

03函数的性质综合

1. 奇偶性、单调性基础问题



解不等式

1

2019~2020学年10月天津和平区天津市第一中学高一上学期周测D卷第13题

已知函数 $f(x) = x^3 + 7x$, 若 $f(a^2) + f(a - 2) > 0$, 则实数 a 的取值范围是 _____ .

答案

$a < -2$ 或 $a > 1$

解析

$$\because f(x) = x^3 + 7x ,$$

$$f(-x) = (-x)^3 + 7(-x) = -x^3 - 7x = -f(x) ,$$

$\therefore f(x)$ 为奇函数 ,

x 越大 , x^3 越大 , $7x$ 越大 ,

$\therefore f(x)$ 为增函数 .

$$\because f(a^2) + f(a - 2) > 0 ,$$

$$\therefore f(a^2) > -f(a - 2) ,$$

$$\therefore f(a^2) > f(2 - a) ,$$

$$\therefore a^2 > 2 - a ,$$

$$\therefore a^2 + a - 2 > 0 ,$$

$$\therefore (a + 2)(a - 1) > 0 ,$$

$$\therefore a < -2 \text{ 或 } a > 1 .$$

故答案为 : $a < -2$ 或 $a > 1$.

2

2020~2021学年天津滨海新区高一上学期期末第10题5分

已知函数 $f(x)$ 是定义在区间 $[-a - 1, 2a]$ 上的偶函数 , 且在区间 $[0, 2a]$ 上单调递增 , 则不等式

$f(x - 1) < f(a)$ 的解集为 () .

A. $[-1, 3]$

B. $(0, 2)$

C. $(0, 1) \cup (2, 3)$

D. $[-1, 0) \cup (1, 2)$

答案 B

解析

$\because f(x)$ 在 $[-a-1, 2a]$ 上为偶函数,

$$\therefore -a-1+2a=0,$$

$$\therefore a=1,$$

又 $\because f(x-1) < f(a) = f(1)$,

$\because f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上单增,

$$\therefore |x-1| < 1,$$

$$\therefore -1 < x-1 < 1,$$

$$\therefore 0 < x < 2,$$

$$\text{又} \because -2 \leq x-1 \leq 2,$$

$$\therefore -1 \leq x \leq 3,$$

$$\therefore 0 < x < 2,$$

故选B.

3

2020~2021学年天津南开区天津市南开中学高一上学期期中第8题4分

已知奇函数 $f(x)$ 满足 $f(1) = 0$, 且 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 则 $\frac{x}{f(x) - f(-x)} < 0$ 的解集是 () .

A. $(-1, 1)$

B. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

C. $(-\infty, -1)$

D. $(1, +\infty) \cup (-1, 0)$

答案 B

解析

$\because f(x)$ 为奇函数, $\therefore f(-x) = -f(x)$,

$$\therefore \frac{x}{f(x) - f(-x)} < 0, \text{ 即 } \frac{x}{2f(x)} < 0,$$

$\because f(1) = 0$, 且 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,

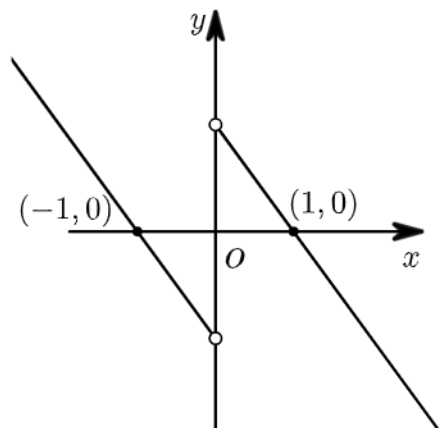
又 $\because f(x)$ 为奇函数, 画出 $f(x)$ 的图象,

由图象可知, ①当 $x > 0$ 时, $f(x) < 0$, 则 $x > 1$;

②当 $x < 0$ 时, $f(x) > 0$, 则 $x < -1$,

故解集为 $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

故选B .



