

01函数的概念

1. 函数的定义

1. 函数的定义

设 A 、 B 是两个**非空数集**，如果按照某种**确定的对应关系** f ，使对于**集合 A 中的任意一个数 x** ，**在集合 B 中都有唯一确定的数 $f(x)$ 和它对应**——

那么就称 $f: A \rightarrow B$ 为从集合 A 到集合 B 的一个**函数**，记作 $f(x) x \in A$ ；

2. 函数定义中强调“三性”——任意性、存在性、唯一性

即对于非空数集 A 中的任意一个(任意性)数 x ，在集合 B 中都有(存在性)唯一(唯一性)的数 y 与之对应. 这三性只要有一个不满足，便不能构成函数.

3. 函数三要素

以上定义中， x 叫做**自变量**， x 的取值范围 A 叫做函数的**定义域**；与 x 的值相对应的 y 值叫做**函数值**，函数值的集合 $\{f(x) | x \in A\}$ 叫做函数的**值域**

定义域、值域、对应关系是函数的三要素

显然， $\{f(x) | x \in A\} \subseteq B$.

教法备注

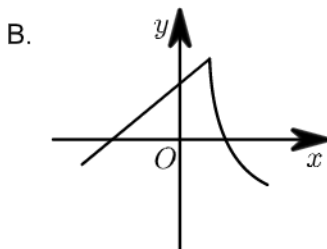
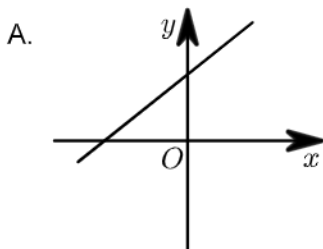
【教师备注】

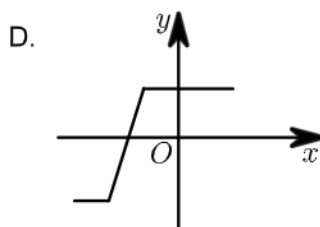
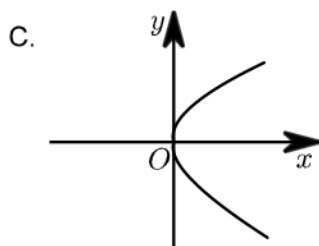
- ① A 、 B 都是非空数集，因此函数的定义域和值域不能为空集.
- ② **对应关系是核心，定义域是根本**，当定义域和对应关系确定时，值域也就确定了.
- ③ 关于**对应关系 f** ，它是函数的**本质特征**

1

2018~2019 学年 9 月天津西青区天津市西青区杨柳青第一中学高一上学期月考第 3 题

下列各图中，不可能是函数 $f(x)$ 图象的是 () .



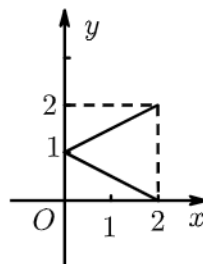
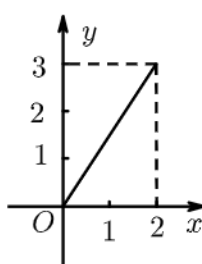
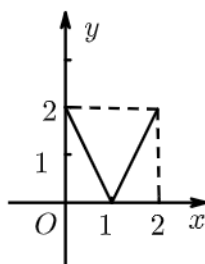
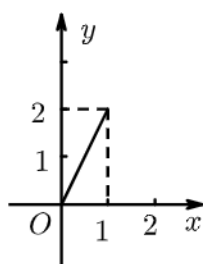


答案 C

解析 由函数定义可知，一个 x 有且只有唯一的 y 值与之对应。
故选C。

2 2019~2020学年天津南开区天津市南开中学高一上学期期中第3题4分

已知 $M = \{x | 0 \leq x \leq 2\}$ ， $N = \{y | 0 \leq y \leq 3\}$ ，给出下列四个图形，其中能表示从集合 M 到集合 N 的函数关系的有（ ）。



A. 0个

B. 1个

C. 2个

D. 3个

答案 C

解析 集合 M 到集合 N 的函数概念：对于 M 中的任意一个元素，在集合 N 中都有唯一的元素与之相对应。

$$M = \{x | 0 \leq x \leq 2\}, N = \{y | 0 \leq y \leq 3\},$$

图I： $x \in [1, 2]$ 时没有元素与之对应，故错误；

图II：满足定义概念，故正确；

图III：满足定义概念，故正确；

图IV： M 中的元素在 N 中不是唯一元素与之对应，故错误。

故正确的有2个。

故选C.

