

01幂函数以及二次函数

1. 幂函数的相关概念

教法备注

【教师备注】

幂函数一讲考题在天津本地近三年高一上学期的考试卷中出现**次数较低**，属于**低频次知识章节**，老师们在讲课时可以适当性说明一下此讲的考频情况，并在讲授时进行适当取舍。

1. 幂函数的定义

一般地， $y = x^\alpha$ 叫做幂函数，其中 x 是自变量， α 是常数。

教法备注

【教师备注】幂函数的构成条件：

①**系数为1**；②**底数是单个自变量 x** ；③**指数为常数**。

反例： $y = \frac{1}{2}x^2$ ， $y = (x+1)^3$ ， $y = x^x$ 都不是幂函数。



判断是否幂函数

1 下面的函数中是幂函数的是 () .

① $y = x^2 + 2$ ② $y = x^{\frac{1}{2}}$ ③ $y = 2x^3$ ④ $y = x^{\frac{3}{4}}$ ⑤ $y = x^{\frac{1}{3}} + 1$

A. ①⑤

B. ②④

C. ①②③

D. ②③⑤

答案 B

解析 ① $y = x^2 + 2$ 后有常数项, 故不是 .

② $y = x^{\frac{1}{2}}$, 为 $y = x^a$ 的格式, 故不是 .

③ $y = 2x^3$, 前有系数2, 故不是 .

④ $y = x^{\frac{3}{4}}$, 为 $y = x^a$ 的格式, 故是 .

⑤ $y = x^{\frac{1}{3}} + 1$, 后有常数项, 故不是 .

综上, ②④为幂函数 .

故选B .



利用幂函数定义求解析式

教法备注

【教师备注】幂函数中考察频次最高的题型

2 2018~2019学年天津南开区南开大学附属中学高一上学期期末第11题3分

幂函数 $f(x) = x^a$ 的图象经过点 $(2, \frac{1}{4})$, 则 $a =$ _____ .

答案 -2

解析 $\because$ 幂函数 $f(x) = x^a$ 的图象经过点 $(2, \frac{1}{4})$,

$$\therefore 2^a = \frac{1}{4} = 2^{-2},$$

$$\therefore a = -2,$$

故答案为: -2 .

3 2018~2019学年天津西青区天津市西青区杨柳青第一中学高一上学期期中第11题4分

幂函数 $f(x)$ 的图象过点 $(3, \sqrt{3})$ ，则 $f(x)$ 的解析式是 _____ .

答案 $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$

解析 由题意令 $f(x) = x^n$ ，将点 $(3, \sqrt{3})$ 代入，

$$\text{得 } \sqrt{3} = 3^n, \text{ 解得 } n = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \text{幂函数 } f(x) = x^{\frac{1}{2}}.$$

4 2018~2019学年天津西青区天津市西青区杨柳青第一中学高一上学期期末第9题5分

幂函数 $f(x) = x^a$ 的图象过点 $(2, \frac{1}{8})$ ，则 $f(\frac{1}{3}) =$ _____ .

