

01幂函数以及二次函数练习题

1. 幂函数



求解析式

1

2019~2020学年天津河西区高一上学期期中第11题4分

已知幂函数 $y = f(x)$ 的图象过点 $(2, \sqrt{2})$ ，则它的解析式为 _____ .

答案

$$y = x^{\frac{1}{2}}$$

解析

因为 $y = f(x)$ 为幂函数，

所以令 $f(x) = x^a$ ，

又因为 $y = f(x)$ 的图象经过点 $(2, \sqrt{2})$ ，

即 $\sqrt{2} = 2^a$ ，解得 $a = \frac{1}{2}$ ，

所以解析式为 $y = x^{\frac{1}{2}}$.

2

2019~2020学年天津高一上学期期末（武清、蓟县、静海、宁河、宝坻）第11题4分

已知幂函数 $y = f(x)$ 的图象过 $(2, 4)$ ，则 $f(3) =$ _____ .

答案

9

解析

设 $y = x^a$ ，把 $(2, 4)$ 代入可得 $y = x^2$ ，当 $x = 3$ 时， $y = 9$.



奇偶性、单调性

3 已知幂函数 $f(x) = (m^2 - m - 1)x^{m+2}$ 的图像关于 y 轴对称，则实数 m 的值为 () .

A. 2或-1

B. -2或1

C. 2

D. -2

答案 C

解析 $f(x)$ 是幂函数，

$$\therefore m^2 - m - 1 = 1,$$

$$(m - 2)(m + 1) = 0,$$

$$m = 2 \text{ 或 } m = -1,$$

$$\textcircled{1} \text{ 当 } m = 2 \text{ 时, } f(x) = x^4.$$

图象关于 y 轴对称，符合题意 .

$$\textcircled{2} \text{ 当 } m = -1 \text{ 时, } f(x) = x.$$

图象不关于 y 轴对称，舍去，

综上， $m = 2$.

故选 C .

4 下列函数中，既是奇函数，又在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递减的函数是 () .

A. $y = x^{-2}$

B. $y = x^{-1}$

C. $y = x^2$

D. $y = x^{\frac{1}{3}}$

答案 B

5 2019~2020学年天津和平区天津市耀华中学高一上上学期期中第12题4分

函数 $y = (m^2 - m - 1)x^{m^2 - 2m - 3}$ 是幂函数且在 $(0, +\infty)$ 上单调递减，则实数 m 的值为 _____ .

答案 2

解析 函数 $y = (m^2 - m - 1)x^{m^2 - 2m - 3}$ 是函数，

$$\therefore m^2 - m - 1 = 1,$$

解得 $m = 2$ 或 $m = -1$ ；

当 $m = 2$ 时， $m^2 - 2m - 3 = -3$ ，

函数 $y = x^{-3}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减，满足题意；

当 $m = -1$ 时， $m^2 - 2m - 3 = 0$ ，

函数 $y = x^0$ 不满足题意；

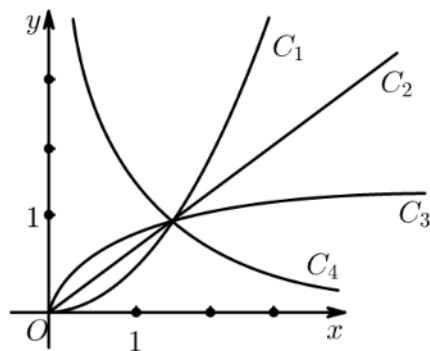
综上，实数 m 的值为 2 .

故答案为：2 .



图像

6 已知幂函数 $y = x^\alpha$ 在第一象限内的图象如图所示，且 α 分别取 $-1, 1, \frac{1}{2}, 2$ ，则相对应的曲线 C_1, C_2, C_3, C_4 的 α 的值依次为 _____ .



答案 $2, 1, \frac{1}{2}, -1$

解析 由幂函数图象与性质可得， C_4 到 C_1 对应的 α 值是越来越小的，

所以 α 分别取 $2, 1, \frac{1}{2}, -1$.

求解不等式

7 若 $(m+1)^{\frac{1}{2}} < (3-2m)^{\frac{1}{2}}$, 试求实数 m 的取值范围.

答案 $m \in \left[-1, \frac{2}{3}\right)$.