2. 函数的表示方法

1. 解析法

用**数学表达式**表示两个变量之间的对应关系,这种表示函数的方法叫做**解析法**,

这个数学表达式叫做函数的**解析式**.

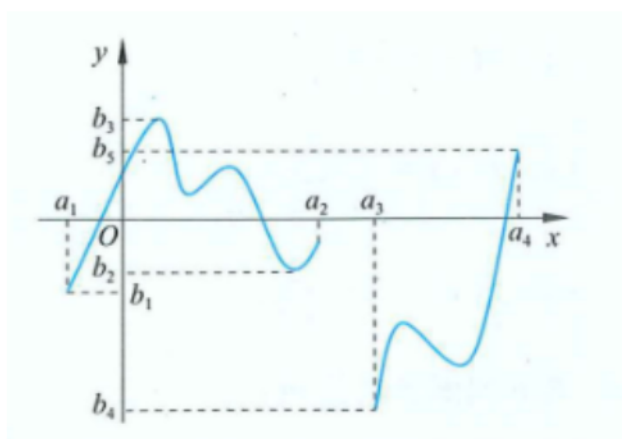
举例: $f(x) = 3x + 5$; 狄利克雷函数: $f(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ 为有理数} \\ 0 & x \text{ 为无理数} \end{cases}$

2. 图象法

以自变量 x 的值为横坐标,与之对应的函数值 $f(x)$ 为纵坐标,在平面直角坐标系中描出各个点 $(x, f(x))$,这些点组成的**图形**称为函数 $y = f(x)$ 的**图象**,

这种用图象表示两个变量之间对应关系的方法叫做**图象法**.

举例:



3. 列表法

列一个两行多列的表格,第一行是自变量的取值,第二行是对应的函数值

这种用**表格**来表示两个变量之间的对应关系的方法叫做列表法.

举例:

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	1	8	27	64	125	216	343	512

4. 三种方法的优缺点

	优点	缺点
解析法	①简明、全面地概括了变量间的关系 ②求出自变量任一值所对应的函数值	①不够形象、直观、具体 ②不是所有的函数都能用解析式表示出来
图象法	能直观、形象地表示出函数变化情况	①只能近似地求出自变量的值所对应的函数值 ②有时误差较大
列表法	不需要计算就可以直接看出与自变量的值相对应的函数值	它只能表示自变量取较少的有限值的对应关系

3. 函数相等

1. 函数相等的定义

如果两个函数的定义域相同，并且对应关系完全一致，我们就称这两个函数**相等**。

2. 如何判断两个函数是否相等

只有当两个函数的定义域和对应关系都分别相同时，这两个函数才是同一函数，换言之就是：

- ①**定义域**不同，两个函数也就不同。
- ②**对应关系**不同，两个函数也是不同的。
- ③**即使定义域和值域都分别相同的两个函数，它们也不一定是同一函数**

因为函数的定义域和值域**不能唯一地**确定函数的对应关系。

3 2020~2021学年天津红桥区天津市复兴中学高一上学期期中第8题4分

下列各组函数是同一函数的是（ ）。

- ① $f(x) = \sqrt{-2x^3}$ 与 $g(x) = x\sqrt{-2x}$ ；
- ② $f(x) = |x|$ 与 $g(x) = \sqrt{x^2}$ ；
- ③ $f(x) = x^0$ 与 $g(x) = 1$ ；
- ④ $f(x) = x^2 - 2x - 1$ 与 $g(t) = t^2 - 2t - 1$ 。

A. ①②

B. ②③

C. ①④

D. ②④

答案 D

解析 ① $f(x) = \sqrt{-2x^3}$ 与 $g(x) = x\sqrt{-2x}$ 的定义域是 $\{x|x \leq 0\}$ ，

而 $f(x) = \sqrt{-2x^3} = -x\sqrt{-2x}$,

故这两个函数不是同一函数 ;

② $f(x) = |x|$ 与 $g(x) = \sqrt{x^2}$ 的定义域是 $\mathbf{R}$, $g(x) = \sqrt{x^2} = |x|$,

这两个函数的定义域相同 , 对应法则也相同 , 故这两个函数是同一函数 ;

③ $f(x) = x^0$ 的定义域是 $\{x | x \neq 0\}$, 而 $g(x) = 1$ 的定义域是 $\mathbf{R}$,

故这两函数不是同一函数 ;

④ $f(x) = x^2 - 2x - 1$ 与 $g(t) = t^2 - 2t - 1$ 是同一函数 .

故选D .

4 2020~2021学年天津天津塘沽紫云中学高一上学期期中第1题5分

下列各组函数中 , 表示同一函数的是 () .