答案 27

解析 幂函数 $f(x) = x^a$ 的图象经过点 $(2, \frac{1}{8})$ ，

$$\therefore 2^a = \frac{1}{8}, \text{ 解得 } a = -3,$$

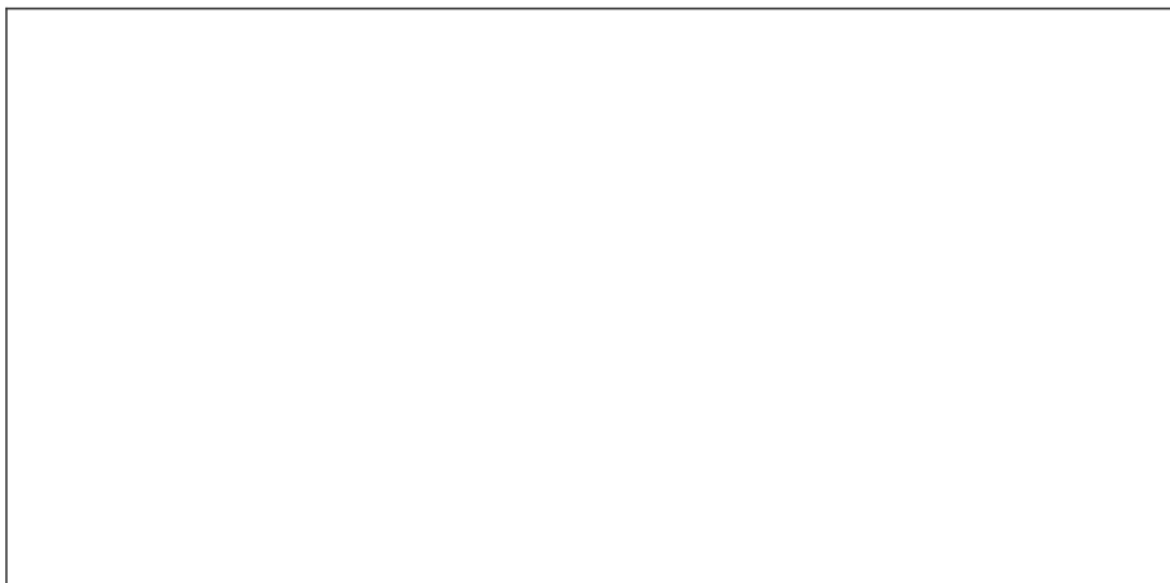
$$\therefore f(x) = x^{-3},$$

$$\therefore f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = 27.$$

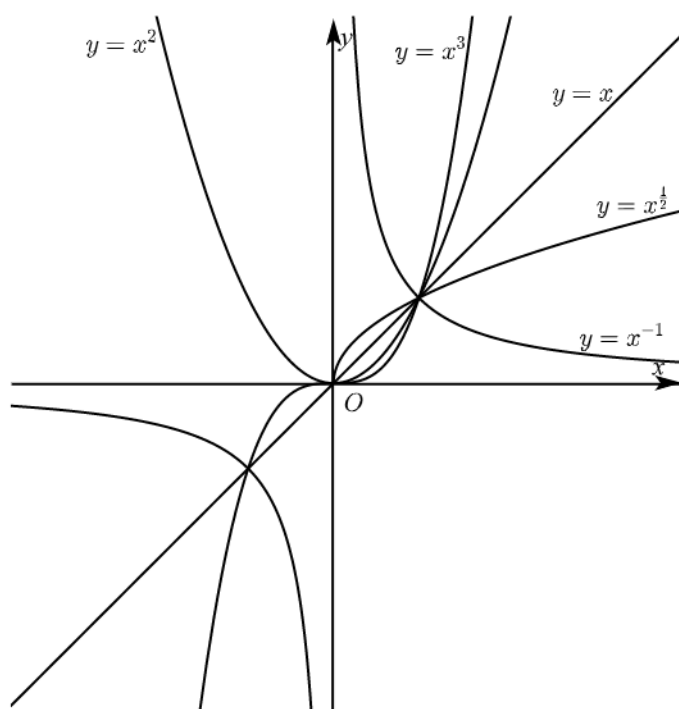
2.幂函数的图像

动手试试看~

在同一平面直角坐标系内作出幂函数 $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^{\frac{1}{2}}$, $y = x^{-1}$ 的图象



教法备注



3.借助图像观察幂函数的特征

	$y = x$	$y = x^2$	$y = x^3$	$y = x^{\frac{1}{2}}$	$y = x^{-1}$
图像					
定义域					
值域					
奇偶性					
单调性					
定点					
所在象限					

教法备注

【答案】

	$y = x$	$y = x^2$	$y = x^3$	$y = x^{\frac{1}{2}}$	$y = x^{-1}$
定义域	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	$[0, +\infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
值域	$\mathbf{R}$	$[0, +\infty)$	$\mathbf{R}$	$[0, +\infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
奇偶性	奇函数	偶函数	奇函数	非奇非偶函数	奇函数
单调性	单调递增	在 $(-\infty, 0]$ 上 减 在 $[0, +\infty)$ 上 增	单调递增	单调递增	在 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 上单调递减
定点	$(0, 0), (1, 1)$	$(0, 0), (1, 1)$	$(0, 0), (1, 1)$	$(0, 0), (1, 1)$	$(1, 1)$
所在象限	一、三	一、二	一、三	—	一、三



幂函数的奇偶性、单调性

教法备注

【教师备注】幂函数中相对频次较高的题型

5

2019~2020学年天津高一上学期期中六校联考第8题4分

已知幂函数 $f(x) = (m^2 - 3m - 3)x^{2m-3}$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数，则 m 值为（ ）.

