

02函数的值域与最值练习题

1. 二次函数的值域

1 2018~2019学年10月天津河西区天津市第四十二中学高一上学期月考第16题

函数 $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $-1 \leq x \leq 2$ 的值域 _____ .

答案 [2, 6]

解析 $f(x) = x^2 - 2x + 3$,

对称轴为 $x = 1 \in [-1, 2]$,

$\therefore f(x)$ 在 $x = 1$ 处取得最小值 , $f(1) = 2$,

在 $x = -1$ 处取得最大值 , $f(-1) = 6$,

$\therefore f(x)$ 在 $[-1, 2]$ 上值域为 $[2, 6]$.

故答案为 : $[2, 6]$.

2 2020~2021学年天津和平区天津市耀华中学高一上学期期中第16题4分

已知函数 $f(x) = x^2 - 2x + 2$, $x \in [0, 3]$, 则函数的值域为 _____ .

答案 [1, 5]

解析 $\because f(x) = x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1$,

当 $x = 1$ 时 , $f(x)_{\min} = 1$,

当 $x = 3$ 时 , $f(x)_{\max} = 5$,

$\therefore f(x) \in [1, 5]$.

3 求下列函数值域 :

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 3} .$$

答案 $\left(0, \frac{1}{2}\right]$.

2. 观察法求解值域

4 2018~2019学年天津蓟县高一上学期期中第12题4分

函数 $f(x) = \frac{2}{x-1}$ 的定义域为 $[2, 5)$ ，则其值域为 _____.

答案 $\left(\frac{1}{2}, 2\right]$

解析 $\because 2 \leq x < 5,$

$$\therefore 1 \leq x-1 < 4,$$

$$\therefore \frac{1}{4} < \frac{1}{x-1} \leq 1,$$

$$\therefore \frac{1}{2} < \frac{2}{x-1} \leq 2,$$

$$\therefore f(x) \text{ 的值域为 } \left(\frac{1}{2}, 2\right].$$

故答案为： $\left(\frac{1}{2}, 2\right]$.

5 2020~2021学年天津河北区天津市第七十八中学高一上学期期中第8题

$y = \frac{2}{x}$ 在区间 $[2, 4]$ 上的最大值、最小值分别是 ().

A. $1, \frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{2}, 1$

C. $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$

D. $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}$

答案 A

解析 $\because y = \frac{2}{x}$ 在区间 $[2, 4]$ 上单调递减，所以 $y_{\max} = \frac{2}{2} = 1, y_{\min} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

6 求下列函数值域：

$$f(x) = \frac{2}{x-3} (x \in (-2, 3) \cup (3, 4)).$$

答案 $\left(-\infty, -\frac{2}{5}\right) \cup (2, +\infty)$.

7 求下列函数值域：

$$f(x) = 1 - \sqrt{1-x^2} .$$

答案 $[0, 1]$.

3. 换元法求解值域

8 2019~2020学年天津南开区天津市南开中学高一上学期期中第13题4分

函数 $y = x + 4\sqrt{1+x}$ 的值域为 _____ .

答案 $[-1, +\infty)$

解析 $\because y = x + 4\sqrt{1+x}$ 满足 $x+1 \geq 0$,

即 $x \geq -1$,

且 $y = x + 4\sqrt{1+x}$ 在 $[-1, +\infty)$ 为增函数 ,

当 $x = -1$ 时 , $y = -1$,

$\therefore$ 函数值域为 $[-1, +\infty)$.

故答案为 : $[-1, +\infty)$

9 2018~2019学年9月天津河东区天津市第五十四中学高一上学期月考第18题11分

计算：

求函数 $y = 2x + \sqrt{x-1}$ 的值域 .

答案 $[2, +\infty)$.

解析 定义域 $[1, +\infty)$,

令 $t = \sqrt{x-1} (t \geq 0)$, 则 $x = t^2 + 1$.

$$\therefore y = 2(t^2 + 1) + t$$

$$= 2t^2 + t + 2$$

$$= 2\left(t + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{8} .$$

$\therefore y = 2\left(t + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{8}$ 的图象的对称轴方程为 $t = -\frac{1}{4}$. 开口向上 .

$\therefore y = 2\left(t + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{8}$ 在 $[0, +\infty)$ 单调递增 .

$\therefore$ 当 $t = 0$ 时 , y 取最小值 2 .