A. $f(x) = x + 1$ 和 $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

B. $f(x) = \sqrt{x^2}$ 和 $g(x) = (\sqrt{x})^2$

C. $f(x) = \frac{(\sqrt{x})^2}{x}$ 和 $g(x) = \frac{x}{(\sqrt{x})^2}$

D. $f(x) = x^2$ 和 $g(x) = (x + 1)^2$

答案 C

解析

A选项 : $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$,

$g(x)$ 定义域为 $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$, 故A错误 ;

B选项 : $f(x)$ 定义域为 $\mathbf{R}$,

$g(x)$ 定义域为 $[0, +\infty)$, 故B错误 ;

C选项 : 为同一函数 , 故C正确 ;

D选项 : 对应法则不同 , 故D错误 .

故选C.

5 2020~2021学年天津和平区天津市第五十五中学高一上学期期中第4题3分

下列各组函数是同一函数的是 () .

A. $y = \frac{|x|}{x}$ 与 $y = 1$

B. $y = \frac{x^2}{x}$ 与 $y = x$

C. $y = \frac{x^3 + x}{x^2 + 1}$ 与 $y = x$

D. $y = \sqrt{(x-1)^2}$ 与 $y = x - 1$

答案 C

解析

A选项： $y = \frac{|x|}{x}$ 定义域为 $\{x|x \neq 0\}$ ， $y = 1$ 定义域为 $\mathbf{R}$ ，由 $y = \frac{|x|}{x}$ 与 $y = 1$ 定义域不同，则

$y = \frac{|x|}{x}$ 与 $y = 1$ 不是同一函数，故A错误；

B选项：因为 $y = \frac{x^2}{x}$ 定义域 $\{x|x \neq 0\}$ ， $y = x$ 定义域为 $\mathbf{R}$ ，所以 $y = \frac{x^2}{x}$ 与 $y = x$ 不是同一函数，

故B错误；

C选项：因为 $y = \frac{x^3 + x}{x^2 + 1} = x$ 定义域为 $\mathbf{R}$ ，值域为 $\mathbf{R}$ ， $y = x$ 定义域、值域均为 $\mathbf{R}$ ，所以

$y = \frac{x^3 + x}{x^2 + 1}$ 与 $y = x$ 为同一函数，故C正确；

D选项： $y = \sqrt{(x-1)^2}$ 定义域为 $\mathbf{R}$ ，值域为 $[0, +\infty)$ ， $y = x - 1$ 定义域、值域均为 $\mathbf{R}$ ，所以

$y = \sqrt{(x-1)^2}$ 与 $y = x - 1$ 不是同一函数，故D错误；

故选C.

4. 确定函数定义域

①若 $f(x)$ 是整式，则其定义域为_____

②若 $f(x)$ 是分式，则定义域是_____

③若 $f(x)$ 是偶次根式，则定义域是_____

④ $f(x) = x^0$ 的定义域是_____

⑤若 $f(x)$ 由若干结构的代数式构成，则函数的定义域是_____

教法备注

【答案】① $\mathbf{R}$. ② 分母不等于0的实数的集合 . ③ 根号内的式子大于或等于0的实数的集合 .

④ $\{x|x \neq 0\}$ ⑤ 使代数式都有意义的实数集合的交集 .

6

2020~2021学年天津红桥区天津市复兴中学高一上学期期中第17题8分

求下列函数的定义域：

(1) $f(x) = \frac{6}{x^2 - 3x + 2}$.

$$(2) f(x) = \frac{\sqrt{4-x}}{x-1} .$$

答案 (1) $(-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty)$.

(2) $(-\infty, 1) \cup (1, 4]$.

解析 (1) 由题意可得：函数的定义域需满足： $x^2 - 3x + 2 \neq 0$,

解得： $x \neq 1$ 且 $x \neq 2$,

综上所述，结论是：函数的定义域为： $(-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty)$.

(2) 由题意可得：函数的定义域需满足： $\begin{cases} 4-x \geq 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases}$,

解得： $x \leq 4$ 且 $x \neq 1$,

综上所述，结论是：函数的定义域为： $(-\infty, 1) \cup (1, 4]$.

7 2020~2021学年天津河西区高一上学期期中第12题5分

函数 $f(x) = \frac{\sqrt{x-4}}{|x|-5}$ 的定义域为 _____ .

答案 $[4, 5) \cup (5, +\infty)$

解析 $\begin{cases} x-4 \geq 0 \\ |x| \neq 5 \end{cases}$,

$\therefore x \geq 4$ 且 $x \neq \pm 5$,

$\therefore x \in [4, 5) \cup (5, +\infty)$.

