \div 2^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{6}} \times 2^{\frac{1}{3}} \\ &= 2^{1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{2}+1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} \\ &= 18 .\end{aligned}$$

包罗万象 举一干从

8

2018~2019学年天津河西区天津市第四中学高一上学期期中第15题8分

计算：

$$8^{\frac{2}{3}} - \left(-\frac{7}{8}\right)^0 + \sqrt[4]{(3-\pi)^4} + [(-2)^6]^{\frac{1}{2}} .$$

答案 $\pi + 8$.

解析

$$\begin{aligned}8^{\frac{2}{3}} - \left(-\frac{7}{8}\right)^0 + \sqrt[4]{(3-\pi)^4} + [(-2)^6]^{\frac{1}{2}} \\ &= 2^{3 \times \frac{2}{3}} - 1 + (\pi - 3) + 2^{6 \times \frac{1}{2}} \\ &= 2^2 - 1 + \pi - 3 + 2^3 \\ &= 4 + \pi - 4 + 8 \\ &= \pi + 8 .\end{aligned}$$



代数运算

9

2020~2021学年天津和平区天津市汇文中学高一上学期期中第16题8分

化简求值：

$$\left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \frac{(\sqrt{4ab^{-1}})^3}{0.1^{-2}(a^3b^{-3})^{\frac{1}{2}}} .$$

答案 $\frac{1}{200}$.

解析

$$\text{原式} = \frac{1}{16} \cdot \frac{(2a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{2}})^3}{(10^{-1})^{-2} \cdot a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{16} \cdot \frac{8a^{\frac{3}{2}}b^{-\frac{3}{2}}}{100a^{\frac{3}{2}}b^{-\frac{3}{2}}} = \frac{1}{200}.$$

10 2019~2020学年天津河西区高一上学期期中第16题8分

计算下列各式（式中字母均是正数）.

$$(2a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}})(-6a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}) \div (-3a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{5}{6}}).$$

答案

$$4a.$$

解析

$$\begin{aligned} \text{原式} &= [2 \times (-6) \div (-3)] \cdot a^{\frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6}} b^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{5}{6}} \\ &= 4ab^0 \\ &= 4a. \end{aligned}$$

11 2020~2021学年12月天津和平区天津市耀华中学高一上学期月考第19题

$$\text{化简: } \frac{(a^{\frac{2}{3}} \cdot b^{-1})^{-\frac{1}{2}} \cdot a^{-\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[6]{a \cdot b^5}}.$$

答案

$$\frac{1}{a}.$$

解析

$$\begin{aligned} \text{分子} &= (a^{\frac{2}{3}} \cdot b^{-1})^{-\frac{1}{2}} \cdot a^{-\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{3}} \\ &= a^{-\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{2}} \cdot a^{-\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{3}} \\ &= a^{-\frac{5}{6}} b^{\frac{5}{6}}, \\ \text{分母} &= (a \cdot b^5)^{\frac{1}{6}} \\ &= a^{\frac{1}{6}} \cdot b^{\frac{5}{6}}, \\ \text{原式} &= \frac{a^{-\frac{5}{6}} b^{\frac{5}{6}}}{a^{\frac{1}{6}} b^{\frac{5}{6}}} = \frac{1}{a}. \end{aligned}$$

3. 指数函数的图像与性质

1. 指数函数的定义

一般地，函数 $y = a^x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$, $x \in \mathbf{R}$) 叫做**指数函数**。

2. 特别注意——对于定义要注意以下两点：

(1) 定义域是 $\mathbf{R}$

(2) 形式上的严格性：在指数函数的定义表达式 $y = a^x$ 中， a 是常量且 a^x 前的**系数必须是1**，
自变量 x 的位置**必须在指数的位置上**，否则，不是指数函数