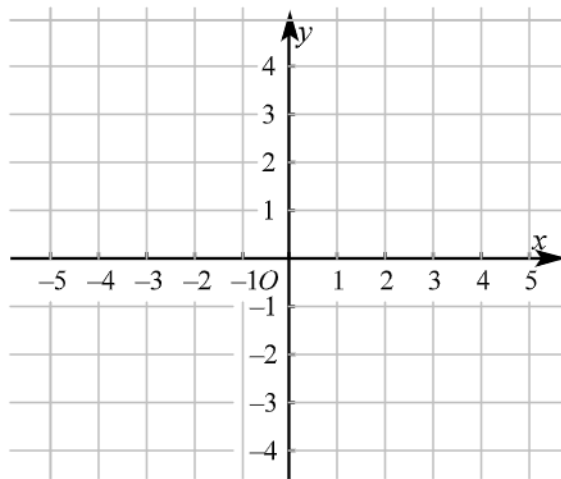
$\therefore y = 2x + \sqrt{x-1}$ 值域为 $[2, +\infty)$.

4. 数形结合求解值域

10 2020~2021 学年天津和平区天津市第五十五中学高一上学期期中第 18 题 12 分

已知函数 $f(x) = \begin{cases} x+2, & x \leq -1 \\ x^2, & -1 < x < 2 \\ -2, & x \geq 2 \end{cases}$.

(1) 在给定的平面直角坐标系内 , 画出函数 $f(x)$ 的图象 .



(2) 指出函数 $f(x)$ 在区间 $[-2, 3]$ 上的值域 .

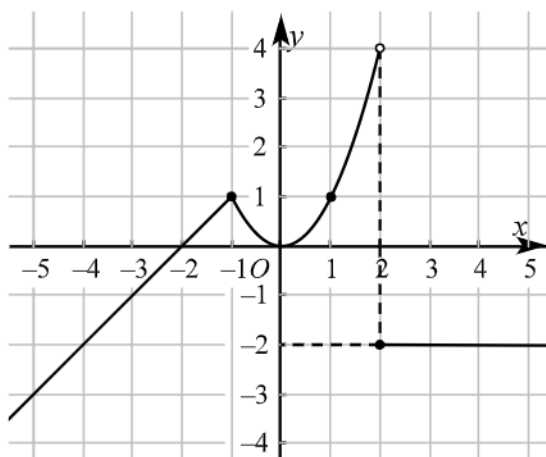
答案

(1) 画图见解析 .

(2) 值域 $\{-2\} \cup [0, 4)$.

解析

(1) 画出 $f(x)$ 图象如图 .



(2) 由图象得, $f(x)$ 在 $[-2, 3]$ 上值域为 $\{-2\} \cup [0, 4)$.

5. 分离常数法求解值域

11 函数 $y = \frac{x+3}{2x-3} (x > 2)$ 的值域为 _____.

答案 $\left(\frac{1}{2}, 5\right)$

12 2018~2019 学年 9 月天津河东区天津市第五十四中学高一上学期月考第 18 题 11 分

计算:

求函数 $y = \frac{3x-1}{x+1}$ 在 $(0, +\infty)$ 上的值域.

答案 $(-1, 3)$.

解析 $y = \frac{3x-1}{x+1} = 3 - \frac{4}{x+1}$.

由反比例函数性质得 y 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

$\therefore y > 3 - \frac{4}{0+1} = -1$, 且 $y < 3$.

$\therefore$ 值域为 $(-1, 3)$.

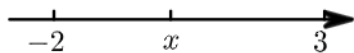
6. 分段函数的值域

13 2018~2019学年天津和平区高一上学期期中第12题4分

函数 $y = |x + 2| + |x - 3|$ 的最小值是 _____ .

答案 5

解析 $|x + 2| + |x - 3|$ 即 x 到 -2 与到 3 的距离和 ,

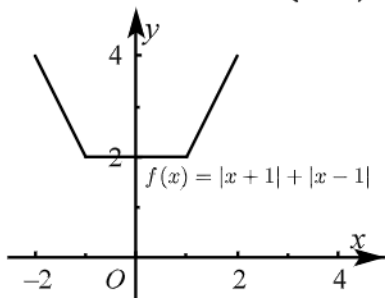


由几何意义知 , 最小值为 5 .

14 函数 $y = |x + 1| + |x - 1|$ 的值域为 _____ .

答案 $[2, +\infty)$

解析 $y = |x + 1| + |x - 1| = \begin{cases} 2x, & x \geq 1 \\ 2, & -1 \leq x < 1 \\ -2x, & x < -1 \end{cases}$, 画图 ,



得值域为 $[2, +\infty)$.

15 2018~2019学年9月天津河东区天津市第四十五中学高一上学期月考第5题

函数 $f(x) = \begin{cases} 2x - x^2, & 0 \leq x \leq 3 \\ x^2 + 6x, & -2 \leq x < 0 \end{cases}$ 的值域是 () .

A. $\mathbf{R}$

B. $[-8, 1]$

C. $[1, +\infty)$

D. $[-9, 1]$

答案 B

解析 当 $0 \leq x \leq 3$, $y = 2x - x^2$ 的值域为 $[-3, 1]$;

当 $-2 \leq x < 0$, $y = x^2 + 6x$ 的值域为 $[-8, 0]$,

$$\therefore f(x) \in [-8, 1] .$$

故选B .