8 2020~2021学年天津河北区天津市第七十八中学高一上学期期中第17题

求函数定义域 .

$$(1) f(x) = \sqrt{3x-1} + \sqrt{1-2x} + 4 .$$

$$(2) f(x) = \frac{\sqrt{x^2-5x+6}}{x-1} .$$

答案 (1) $\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$.

(2) $(-\infty, -3] \cup [-2, 1) \cup (1, +\infty)$.

解析

(1) 函数 $f(x) = \sqrt{3x-1} + \sqrt{1-2x} + 4$ 满足 $\begin{cases} 3x-1 \geq 0 \\ 1-2x \geq 0 \end{cases}$,

解得: $\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{2}$,

故函数 $f(x) = \sqrt{3x-1} + \sqrt{1-2x} + 4$ 的定义域为 $\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$.

(2) 函数 $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-5x+6}}{x-1}$ 满足 $\begin{cases} x^2+5x+6 \geq 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases}$,

解得: $x \leq -3$ 或 $-2 \leq x < 1$ 或 $x > 1$,

故函数 $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-5x+6}}{x-1}$ 的定义域为 $(-\infty, -3] \cup [-2, 1) \cup (1, +\infty)$.

9

2020~2021 学年天津和平区天津市第一中学高一上学期期中第11题4分

函数 $f(x) = \frac{(2x+3)^0}{\sqrt{2-x-x^2}}$ 的定义域是 _____.

答案

$x \in \left(-2, -\frac{3}{2}\right) \cup \left(-\frac{3}{2}, 1\right)$

解析

$\because f(x) = \frac{(2x+3)^0}{\sqrt{2-x-x^2}},$

$\therefore \begin{cases} 2x+3 \neq 0 \\ 2-x-x^2 > 0 \end{cases},$

$\therefore x^2+x-2 < 0,$

$\therefore (x+2)(x-1) < 0,$

$\therefore -2 < x < 1$ 且 $x \neq -\frac{3}{2},$

$\therefore x \in \left(-2, -\frac{3}{2}\right) \cup \left(-\frac{3}{2}, 1\right).$

10

2020~2021 学年天津河东区高一上学期期中第10题4分

若 $f(x) = \frac{3x}{x-4} + \sqrt{x+2}$ 的定义域为 _____.

答案

$[-2, 4) \cup (4, +\infty)$

解析

$\because f(x) = \frac{3x}{x-4} + \sqrt{x+2},$

$\therefore \begin{cases} x-4 \neq 0 \\ x+2 \geq 0 \end{cases},$

$\therefore x \geq -2$ 且 $x \neq 4,$

$\therefore x \in [-2, 4) \cup (4, +\infty).$

故答案为： $[-2, 4) \cup (4, +\infty)$.

包罗万象 举一干从

11 2020~2021学年天津和平区天津市汇文中学高一上学期期中第17题10分

已知函数 $f(x) = \sqrt{3-x} - \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ 的定义域为集合 A , 集合 $B = \{x | 2m \leq x \leq 1-m\}$.

- (1) 当 $m = -1$ 时 , 求 $A \cup B$.
- (2) 若 $A \subseteq B$, 求实数 m 的取值范围 .
- (3) 若 $A \cap B = \emptyset$, 求实数 m 的取值范围 .

答案

(1) $[-2, 3]$.

(2) $(-\infty, -2]$.

(3) $[0, +\infty)$.

解析

(1) 要使函数 $f(x)$ 有意义 , 则 $\begin{cases} 3-x \geq 0 \\ x-1 > 0 \end{cases}$, 解得 $1 < x \leq 3$,

$\therefore A = (1, 3]$,

当 $m = -1$ 时 , $B = \{x | -2 \leq x \leq 2\} = [-2, 2]$,

则 $A \cup B = [-2, 3]$.

(2) 若 $A \subseteq B$, 则 $\begin{cases} 2m \leq 1 \\ 1-m \geq 3 \end{cases}$,

解得： $m \leq -2$,

则实数 m 的取值范围为 $(-\infty, -2]$.