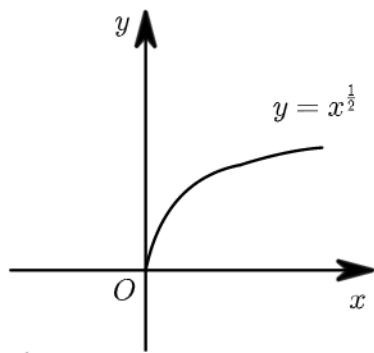
解析 方法一: $\because (m+1)^{\frac{1}{2}} < (3-2m)^{\frac{1}{2}}$,

$$\therefore 0 \leq m+1 < 3-2m,$$

$$\text{解得: } \begin{cases} m \geq -1 \\ m < \frac{2}{3} \end{cases},$$

$$\therefore m \in \left[-1, \frac{2}{3}\right).$$

方法二: 由解题配图,



$$\begin{cases} m+1 \geq 0 \\ 3-2m \geq 0 \\ 3-2m > m+1 \end{cases}, \text{ 解得 } -1 \leq m < \frac{2}{3}.$$

8 若 $(m+1)^{-1} < (3-2m)^{-1}$, 试求实数 m 的取值范围.

答案 $m \in (-\infty, -1) \cup \left(\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right)$.

解析

$$\text{① } \begin{cases} m+1 > 0 \\ 3-2m > 0 \end{cases}, \text{ 解得 } \frac{2}{3} < m < \frac{3}{2}.$$

$$\text{② } \begin{cases} m+1 > 3-2m \\ m+1 < 0 \end{cases}, \text{ 此时无解.}$$

$$\text{③ } \begin{cases} m+1 > 3-2m \\ m+1 < 0 \end{cases}, \text{ 解得 } m < -1.$$

综上可得 $m \in (-\infty, -1) \cup \left(\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right)$.

2. 二次函数

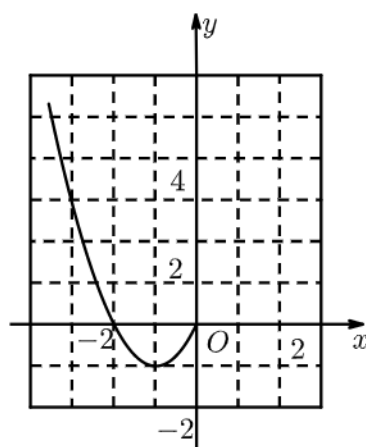


画图判断函数性质

9

2018~2019学年10月天津南开区南开大学附属中学高一上学期月考第17题

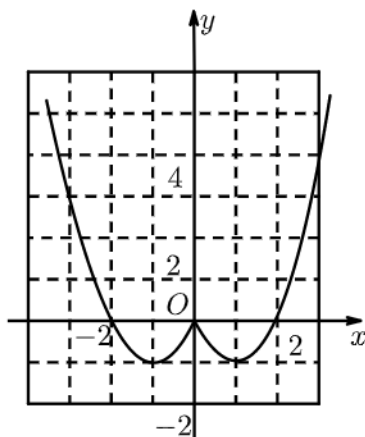
已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，且当 $x \leq 0$ 时， $f(x) = x^2 + 2x$ ，现已画出函数 $f(x)$ 在 y 轴左侧的图象，如图所示，请根据图象：



- (1) 画出函数 $f(x)$ ($x \in \mathbf{R}$) 在 y 轴右侧的图象 .
- (2) 写出函数 $f(x)$ ($x \in \mathbf{R}$) 的增区间 .
- (3) 写出函数 $f(x)$ ($x \in \mathbf{R}$) 的解析式 .

答案

(1)



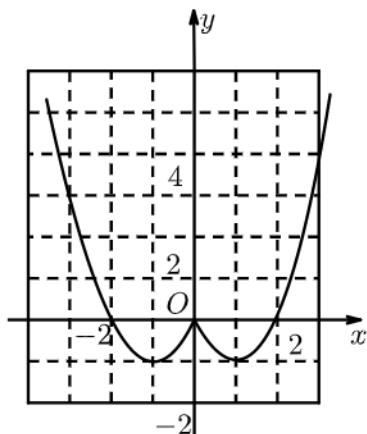
(2) $(-1, 0)$, $(1, +\infty)$.

(3) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & x \leq 0 \\ x^2 - 2x, & x > 0 \end{cases}$.

解析

(1) 根据偶函数的图象关于 y 轴对称, 可作出 $f(x)$ 的图象.

(2) 如图,



可知 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-1, 0)$, $(1, +\infty)$.

(3) 令 $x > 0$, 则 $-x < 0$,

$$\therefore f(-x) = x^2 - 2x,$$

$\because$ 函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数,

$$\therefore f(x) = f(-x) = x^2 - 2x,$$

$$\therefore \text{解析式为 } f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & x \leq 0 \\ x^2 - 2x, & x > 0 \end{cases}.$$



最值问题

10

2020~2021学年天津天津塘沽紫云中学高一上学期期中第15题5分

已知函数 $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = x^2 - 2$, 对于 $\forall x \in \mathbf{R}$, 用 $M(x)$ 表示 $f(x)$ 与 $g(x)$ 中的较大者, 记为

$M(x) = \max\{f(x), g(x)\}$, 则 $M(x)$ 的最小值是 _____.