A. 4

B. 3

C. -1

D. -1或4

答案

A

解析

幂函数 $f(x) = (m^2 - 3m - 3)x^{2m-3}$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数，

$$\therefore \begin{cases} m^2 - 3m - 3 = 1 \\ 2m - 3 > 0 \end{cases},$$

解得： $m = 4$.

故选A.

6

2018~2019学年天津和平区天津市第一中学高一上学期期中第11题

幂函数 $f(x) = (m^2 - 3m + 3)x^m$ 的图象关于 y 轴对称，则实数 $m =$ _____.

答案

2

解析

函数 $f(x) = (m^2 - 3m + 3)x^m$ 是幂函数，

$$\therefore m^2 - 3m + 3 = 1,$$

解得 $m = 1$ 或 $m = 2$,

当 $m = 1$ 时，函数 $y = x$ 的图象不关于 y 轴对称，舍去；

当 $m = 2$ 时，函数 $y = x^2$ 的图象关于 y 轴对称；

$\therefore$ 实数 $m = 2$.

故答案为：2.

7 已知幂函数 $f(x) = (m^2 - 3m + 3) \cdot x^{m+1}$ 为奇函数，实数 m 的值为 _____ .

答案 2

解析 由题意知， $f(x) = (m^2 - 3m + 3)x^{m+1}$ 是幂函数，

则 $m^2 - 3m + 3 = 1$ ，

解得， $m = 1$ 或 $m = 2$ ，

$m = 1$ 时， $f(x) = x^2$ 是偶函数，

$m = 2$ 时， $f(x) = x^3$ 是奇函数，

综上，实数 m 的值为 2 .

故答案为：2 .

8 2018~2019 学年天津南开区天津市南开中学高一上学期期中第 11 题 4 分

幂函数 $f(x) = x^{m^2-3m}$ 的图象关于 y 轴对称，且在 $(0, +\infty)$ 上单调递减，则整数 $m =$ _____ .

答案 1 或 2

解析 幂函数 $f(x) = x^{m^2-3m}$ 的图象关于 y 轴对称，

且在 $(0, +\infty)$ 上递减，

$\therefore m^2 - 3m < 0$ ，且 $m^2 - 3m$ 是偶数，

$\therefore 0 < m < 3$ ，

故 $m = 1$ 或 2 .

9

2018~2019学年天津河西区天津市第四十二中学高一上学期期中第11题4分

若幂函数 $y = (m^2 - 3m + 3)x^{m^2 - m - 2}$ 在 $(0, +\infty)$ 是减函数，则实数 $m = \underline{\hspace{2cm}}$.

答案 1

解析 令 $m^2 - 3m + 3 = 1$,
解得： $m = 1$ 或 $m = 2$,
 $m = 1$ 时， $y = x^{-2}$ 是减函数，
 $m = 2$ 时， $y = 1$ ，是常函数，
故答案为：1 .

2. 幂函数常见题型

教法备注

【教师备注】此处题型在题库中**天津**的试卷中出现**频次为0**，部分原因是题库中参考试卷有限，其次就是幂函数此处在高一阶段的重要性不足，授课时可有所侧重和取舍



与幂函数图像有关的问题

1. 依据图像高低判断幂指数大小：

- ①在 $(0, 1)$ 上，指数越大，幂函数图像越靠近 x 轴；
- ②在 $(1, +\infty)$ 上，指数越大，幂函数图像越远离 x 轴。

2. 定点与凹凸性：

- ①当 $\alpha > 0$ 时，幂函数的图像都经过_____点，
在第一象限内，当 $0 < \alpha < 1$ 时，曲线**上凸**；当 $\alpha > 1$ 时，曲线**下凸**；
- ②当 $\alpha < 0$ 时，幂函数的图像都经过_____点，
在第一象限内，曲线**下凸**。