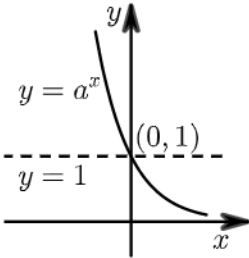
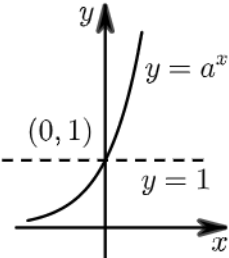
教法备注

【教师备注】

对于 (1) 的理解：因为指数的概念已经扩充到实数，所以在底数 $a > 0$ 的前提下， x 可以是任意实数。

对于 (2) 可以列举的反例：如 $y = 2a^x$, $y = a^x + 1$ 等都不是指数函数。

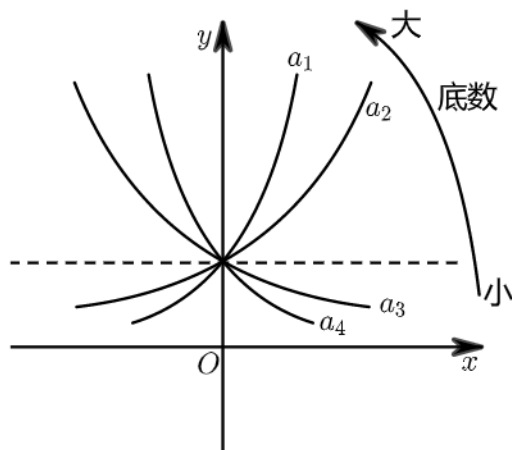
3. 指数函数的图像和性质

		$0 < a < 1$	$a > 1$
图象			
性 质	定义域	$\mathbf{R}$	
	值域	$(0, +\infty)$	
	过定点	图象过定点 $(0, 1)$ ，即当 $x=0$ 时， $y=1$	
	单调性	在 $(-\infty, +\infty)$ 上是减函数	在 $(-\infty, +\infty)$ 上是增函数
	函数值的变化 范围	当 $x < 0$ 时， $y > 1$	当 $x < 0$ 时， $0 < y < 1$
		当 $x = 0$ 时， $y = 1$	当 $x = 0$ 时， $y = 1$
		当 $x > 0$ 时， $0 < y < 1$	当 $x > 0$ 时， $y > 1$

4.底数对指数函数图象的影响

①当 $a > 1$ 时, a 值越大, 图象向上越靠近 y 轴, 递增速度越快; 当 $0 < a < 1$ 时, a 值越小, 图象向下越靠近 x 轴, 递减速度越快.

②底数对函数 $y = a^x$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 图象的影响如图($a_1 > a_2 > a_3 > a_4$). 在第一象限具有“底大图高”的特征.



③当 $a > 0$, 且 $a \neq 1$ 时, 函数 $y = a^x$ 与函数 $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ 的图象关于 y 轴对称.

比较大小

12 2019~2020学年天津河东区高一上学期期中第6题4分

已知 $a = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1.1}$, $b = \pi^0$, $c = 3^{0.9}$, 则 a, b, c 三者的大小关系是().

A. $b < c < a$

B. $c < a < b$

C. $b < a < c$

D. $c < b < a$

答案 A

解析

$$a = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1.1}, b = \pi^0, c = 3^{0.9},$$

则 $b = 1$, $c > 3^0 = 1$, 且 $c < 3$,

$$a = 3^{1.1} > 3,$$

即有 $a > c > b$.

即 $b < c < a$.

故选A.

13 2019~2020学年天津和平区天津市第一中学高一上学期期中第3题3分

下列关系中正确的是() .

A. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} < \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{3}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$

B. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} < \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$

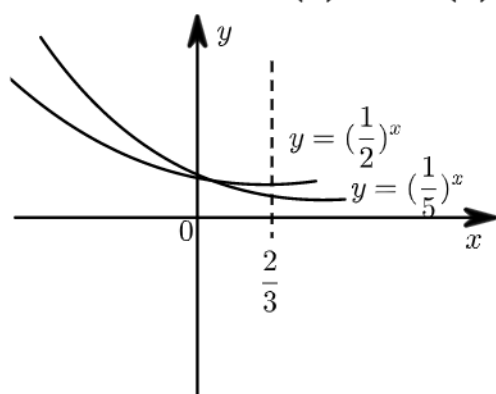
C. $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{3}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$

D. $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{3}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$

答案 D

解析

在图上坐标中画出 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 和 $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ 的图像,



由图象可知, $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} > \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$,

又 $\because \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} > \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$

$\therefore \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{3}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$.

故选D.

14 2020~2021学年天津南开区天津中学高一上学期期中第6题5分

下列选项正确的是() .

A. $1.3^{\frac{1}{2}} > 1.5^{\frac{1}{2}}$

B. $3.14^{\frac{1}{3}} > \pi^{\frac{1}{3}}$

C. $(-0.5)^{-1} > (-0.6)^{-1}$

D. $0.7^3 > 0.6^3$

答案 D

解析

A选项: $\because x^{\frac{1}{2}}$ 在 $(0, +\infty)$ 单增,

又 $\because 1.5 > 1.3$,

$$\therefore 1.5^{\frac{1}{2}} > 1.3^{\frac{1}{2}},$$

故A错误；

B选项： $\because x^{\frac{1}{3}}$ 在 $(0, +\infty)$ 单增，

$$\text{又} \because 3.14 < \pi,$$

$$\therefore 3.14^{\frac{1}{3}} < \pi^{\frac{1}{3}},$$

故B错误；

C选项： $\because x^{-1}$ 在 $(-\infty, 0)$ 单减，

$$\text{又} \because -0.5 > -0.6,$$

$$\therefore (-0.5)^{-1} < (-0.6)^{-1},$$

故C错误；

D选项： $\because x^3$ 在 $(0, +\infty)$ 单增，

$$\text{又} \because 0.7 > 0.6,$$

$$\therefore 0.7^3 > 0.6^3,$$

故D正确。

故选D.

15 2019~2020学年天津滨海新区塘沽第一中学高一上学期期中第5题5分

“ $0 < a < b$ ”是“ $\left(\frac{1}{4}\right)^a > \left(\frac{1}{4}\right)^b$ ”的()。

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不是充分条件也不是必要条件

答案 A

解析

当“ $0 < a < b$ ”时，“ $\left(\frac{1}{4}\right)^a > \left(\frac{1}{4}\right)^b$ ”成立，

故“ $0 < a < b$ ”是“ $\left(\frac{1}{4}\right)^a > \left(\frac{1}{4}\right)^b$ ”的充分条件；

当“ $\left(\frac{1}{4}\right)^a > \left(\frac{1}{4}\right)^b$ ”时，“ $a < b$ ”成立，但“ $0 < a < b$ ”不一定成立，

故“ $0 < a < b$ ”是“ $\left(\frac{1}{4}\right)^a > \left(\frac{1}{4}\right)^b$ ”的不必要条件

故“ $0 < a < b$ ”是“ $\left(\frac{1}{4}\right)^a > \left(\frac{1}{4}\right)^b$ ”充分不必要条件

故选A .



过定点问题

16

2020~2021学年天津滨海新区塘沽第一中学高一上学期期中第15题5分

函数 $y = a^{x+1} - 3$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 的图象一定经过的点是 _____ .

答案

$(-1, -2)$

解析

$\because$ 函数 $y = a^{x+1} - 3$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) ,

$\therefore$ 当 $x = -1$ 时, $y = a^0 - 3 = -2$,

则函数 $y = a^{x+1} - 3$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的图象一定经过的点是 $(-1, -2)$.

故答案为 : $(-1, -2)$.

17 2018~2019学年天津河西区天津市第四十二中学高一上学期期中第9题4分

函数 $y = a^{x-1} + 1$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的图象必经过定点 _____ .