(3) ①当 $2m > 1-m$, 即 $m > \frac{1}{3}$ 时 , $B = \emptyset$ 满足 $A \cap B = \emptyset$,

②当 $2m \leq 1-m$, 即 $m \leq \frac{1}{3}$ 时 , 若 $A \cap B = \emptyset$, 则 $1-m \leq 1$ 或 $2m > 3$,

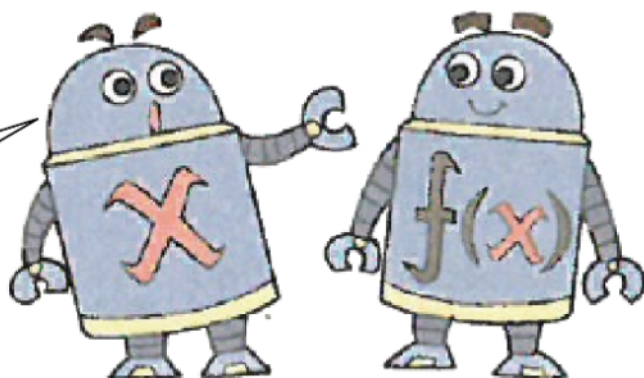
解得 $m \geq 0$ 或 $m > \frac{3}{2}$,

又 $m \leq \frac{1}{3}$, 所以 $0 \leq m \leq \frac{1}{3}$,

综上所述 , 实数 m 的取值范围为 $[0, +\infty)$.

5. 抽象函数定义域

不管你变成什么样子，只要是定义域就来找我！



1. 求解抽象函数定义域的要点

- ① 函数的**定义域永远指的是自变量 x 本身的范围**
- ② 对于一道题目，同一对应法则所直接**作用的对象范围必须保持一致**

2. 求解抽象函数定义域具体办法

- ① 已知 $f(x)$ 的定义域为 A ，求函数 $f(g(x))$ 的定义域
即已知 $g(x)$ 的范围为 A ，从中解出 x 的范围。
- ② 已知 $f(g(x))$ 的定义域为 B ，求 $f(x)$ 的定义域，
即已知 $g(x)$ 中 x 的取值范围为 B ，求出 $g(x)$ 的范围（**值域**），此范围（**值域**）就是 $f(x)$ 的定义域。

教法备注

【教师备注】

① 要点1的解释：即简单函数 $f(x)$ 的定义域是自变量 x 的范围，复合函数 $f(g(x))$ 的定义域仍然是自变量 x 的范围而不是 $g(x)$ 的范围；

举例说明： $f(x)$, $f(x^2 + 1)$, $f(2x - 1)$, $f(1 - 3x)$ 的定义域都是指自变量 x 的取值范围。

② 要点2的解释：例如，若 $f(x) = \frac{1}{x}$ ，则法则 f 直接作用的对象是 x ，由于法则本身的特性，因此 x 不为0，另给出 $f(a + 1) = \frac{1}{a + 1}$ ，则此时被法则 f 直接作用的对象是 $a + 1$ ，因此 $a + 1$ 不为0，可以看出，不管被对应法则 f 直接作用的是谁，它们都需要服从对应法则的要求。

12 已知 $f(x)$ 的定义域为 $[-3, 5]$ ，求 $f(6 - 2x)$ 的定义域

答案 $(\frac{1}{2}, \frac{9}{2}]$

解析 略略略

13 已知 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, -2]$ ，求 $f(1 + \frac{5}{3}x)$ 的定义域

答案 $(-\infty, -\frac{9}{5}]$

解析 略略略

14 已知 $f(3x+2)$ 的定义域为 $(6, +\infty)$ ，求 $f(x)$ ， $f(1-x)$ 的定义域

答案 $(20, +\infty); (-\infty, -19)$

解析 略略略

15 已知 $f(2x+5)$ 的定义域为 $(1, 8]$ ，求 $f(x)$ ， $f(3-4x)$ 的定义域

答案 $(7, 21]; [-\frac{9}{2}, -1)$

解析 略略略

精进不休 日新月异

16 2020~2021学年天津东丽区天津一中滨海学校高一上学期期中第10题5分

若函数 $y = f(x)$ ，的定义域是 $[0, 4]$ ，则函数 $g(x) = \frac{f(2x)}{\sqrt{x-1}}$ 的定义域是（ ）。

A. $(1, 8)$

B. $(1, 2)$

C. $(1, 8]$

D. $(1, 2]$

答案 D

解析 $\because f(x)$ 的定义域是 $[0, 4]$ ，

$\therefore g(x) = \frac{f(2x)}{\sqrt{x-1}}$ 中，

$$\begin{cases} 0 \leq 2x \leq 4 \\ x - 1 > 0 \end{cases},$$

$$\therefore 1 < x \leq 2.$$

故选D.

17 2020~2021学年天津南开区天津中学高一上学期期中第5题5分

设 $f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x + 3}$, 则 $f(3x - 2)$ 的定义域为 ().