教法备注

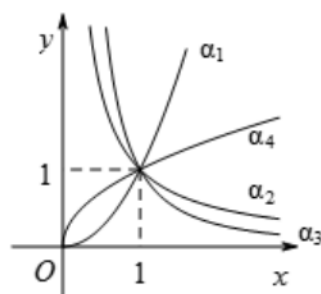
【教师备注】

- 1. 图像：①在 $(0, 1)$ 上，**指大图低**；②在 $(1, +\infty)$ 上，**指大图高**。

【答案】

- 2. 定点：① $(0, 0)$ ； $(1, 1)$ ；② $(1, 1)$

10 下图为幂函数 $y = x^\alpha$ 在第一象限的图象，则 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 按由大到小的顺序排列为 _____ .



答案 $\alpha_1 > \alpha_4 > \alpha_2 > \alpha_3$

解析 根据幂函数的性质，在第一象限内的图象：

当 $\alpha > 0$ 时， α 越大，递增速度越快，故 $\alpha_1 > \alpha_4 > 0$ ，

当 $\alpha < 0$ 时， $|\alpha|$ 越大，曲线越陡峭，

所以 $0 > \alpha_2 > \alpha_3$ ，

则 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 按由大到小的顺序排列为 $\alpha_1 > \alpha_4 > \alpha_2 > \alpha_3$.

利用幂函数解不等式

11 2020~2021学年10月天津和平区天津市第二十一中学高三上学期月考第1题4分

设 $x \in \mathbf{R}$ ，则 $\left|x - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$ 是“ $x^3 < 1$ ”的 () .

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

答案 A

解析 由 $\left|x - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$ 得 $0 < x < 1$ ，所以 $0 < x^3 < 1$ ；

由 $x^3 < 1$ ，得 $x < 1$ ，不能推出 $0 < x < 1$ ，

所以 $\left|x - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$ 是“ $x^3 < 1$ ”的充分而不必要条件 .

故选A .

12 若 $f(x) = x^{\frac{1}{4}}$, 则不等式 $f(x) > f(8x - 16)$ 的解集是 ().

A. $(-\infty, \frac{16}{7}]$

B. $(0, 2]$

C. $[2, \frac{16}{7})$

D. $[2, +\infty)$

答案 C

解析 由 $f(x) = x^{\frac{1}{4}}$ 知, $f(x)$ 是定义在 $[0, +\infty)$ 上的增函数,

则不等式 $f(x) > f(8x - 16)$, 得 $\begin{cases} x \geq 0 \\ 8(x - 2) \geq 0 \\ x > 8(x - 2) \end{cases}$,

$\therefore 2 \leq x < \frac{16}{7}$,

故选 C.

13 若 $(a + 1)^{-\frac{1}{2}} < (3 - 2a)^{-\frac{1}{2}}$, 则 a 的取值范围是 ().

A. $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$

B. $(\frac{2}{3}, 2)$

C. $(\frac{2}{3}, \frac{3}{2})$

D. $(\frac{3}{2}, +\infty)$

教法备注

【教师备注】

法一：解析给出的解不等式角度出发直接求解

法二：构造函数 $y = x^{-\frac{1}{2}}$, 根据图像探讨 $y = x^{-\frac{1}{2}}$ 的定义域与单调性, 从而求解不等式

答案 C

解析 不等式 $(a + 1)^{-\frac{1}{2}} < (3 - 2a)^{-\frac{1}{2}}$, 即 $\frac{1}{\sqrt{a + 1}} < \frac{1}{\sqrt{3 - 2a}}$,

$\therefore \begin{cases} a + 1 > 0 \\ 3 - 2a > 0 \\ a + 1 > 3 - 2a \end{cases}$, 解得 $\frac{2}{3} < a < \frac{3}{2}$,

$\therefore$ 原不等式的解集为 $(\frac{2}{3}, \frac{3}{2})$.

故选 C.