答案 (1, 2)

解析 令 $x - 1 = 0$, 解得 $x = 1$,

此时 $y = a^0 + 1 = 2$, 故得 (1, 2) ,

此点与底数 a 的取值无关 ,

故函数 $y = a^{x-1} + 1$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的图象必经过定点 (1, 2) .

故答案为 : (1, 2) .

解不等式

18 2019~2020学年11月天津和平区天津市第二十中学高一上学期月考第2题3分

若全集 $U = \{x | x^2 - 2x - 8 < 0\}$, 集合 $A = \{x | 1 < 3^x < 27\}$, 则 $\complement_U A = (\quad)$.

- A. (0, 3) B. $(-2, 0) \cup (3, 4)$ C. $(-2, 0] \cup [3, 4)$ D. $(-2, 1] \cup [2, 4)$

答案 C

解析 全集 $U = \{x | x^2 - 2x - 8 < 0\}$, 集合 $A = \{x | 1 < 3^x < 27\}$,

解得 : $U = \{x | -2 < x < 4\}$, $A = \{x | 0 < x < 3\}$,

$\therefore \complement_U A = (-2, 0] \cup [3, 4)$.

故选C .

19

设 $x \in \mathbf{R}$, 则“ $|x - 2| < 1$ ”是“ $3^x < 27$ ”的 ().

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

答案 A

解析

$$\because |x - 2| < 1,$$

$$\therefore -1 < x - 2 < 1,$$

$$\therefore 1 < x < 3,$$

$$\because 3^x < 27,$$

$$\therefore x < 3,$$

$\therefore \{x|1 < x < 3\}$ 是 $\{x|x < 3\}$ 的真子集,

$\therefore |x-2| < 1$ 是 $3^x < 27$ 的充分不必要条件.

故选A.

20

不等式 $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x-3} > 1$ 的解集是 _____ .

答案 $(-1, 3)$

解析

由 $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x-3} > 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^0$ 可知,

$$x^2 - 2x - 3 < 0 ,$$

即 $(x-3)(x+1) < 0$,

解得 $-1 < x < 3$,

故不等式解集为 $(-1, 3)$.

21 2019~2020学年11月天津和平区天津市第二十中学高一上学期月考第10题4分

不等式 $2^{x^2-4x-3} > \left(\frac{1}{2}\right)^{3(x-1)}$ 的解集为 _____ .

答案 $(-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$

解析 $2^{x^2-4x-3} > \left(\frac{1}{2}\right)^{3(x-1)} = 2^{3(1-x)}$,

$$\therefore x^2 - 4x - 3 > 3(1-x) ,$$

$$\therefore x^2 - x - 6 > 0 ,$$

解得 : $x \in (-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$.

4. 指数函数综合问题

分段函数单调性

22 2019~2020学年天津和平区高一上学期期末第9题4分

函数 $f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^x, & x \in (-\infty, 0] \\ (2a-1)x + (1-a), & x \in (0, +\infty) \end{cases}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是减函数, 则 a 的取值范围是 () .

- A. $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ B. $\left[0, \frac{1}{2}\right)$ C. $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$ D. $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$

答案 B

解析 由题意得, $f(0) = \left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1$,

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是减函数 ,

$$\therefore \begin{cases} 2a-1 < 0 \\ 1-a \leq 1 \end{cases} , \therefore 0 \leq a < \frac{1}{2} .$$

故选B .

23 2020~2021学年天津塘沽紫云中学高一上学期期中第8题5分

已知函数 $f(x) = \begin{cases} (2a-1)x, & x > 1 \\ a^x - \frac{2}{3}, & x \leq 1 \end{cases}$, 当 $x_1 \neq x_2$ 时, $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$, 则数 a 的取值范围是 () .