A. $\left[-1, \frac{5}{3}\right]$

B. $[-3, 1]$

C. $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$

D. $\left[\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right]$

答案 D

解析

$$\because f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x + 3},$$

$$\therefore -x^2 + 2x + 3 \geq 0,$$

$$\therefore x^2 - 2x - 3 \leq 0,$$

$$\therefore (x - 3)(x + 1) \leq 0,$$

$$\therefore -1 \leq x \leq 3,$$

$$\therefore -1 \leq 3x - 2 \leq 3,$$

$$\therefore 1 \leq 3x \leq 5,$$

$$\therefore \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{5}{3}.$$

故选D.

18 2019~2020学年天津和平区天津市第二南开中学高一上学期期中第7题3分

已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1, 1)$, 则函数 $g(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) + f(x - 2)$ 的定义域为 ().

A. $(0, 2)$

B. $(1, 2)$

C. $(2, 3)$

D. $(-1, 1)$

答案 B

解析

$\because$ 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1, 1)$,

则函数 $g(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) + f(x - 2)$ 中

$$\text{有} \begin{cases} -1 < \frac{x}{2} < 1 \\ -1 < x-2 < 1 \end{cases}, \text{解得: } 1 < x < 2,$$

则函数 $g(x)$ 的定义域为 $(1, 2)$.

故选B .

6. 函数的解析式求法

【仅教师可见】

此处求解方法较多，除了以下介绍的五个方法外，还有**赋值法**求解。

其中，**代入法**难度其实蛮低的，近三年天津题库中没有对应试题；

待定系数法和**换元法**考得会多一点，我们选择的例题也多是这两种解题办法；

配凑法难度会稍微高一点，对学生的数学能力要求较高，所以暑假并不会放对应习题；

方程组法难度虽然不高，但是学生学完开学后忘得也比较快，所以此处不放对应习题啦~

以下介绍的代入法、待定系数法、配凑法、换元法、方程组法都放置了对应的**举例说明**，大家讲课时就可以结合例子去讲解啦~

1. 代入法

已知 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的解析式，求 $f[g(x)]$ 的解析式常用代入法.

举例： $f(x) = x^2 - 1$ ， $g(x) = x^2 + x$ ，则 $f[g(x)] =$ _____

教法备注

【举例答案】 $f[g(x)] = f(x^2 + x) = (x^2 + x)^2 - 1$

2. 待定系数法

如果已知函数类型，可待定出函数的解析式，在利用条件制造方程（组）求出参数，由此确定函数的解析式

举例：已知二次函数 $f(x)$ 经过原点且在 $x = 2$ 时取得最大值4，要求 $f(x)$ 解析式

教法备注

【举例答案】可根据题意待定 $f(x)$ 的解析式为 $f(x) = a(x-2)^2 + 4 (a < 0)$ ，

再利用 $f(0) = 0$ 解出 $a = -1$ ，带回原解析式得到 $f(x) = 4x - x^2$.

3. 配凑法

已知 $f(g(x))$ 的解析式，要求 $f(x)$ 的解析式时，可从 $f(g(x))$ 的解析式中配凑出 $g(x)$ ，即把解析式变为关于 $g(x)$ 的表达式，然后再把解析式两边的 $g(x)$ 换为 x 即可。

补充说明：此时需要注意 $g(x)$ 本身的范围（值域）就代表 $f(x)$ 的定义域。

举例：①已知 $f(\sqrt{x}+1) = x + 2\sqrt{x}$ ，求 $f(x)$ 的解析式

②已知 $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ ，求 $f(x)$ 的解析式

教法备注

【举例答案】

① $f(\sqrt{x}+1) = x + 2\sqrt{x}$ ，可以将右边凑成 $(\sqrt{x}+1)^2 - 1$ 的形式再求解

② $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ ，可以将右边凑成 $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2$ 的形式再求解。

4.换元法

已知 $f(g(x))$ 的解析式，要求 $f(x)$ 的解析式时，也可以令 $t = g(x)$ ，反解此方程（即用 t 去表示 x ），将解得的结果带入到解析式中，从而求出 $f(t)$ 的解析式，再把解析式中的 t 换为 x 即可

举例：已知 $f(\sqrt{x}+1) = x + 2\sqrt{x}$ ，求 $f(x)$ 的解析式

教法备注

【举例答案】

令 $t = \sqrt{x} + 1$ ，解得 $x = (t-1)^2$ ，带入到等号右边得到 $f(t) = t^2 - 1$ ，再变换自变量得到 $f(x) = x^2 - 1$ 。