3. 二次函数

1. 二次函数图像及对应一元二次方程根的分布

二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ $(a > 0)$ 的图象			
判别式的情况			
$ax^2 + bx + c = 0$ 的根			
零点个数			

教法备注

【答案】

判别式的情况	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$ax^2 + bx + c = 0$ 的根	$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$	$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$	方程无实根
零点个数	两个	一个	无

【教师备注】

类似可推导开口向下的情况

2. 韦达定理

设 x_1, x_2 , 为方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两实根, 则_____

教法备注

【答案】

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$



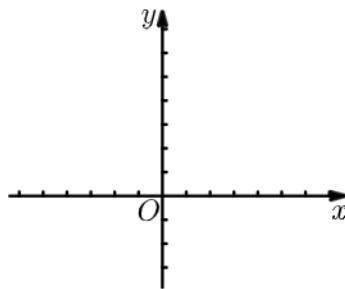
画图判断函数性质

14

2018~2019学年9月天津河东区天津市第四十五中学高一上学期月考第17题

已知函数 $f(x) = x^2 - 4|x| + 3, x \in \mathbf{R}$.

- (1) 判断函数的奇偶性并将函数写成分段函数的形式.
- (2) 画出函数的图象.



- (3) 根据图象写出它的单调区间及值域.

答案

(1) $f(x)$ 是偶函数, $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3, & x \geq 0 \\ x^2 + 4x + 3, & x < 0 \end{cases}$.

(2) 画图见解析.

(3) 增区间 $(-2, 0), (2, +\infty)$, 减区间 $(-\infty, -2), (0, 2)$,
值域 $[-1, +\infty)$.

解析

(1) $f(-x) = (-x)^2 - 4|-x| + 3$

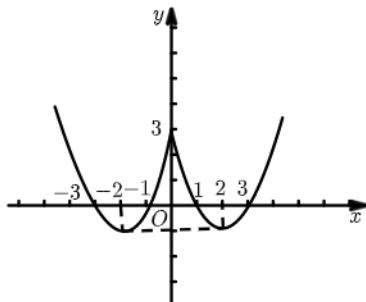
$$= x^2 - 4|x| + 3$$

$$= f(x),$$

$\therefore f(x)$ 是偶函数,

$$f(x) = x^2 - 4|x| + 3 = \begin{cases} x^2 - 4x + 3, & x \geq 0 \\ x^2 + 4x + 3, & x < 0 \end{cases}.$$

(2)



(3) 由图知,

增区间 $(-2, 0), (2, +\infty)$, 减区间 $(-\infty, -2), (0, 2)$,

值域 $[-1, +\infty)$.



最值问题

15

2019~2020学年天津南开区天津市南开中学高一上学期期中第18题

函数 $f(x) = 2x^2 - 2ax + 3$ 在区间 $[-1, 1]$ 上最小值即为 $g(a)$.

(1) 求 $g(a)$ 的函数表达式 .

(2) 求 $g(a)$ 的最大值 .

答案

$$(1) \quad g(a) = \begin{cases} 2a + 5, & a \leq -2 \\ 3 - \frac{a^2}{2}, & -2 < a < 2 \\ 5 - 2a, & a \geq 2 \end{cases} .$$

$$(2) \quad g(a)_{\max} = 3 .$$

解析

$$(1) \quad \textcircled{1} \frac{a}{2} \leq -1 \text{ 即 } a \leq -2 \text{ 时 ,}$$

$$g(a) = f(-1) = 2 + 2a + 3 = 2a + 5 ;$$

$$\textcircled{2} -1 < \frac{a}{2} < 1 \text{ 即 } -2 < a < 2 \text{ 时 ,}$$

$$g(a) = f\left(\frac{a}{2}\right) = 3 - \frac{a^2}{2} ;$$

$$\textcircled{3} \frac{a}{2} \geq 1 \text{ 即 } a \geq 2 \text{ 时 ,}$$

$$g(a) = f(1) = 5 - 2a ,$$

$$\therefore g(a) = \begin{cases} 2a + 5, & a \leq -2 \\ 3 - \frac{a^2}{2}, & -2 < a < 2 \\ 5 - 2a, & a \geq 2 \end{cases} .$$