- A. $(0, \frac{1}{3}]$ B. $[\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ C. $(0, \frac{1}{2})$ D. $(-\infty, \frac{1}{3}]$

答案 A

解析 $\because \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$,
 $\therefore f(x)$ 单调递减,
 $\therefore \begin{cases} 2a-1 < 0 \\ 0 < a < 1 \\ (2a-1) \cdot 1 \leq a - \frac{2}{3} \end{cases}$,
 $\therefore 0 < a \leq \frac{1}{3}$.
 故选 A.

指数函数与函数性质综合

24 2018~2019学年12月天津南开区南开大学附属中学高一上学期月考第19题10分

已知函数 $f(x) = -\frac{1}{2} + \frac{a}{2^x + 1}$ ($x \in \mathbf{R}$) 是奇函数.

- (1) 求 a 的值.
- (2) 判断函数 $f(x)$ 的单调性 (不用证明).
- (3) 若关于 x 的不等式 $f(-2x^2 + 1) + f(x^2 - tx) \leq 0$ 在 $x \in (1, 2)$ 恒成立, 求 t 取值范围.

答案 (1) $a = 1$.

(2) $f(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2^x + 1}$ 在 $\mathbf{R}$ 上为减函数.

(3) $(-\infty, -\frac{3}{2}]$.

解析 (1) 由题意, 函数 $f(x) = -\frac{1}{2} + \frac{a}{2^x + 1}$ 是奇函数,
 $\therefore f(0) = 0$, 即 $-\frac{1}{2} + \frac{a}{2^0 + 1} = 0$,
 $\therefore a = 1$.

(2) 对于任意实数 x_1, x_2 , 不妨设 $x_1 < x_2$,

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{1}{2^{x_1} + 1} - \frac{1}{2^{x_2} + 1} = \frac{2^{x_2} - 2^{x_1}}{(2^{x_1} + 1)(2^{x_2} + 1)}.$$

$\because y = 2^x$ 递增, 且 $x_1 < x_2$,

$$\therefore 2^{x_1} < 2^{x_2},$$

$$\therefore f(x_1) - f(x_2) > 0,$$

$$\therefore f(x_1) > f(x_2),$$

故 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为减函数.

(3) $f(-2x^2 + 1) + f(x^2 - tx) \leq 0$ 等价于 $f(-2x^2 + 1) \leq f(-x^2 + tx)$.

$\because$ 函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的单调递增函数,

$$\therefore -2x^2 + 1 \leq -x^2 + tx, \text{ 即 } x \leq -x^2 + 1.$$

$$\therefore t \leq -x + \frac{1}{x}.$$

$\because g(x) = -x + \frac{1}{x}$ 在 $(1, 2)$ 单调递减,

$$\therefore g(x) \in \left(-\frac{3}{2}, 0\right),$$

$$\therefore t \text{ 的取值范围为 } \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right].$$



复合函数单调性

25

2018~2019 学年天津蓟县高一上学期期中第 18 题 8 分

已知函数 $f(x) = 2^{2x-x^2}$, $x \in \mathbf{R}$.

求 $f(x)$ 的单调区间.

答案

$f(x)$ 的单调增区间为 $(-\infty, 1)$, $f(x)$ 的单调减区间为 $(1, +\infty)$.

解析

此函数 $f(x) = 2^{2x-x^2}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,

$$\text{令 } t = 2x - x^2 = -(x-1)^2 + 1,$$

$$\text{则 } f(x) = 2^t,$$

$f(x)$ 的单调增区间, 即 t 的增区间为 $(-\infty, 1)$, $f(x)$ 的单调减区间,

即 t 的减区间为 $(1, +\infty)$.



复合型指数函数的值域

26 2018~2019学年天津蓟县高一上学期期中第18题8分

已知函数 $f(x) = 2^{2x-x^2}$, $x \in \mathbf{R}$.

求 $f(x)$ 的值域.

答案 $(0, 2]$.

解析 $\because t = 2x - x^2 = -(x-1)^2 + 1 \in (-\infty, 1]$,

则 $f(x) = 2^t \in (0, 2]$,

即 $f(x)$ 的值域为 $(0, 2]$.