5.方程组法

已知 $f(x)$ 与 $f(g(x))$ 满足的关系式，要求 $f(x)$ 解析式，

可用 $g(x)$ 代替两边所有的 x ，得到关于 $f(x)$ 与 $f(g(x))$ 的方程组，

然后类比于**二元一次方程组解法**，消去 $f(g(x))$ 解出 $f(x)$ 即可。

举例： $f(x)$ 与 $f\left(\pm\frac{1}{x}\right)$ ， $f(x)$ 与 $f(a-x)$ 时，

可将原式中的 x 用 $\pm\frac{1}{x}$ 或 $a-x$ 代替，从而得到另一个同时含有 $f(x)$ 与 $f\left(\pm\frac{1}{x}\right)$ 或 $f(x)$ 与

$f(a-x)$ 的关系式，将两个关系式联立方程组解出 $f(x)$ 。



待定系数法

19 2020~2021学年天津和平区天津市耀华嘉诚国际学校高一上学期期中第20题10分

已知二次函数 $f(x) = x^2 + 2ax - a$.

(1) 若 $f(x)$ 在区间 $[0, 3]$ 上的最小值是 -2 , 求 a 的值 .

(2) 若 $f(x)$ 在区间 $[0, 3]$ 上的最大值是 4 , 求 a 的值 .

答案

(1) 2或 -2 .

(2) -1 或 -4 .

解析

(1) 对称轴为 $x = -a$,

①当 $-a < 0$, 即 $a > 0$ 时 ,

$$f(x)_{\min} = f(0) = -a = -2 ,$$

解得 $a = 2$ 成立 .

②当 $0 \leq -a \leq 3$, 即 $-3 \leq a \leq 0$ 时 ,

$$f(x)_{\min} = f(-a) = -a^2 - a = -2 ,$$

解得 $a = 1$ (舍) 或 $a = -2$.

③当 $-a > 3$, 即 $a < -3$ 时 ,

$$f(x)_{\min} = f(3) = 5a + 9 = -2 ,$$

$$\text{解得 } a = -\frac{11}{5} \text{ (舍) ,}$$

综上 $a = 2$ 或 -2 .

(2) ①当 $-a \leq \frac{3}{2}$, 即 $a \geq -\frac{3}{2}$ 时 ,

$$f(x)_{\max} = f(3) = 9 + 5a = 4 ,$$

解得 $a = -1$ 成立 .

②当 $-a > \frac{3}{2}$, 即 $a < -\frac{3}{2}$ 时 ,

$$f(x)_{\max} = f(0) = -a = 4 ,$$

解得 $a = -4$ 成立 ,

综上 $a = -1$ 或 -4 .

20 2020~2021学年天津和平区天津市耀华中学高一上学期期中第6题4分

设函数 $f(x)$ 是一次函数 , $f(f(x)) = 4x - 3$, 则 $f(1) = (\quad)$.

A. 3或1

B. 1

C. 1或-1

D. -3或1

答案 B

解析 设一次函数 $f(x) = ax + b$,

$$\text{则 } f(f(x)) = a(ax + b) + b = a^2x + ab + b,$$

$$\therefore \text{对一切实数 } x \text{ 满足 } f(f(x)) = 4x - 3,$$

$$\therefore \begin{cases} a^2 = 4 \\ ab + b = -3 \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a = -2 \\ b = 3 \end{cases},$$

$$\therefore f(x) = 2x - 1 \text{ 或 } f(x) = -2x + 3.$$

$$\therefore f(1) = 1 \text{ 或 } f(1) = 1.$$

故选: B.



换元法

21 2020~2021学年天津东丽区天津一中滨海学校高一上学期期中第14题5分

已知函数 $f(x+1) = 3x + 4$, 则 $f(x)$ 的解析式为 _____.

答案 $f(x) = 3x + 1$

解析 $\because f(x+1) = 3x + 4$,

$$\text{设 } A = x + 1, x = A - 1,$$

$$\therefore f(A) = 3(A - 1) + 4 = 3A + 1,$$

$$\therefore f(x) = 3x + 1.$$

22 2020~2021学年天津和平区天津市第一中学高一上学期期中第6题3分

已知 $f\left(\frac{x}{2} - 1\right) = 2x + 3$, 则 $f(6)$ 的值为()

A. 15

B. 7

C. 31

D. 17

故选：C．

D. $f(x) = x^2 + x$

故选C.

故选：A .

25 2018~2019学年12月天津南开区南开大学附属中学高一上学期月考第7题3分

已知 $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{1-x}$ ，则 $f(x)$ 的解析式为 () .