$$(2) \quad \textcircled{1} a \leq -2 \text{ 时 , } g(a)_{\max} = g(-2) = 1 ;$$

$$\textcircled{2} -2 < a < 2 \text{ 时 , } g(a)_{\max} = g(0) = 3 ;$$

$$\textcircled{3} a \geq 2 \text{ 时 , } g(a)_{\max} = g(2) = 1 ,$$

$$\therefore g(a)_{\max} = 3 .$$

实际应用

16 2020~2021学年天津武清区武清区杨村第一中学高一上学期期中（七校联考）第17题12分

因新冠肺炎疫情影响，呼吸机成为紧缺商品，某呼吸机生产企业为了提高产品的产量，投入90万元安装了一台新设备，并立即进行生产．预计使用该设备前 $n(n \in \mathbf{N})$ 年的材料费、维修费、人工工资等共为 $\left(\frac{5}{2}n^2 + 5n\right)$ 万元，每年的销售收入55万元，设使用该设备前 n 年的总盈利额为 $f(n)$ 万元．

(1) 写出 $f(n)$ 关于 n 的函数关系式，并估计该设备从第几年开始盈利．

(2) 使用若干年后，对该设备处理的方案有两种：

方案一：当总盈利额达到最大值时，该设备以10万元的价格处理；

方案二：当年平均盈利额达到最大值时，该设备以50万元的价格处理．

问哪种方案处理较为合理？并说明理由．

答案

(1) $f(n) = 55n - 90 - \left(\frac{5}{2}n^2 + 5n\right) = -\frac{5}{2}n^2 + 50n - 90$ ，第3年开始盈利．

(2) 选择第二种方案更合适；证明见解析．

解析

(1) 由题意得：

$$f(n) = 55n - 90 - \left(\frac{5}{2}n^2 + 5n\right) = -\frac{5}{2}n^2 + 50n - 90,$$

$$\text{由 } f(n) > 0 \text{ 得 } -\frac{5}{2}n^2 + 50n - 90 > 0 \text{ 即 } n^2 - 20n + 36 < 0,$$

$$\text{解得 } 2 < n < 18,$$

由 $n \in \mathbf{N}_+$ ，设备企业从第3年开始盈利．

(2) 方案一：总盈利额 $f(n) = -\frac{5}{2}(n-10)^2 + 160$ ，

$$\text{当 } n = 10 \text{ 时， } f(n)_{\max} = 160,$$

故方案一共总利润 $160 + 10 = 170$ ，此时 $n = 10$ ；

$$\text{方案二：年平均利润 } \frac{f(n)}{n} = 50 - \frac{5}{2} \left(n + \frac{36}{n}\right) \leq 50 - \frac{5}{2} \times 2\sqrt{36} = 20,$$

当且仅当 $n = 6$ 时等号成立，

$$\text{故方案二总利润 } 6 \times 20 + 50 = 170, \text{ 此时 } n = 6,$$

比较两种方案，获利都是170万元，但由于第一种方案需要10年，而第二种方案需要6年，故选择第二种方案更合适．



根的分布

17

2018~2019学年天津河西区高一上学期期末第20题10分

函数 $f(x) = x^2 + 2mx + 3m + 4$.

- (1) 若 $f(x)$ 有且只有一个零点, 求 m 的值 .
- (2) 若 $f(x)$ 有两个零点且均比 -1 大, 求 m 的取值范围 .

答案

- (1) $m = 4$ 或 $m = -1$.
- (2) $(-5, -1)$.

解析

- (1) 由函数 $f(x) = x^2 + 2mx + 3m + 4$, 有且仅有一个零点可知 ,

$$\Delta = 4m^2 - 4(3m + 4) = 0 ,$$

$$\therefore m^2 - 3m - 4 = 0 .$$

$$m = 4 \text{ 或 } m = -1 .$$

- (2) 由题可知

$$\begin{cases} 4m^2 - 4(3m + 4) > 0 \\ -m > -1 \\ f(-1) > 0 \end{cases}$$

$$\text{即 } \begin{cases} m^2 - 3m - 4 > 0 \\ m < 1 \\ 1 - 2m + 3m + 4 > 0 \end{cases}$$

$$\text{解得 } -5 < m < -1 .$$

$$m \text{ 的取值范围为 } (-5, -1) .$$

18 2018~2019学年天津河东区高一上学期期中第19题10分

已知函数 $f(x) = ax^2 + 4x - 1$.