答案

-1

解析

$$\because g(x) \geq f(x),$$

$$\therefore x^2 - 2 \geq 2x + 1,$$

$$\therefore x^2 - 2x - 3 \geq 0,$$

$$\therefore (x - 3)(x + 1) \geq 0,$$

$$\therefore x \leq -1 \text{ 或 } x \geq 3,$$

$$\therefore M(x) = \begin{cases} x^2 - 2, & x \leq -1 \text{ 或 } x \geq 3 \\ 2x + 1, & -1 \leq x \leq 3 \end{cases},$$

当 $x \leq 1$ 或 $x \geq 3$ 时 ,

$$M(x)_{\min} = -1 ,$$

当 $-1 \leq x \leq 3$ 时 , $M(x)_{\min} = 2 \times (-1) + 1 = -1 ,$

$$\therefore M(x)_{\min} = -1 .$$

故答案为 : -1 .

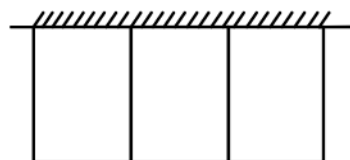


实际应用

11

2018~2019学年天津南开区高一上学期期末第15题3分

有一批材料可以建成 360m 长的围墙 , 如果用此材料在一边靠墙的地方围成一块矩形场地 , 中间用同样材料隔成三个面积相等的小矩形 (如图所示) , 则围成场地的最大面积为 _____ m^2 (围墙厚度不计) .



答案

8100

解析

设矩形的宽为 $x\text{m}$, 则矩形的长为 $(360 - 4x)\text{m}$,

$$\text{则 } S = x \cdot (360 - 4x)$$

$$= -4(x - 45)^2 + 8100 ,$$

$\therefore$ 当 $x = 45$ 时 , S 有最大值 ,

最大值为 8100m^2 .

3. 恒成立问题的讨论



实数域上恒成立问题

12

2019~2020学年10月天津河西区天津市新华中学高一上学期月考第10题

已知关于 x 的不等式 $kx^2 - 6kx + k + 8 \geq 0$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立，则 k 的取值范围是 _____ .

答案

$[0, 1]$

解析

当 $k = 0$ 时，不等式对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立；当 $k < 0$ 时，不等式 $kx^2 - 6kx + k + 8 \geq 0$ 不能恒成立；当 $k > 0$ 时，要使不等式 $kx^2 - 6kx + k + 8 \geq 0$ 对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立，对于方程

$kx^2 - 6kx + k + 8 = 0$ ，需 $\Delta = 36k^2 - 4(k^2 + 8k) \leq 0$ ，得 $0 < k \leq 1$.

综上，实数 k 的取值范围是 $[0, 1]$.

故答案为： $[0, 1]$.



直接分参

13

2020~2021学年10月天津南开区南开大学附属中学高一上学期月考第13题4分

若关于 x 的不等式 $x^2 - 4x - m \geq 0$ 对任意 $0 < x \leq 1$ 恒成立，则 m 的最大值为 _____ .

答案

-3

解析

$\because x^2 - 4x - m \geq 0$ 对 $\forall x \in (0, 1]$ 恒成立，

$\therefore m \leq x^2 - 4x$ 对 $\forall x \in (0, 1]$ 恒成立，

$\therefore m \leq (x^2 - 4x)_{\min}$ ，

$\because x^2 - 4x = (x - 2)^2 - 4$ ，

$\therefore -2 \leq x^2 - 4x < 0$ ，

$\therefore m \leq -3$ ，

$\therefore m_{\max} = -3$.



对勾函数型

14

2019~2020学年9月天津河北区天津外国语学院附属外国语学校高一上学期月考第12题4分

当 $x \in (1, 3)$ 时, 不等式 $x^2 - mx + 4 > 0$ 恒成立, 则实数 m 的取值范围是 _____ .

答案

$(-\infty, 4)$

解析

当 $x > 0$ 时, 不等式 $x^2 - mx + 4 > 0$ 恒成立

$\Leftrightarrow$ 当 $x > 0$ 时, 不等式 $m < x + \frac{4}{x}$ 恒成立 $\Leftrightarrow m < \left(x + \frac{4}{x}\right)_{\min}$,

当 $x > 0$ 时, $x + \frac{4}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{4}{x}} = 4$ (当且仅当 $x = 2$ 时取“=”),

因此 $\left(x + \frac{4}{x}\right)_{\min} = 4$, 所以 $m < 4$.

故答案为: $(-\infty, 4)$.