A. $f(x) = \frac{1-x}{x} (x \neq 0, \text{且} x \neq 1)$

B. $f(x) = \frac{1}{1-x} (x \neq 0, \text{且} x \neq 1)$

C. $f(x) = \frac{1}{x-1} (x \neq 0, \text{且} x \neq 1)$

D. $f(x) = \frac{x}{x-1} (x \neq 0, \text{且} x \neq 1)$

答案 C

解析 方法一： $\because f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{1-x} = \frac{1}{1-\frac{1}{x}}$ ，

$\therefore f(x) = \frac{1}{x-1} (x \neq 0 \text{且} x \neq 1)$ ，选C.

方法二：设 $\frac{1}{x} = t, (t \neq 0)$ ，则 $x = \frac{1}{t}$ ，

$$\therefore f(t) = \frac{\frac{1}{t}}{1-\frac{1}{t}} = \frac{1}{t-1};$$

$\therefore f(x)$ 的解析式为 $f(x) = \frac{1}{x-1}, (x \neq 0 \text{且} x \neq -1)$ ；

故选：C.

7. 分段函数

1. 分段函数的定义

在函数的定义域中，对于自变量 x 的不同取值范围，有着不同的对应关系，这样的函数通常称为**分段函数**.

举例：函数 $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & (x \geq 0) \\ -2x-3 & (x < 0) \end{cases}$ ，就是分段函数.

2. 对分段函数的理解

①分段函数是一个函数，而不是几个函数.

②分段函数的“段”可以是等长的，也可以是不等长的.

③画分段函数的图象时，一定要考虑区间端点是否包含在内！

若端点**包含在内**，则用**实心点**表示，若端点**不包含在内**，则用**空心圆圈**表示.

④写分段函数时，各定义区间的端点应不重不漏.

⑤分段函数的**定义域**是各段定义区间的**并集**，分段函数的**值域**是各段值域的**并集**.

赋值运算

26 2020~2021学年天津河北区天津市第七十八中学高一上学期期中第12题

设 $f(x) = \begin{cases} |x-1|-2, & |x| \leq 1 \\ \frac{1}{1+x^2}, & |x| > 1 \end{cases}$, 则 $f\left[f\left(\frac{1}{2}\right)\right] = \underline{\hspace{2cm}}$.

答案 $\frac{4}{13}$

解析 $f\left(\frac{1}{2}\right) = \left|\frac{1}{2} - 1\right| - 2 = -\frac{3}{2}$,
 $f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{1 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{4}{13}$,
 $\therefore f\left[f\left(\frac{1}{2}\right)\right] = \frac{4}{13}$.
 故答案为: $\frac{4}{13}$.

27 2020~2021学年天津和平区天津市第五十五中学高一上学期期中第14题4分

设函数 $f(x) = \begin{cases} 1-x^2, & x \leq 1 \\ (x+2)(x-1), & x > 1 \end{cases}$, 则 $f\left(\frac{1}{f(2)}\right)$ 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

答案 $\frac{15}{16}$

解析 $\because 2 > 1$,
 $\therefore f(2) = (2+2)(2-1) = 4$,
 $\therefore \frac{1}{f(2)} = \frac{1}{4}$,
 又 $\because \frac{1}{4} \leq 1$,
 $\therefore f\left(\frac{1}{4}\right) = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{15}{16}$,
 $\therefore f\left(\frac{1}{f(2)}\right) = f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{15}{16}$.

28 2020~2021学年天津东丽区天津一中滨海学校高一上学期期中第16题5分

设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ x + \frac{6}{x} - 6, & x > 1 \end{cases}$, 则 $f[f(-2)] = \underline{\hspace{2cm}}$.

答案 $-\frac{1}{2}$

解析 解：由 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ x + \frac{6}{x} - 6, & x > 1 \end{cases}$ ，得 $f(-2) = 4$ ，
 $\therefore f[f(-2)] = f(4) = 4 + \frac{6}{4} - 6 = -\frac{1}{2}$ 。
 故答案为： $-\frac{1}{2}$ 。



解不等式

29 2020~2021学年天津和平区天津市第二十一中学高一上学期期中第13题4分

已知 $f(x) = \begin{cases} 2x+3, & x \leq 0 \\ -(x-1)^2, & x > 0 \end{cases}$ ，使 $f(x) \geq -1$ 成立的 x 的取值范围是 _____。

答案 $[-2, 2]$

解析 当 $x \leq 0$ 时， $f(x) = 2x + 3 \geq -1$ ，
 解得 $x \geq -2$ ，
 即此时 $-2 \leq x \leq 0$ ，
 当 $x > 0$ 时， $f(x) = -(x-1)^2 \geq -1$ ，
 解得 $0 \leq x \leq 2$ ，
 即此时 $0 < x \leq 2$ ，
 综上 x 的取值范围是 $[-2, 2]$ 。