- (1) 若函数在区间 $(-1, 1)$ 内恰有一个零点, 求实数 a 的取值范围 .
- (2) 求函数在区间 $[1, 2]$ 上的最大值 .

答案

(1) $-3 \leq a \leq 5$ 或 $a = -4$.

$$(2) f(x)_{\max} = \begin{cases} 4a + 7, & a \geq -1 \\ -\frac{4}{a} - 1, & -2 < a < -1 \\ a + 3, & a \leq -2 \end{cases} .$$

解析

(1) 当 $a = 0$, $f(x) = 4x - 1$ 的零点为 $x = \frac{1}{4} \in (-1, 1)$, 满足恰有一个零点;

当 $a \neq 0$, ① $\Delta > 0$ 时, 由零点存在性定理结合二次函数图象可得 $f(-1)f(1) < 0$, 解得 $-3 < a < 5$ 且 $a \neq 0$;

② $\Delta = 0 \Rightarrow a = -4$, 此时 $f(x) = -4x^2 + 4x - 1$, 零点 $x = \frac{1}{2} \in (-1, 1)$, 满足条件;

③ 当 $f(1) = 0$ 时, $a = -3$, 令 $f(x) = -3x^2 + 4x - 1 = 0$, 解得 $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{3}$, $a = -3$ 符合题意;

④ 当 $f(-1) = 0$ 时, $a = 5$, 令 $f(x) = 5x^2 + 4x - 1 = 0$, 解得 $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{1}{5}$, $a = 5$ 符合题意;

综上所述满足条件的 a 的取值范围是 $-3 \leq a \leq 5$ 或 $a = -4$.

(2) ① $a = 0$ 时, $f(x) = 4x - 1$,

$$f(x)_{\max} = f(2) = 4 \times 2 - 1 = 7,$$

② $a > 0$ 时, 对称轴 $x = -\frac{a}{2} < 0$,

$\therefore f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上单调递增,

$$f(x)_{\max} = f(2) = 4a + 7,$$

③ $a < 0$ 时,

$$-\frac{2}{a} \leq 1 \text{ 时, 即 } a \leq -2,$$

$f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上单调递减,

$$f(x)_{\max} = f(1) = a + 3,$$

$$1 < -\frac{2}{a} < 2 \text{ 时, } -2 < a < -1,$$

$$f(x)_{\max} = f\left(-\frac{2}{a}\right) = -\frac{4}{a} - 1,$$

$$-\frac{2}{a} \geq 2 \text{ 时}, 1 - \leq a < 0 \text{ 时},$$

$$f(x) \text{ 在 } [1, 2] \text{ 上单调递增},$$

$$f(x)_{\max} = f(2) = 4a + 7,$$

$$\text{综上, } f(x)_{\max} = \begin{cases} 4a + 7, a \geq -1 \\ -\frac{4}{a} - 1, -2 < a < -1 \\ a + 3, a \leq -2 \end{cases}.$$

4. 恒能成立问题的讨论

直接分参型

19 2020~2021学年天津滨海新区塘沽第一中学高一上学期中第21题12分

已知 $a \in \mathbf{R}$, 若关于 x 的不等式 $(1-a)x^2 - 4x + 6 > 0$ 的解集是 $(-3, 1)$.

- (1) 求不等式 $ax^2 - 2x - 1 \geq 0$ 的解集.
- (2) 若关于 x 的不等式 $ax^2 + 6x + b \leq 0$ 在 $[0, 2]$ 上恒成立, 求实数 b 的取值范围.

答案 (1) $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right] \cup [1, +\infty)$.
(2) $(-\infty, -24]$.

解析 (1) 由题意得 1 和 -3 是 $(1-a)x^2 - 4x + 6 = 0$ 的两根,

$$\text{所以 } \begin{cases} \frac{4}{1-a} = -2 \\ \frac{6}{1-a} = -3 \end{cases}, \text{ 解得 } a = 3,$$

不等式 $ax^2 - 2x - 1 \geq 0$ 即为 $3x^2 - 2x - 1 \geq 0$,

解得 $x \leq -\frac{1}{3}$ 或 $x \geq 1$,

即不等式的解集为 $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right] \cup [1, +\infty)$.

(2) 由 (1) 可知 $3x^2 + 6x + b \leq 0$ 在 $[0, 2]$ 上恒成立,

即 $b \leq -3x^2 - 6x$ 在 $[0, 2]$ 上恒成立,

因为函数 $y = -3x^2 - 6x$ 在 $[0, 2]$ 上单调递减,

所以当 $x = 2$ 时取得最小值为 -24,

所以 $b \leq -24$,

即实数 b 的取值范围为 $(-\infty, -24]$.

对勾函数型

20 2020~2021学年天津和平区天津市第一中学高一上学期期中第18题

已知函数 $f(x) = x^2 + mx + 4$.

- (1) 当 $1 \leq x \leq 2$ 时, 求函数 $f(x)$ 的最大值.
- (2) 当 $1 \leq x \leq 2$ 时, $f(x) < 0$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

答案

- (1) 当 $-\frac{m}{2} \leq \frac{3}{2}$ 时, $f(x)_{\max} = 2m + 8$; 当 $-\frac{m}{2} > \frac{3}{2}$ 时, $f(x)_{\max} = m + 5$.
- (2) $m < -5$.

解析

- (1) $\because f(x) = x^2 + mx + 4$,
 $\therefore$ 对称轴: $x = -\frac{m}{2}$,
 ①当 $-\frac{m}{2} \leq \frac{3}{2}$ 时, 即 $m \geq -3$ 时,
 $f(x)_{\max} = f(2) = 4 + 2m + 4 = 2m + 8$;
 ② $-\frac{m}{2} > \frac{3}{2}$ 时, 即 $m < -3$ 时,
 $f(x)_{\max} = f(1) = 1 + m + 4 = m + 5$.
- (2) $\because$ 当 $1 \leq x \leq 2$ 时, $f(x) < 0$ 恒成立,
 $\therefore x^2 + mx + 4 < 0$ 对 $\forall x \in [1, 2]$ 恒成立,
 $\therefore -m > x + \frac{4}{x}$ 对 $\forall x \in [1, 2]$ 恒成立,
 $\therefore -m > \left(x + \frac{4}{x}\right)_{\max}$,
 $\because$ 由对勾函数知 $x + \frac{4}{x}$ 在 $[1, 2]$ 上单调递减,
 $\therefore \left(x + \frac{4}{x}\right)_{\max} = 1 + \frac{4}{1} = 5$,
 $\therefore -m > 5$,
 $\therefore m < -5$.



实数域上恒成立的讨论

21

2020~2021学年10月天津和平区天津市汇文中学高一上学期月考第20题12分

设函数 $f(x) = mx^2 - mx - 1$.

- (1) 若对于一切实数 x , $f(x) < 0$ 恒成立 , 求 m 的取值范围 .
- (2) 若对于 $x \in [1, 3]$, $f(x) < -m + 5$ 恒成立 , 求 m 的取值范围 .

答案

- (1) $(-4, 0]$.
- (2) $\left(-\infty, \frac{6}{7}\right)$.

解析

- (1) $mx^2 - mx - 1 < 0$ 恒成立 ,
 若 $m = 0$, 显然 $-1 < 0$ 成立 ,
 若 $m \neq 0$, 则 $\begin{cases} m < 0 \\ \Delta = (-m)^2 + 4m < 0 \end{cases} \Rightarrow -4 < m < 0$,
 所以 m 的取值范围为 $(-4, 0]$.
- (2) 要使 $f(x) < -m + 5$ 在 $[1, 3]$ 上恒成立 , 只需 $mx^2 - mx + m < 6$ 在 $[1, 3]$ 上恒成立 ,
 即 $m(x^2 - x + 1) < 6$ 在 $[1, 3]$ 上恒成立 ,
 又因为 $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$,
 所以 $m < \frac{6}{x^2 - x + 1}$,
 令 $h(x) = \frac{6}{x^2 - x + 1} = \frac{6}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$,
 因为 $y = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ 在 $[1, 3]$ 上是增函数 ,
 所以 $h(x)$ 在 $[1, 3]$ 上是减函数 .
 因此函数 $h(x)$ 的最小值为 $h(3) = \frac{6}{7}$,
 所以 m 的取值范围是 $\left(-\infty, \frac{6}{7}\right)$.