精进不休 日新月异

4 2020~2021学年天津东丽区天津一中滨海学校高一上学期期中第19题5分

设 $f(x)$ 是定义在 $(-1, 1)$ 上的偶函数在 $[0, 1)$ 上增, 若 $f(a-2) - f(4-a^2) < 0$, 则 a 的取值范围为 _____ .

答案 见解析 (我打不出来)

解析 $\because f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上增函数, 且为偶函数,

$\therefore$ 横坐标离0越近, 函数值越小.

$$\therefore f(a-2) - f(4-a^2) < 0,$$

$$\therefore f(a-2) < f(4-a^2),$$

$$\therefore |a-2| < |4-a^2|,$$

$$\therefore |a-2| < |2-a||2+a|,$$

$$\therefore |2+a| > 1 \text{ 且 } a \neq 2$$

$$\therefore 2+a > 1 \text{ 或 } 2+a < -1, a \neq 2$$

$$\therefore -1 < a < 2 \text{ 或 } a < -3 \text{ 或 } a > 2, ,$$

又 $\because$ 定义域为 $(-1, 1)$,

$$\therefore \begin{cases} -1 < a-2 < 1 \\ -1 < 4-a^2 < 1 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} 1 < a < 3 \\ 3 < a^2 < 5 \end{cases},$$

$$\therefore \sqrt{3} < a < \sqrt{5} .$$

综上 $(\sqrt{3}, 2) \cup (2, \sqrt{5})$

5 2019~2020学年10月天津和平区天津市第一中学高一上学期周测C卷第15题

已知函数 $f(x) = (x-1)(ax+b)$ 为偶函数，且在 $(0, +\infty)$ 单调递减，则 $f(3-x) < 0$ 的解集为 _____ .

答案 $x > 4$ 或 $x < 2$

解析 $\because f(x) = (x-1)(ax+b)$ 为偶函数，

$\therefore$ 对称轴为 $x = 0$ ，

$$f(x) = ax^2 + (b-a)x - b,$$

$$\therefore -\frac{b-a}{2a} = 0,$$

$$\therefore b = a,$$

$$\therefore f(x) = (x-1)(ax+a)$$

$$= a(x-1)(x+1),$$

$\therefore$ 在 $(0, +\infty)$ 递减，

$$\therefore a < 0,$$

草图如下：



$$\therefore f(3-x) < 0,$$

$$\therefore 3-x < -1 \text{ 或 } 3-x > 1,$$

$$\therefore x > 4 \text{ 或 } x < 2.$$

故答案为： $x > 4$ 或 $x < 2$.

6 2018~2019学年12月天津南开区南开大学附属中学高一上学期月考第15题4分

设函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，当 $x > 0$ 时， $f(x) = 2x - 1$ ，求不等式 $f(-x) \geq f(x)$ 的解集 _____ .

答案 $\left\{x \mid 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \text{ 或 } x \leq -\frac{1}{2}\right\}$

解析 当 $x = 0$ 时, $f(x) = 0$, 当 $x < 0$ 时, $-x > 0$,
 $f(-x) = 2(-x) - 1 = -2x - 1 = -f(x)$, 则 $f(x) = 2x + 1$,
 $x > 0$ 时, $-2x + 1 \geq 2x - 1$ 即 $0 < x \leq \frac{1}{2}$,
 $x < 0$ 时, $-2x - 1 \geq 2x + 1$ 即 $x \leq -\frac{1}{2}$,
 $x = 0$ 时, $0 \geq 0$ 恒成立,
 综上: 解集为 $\left\{x \mid 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \text{ 或 } x \leq -\frac{1}{2}\right\}$.

7 2020~2021 学年天津滨海新区塘沽第一中学高一上学期期中第22题12分

已知定义在 $[-3, 3]$ 上的奇函数 $y = f(x)$ 是增函数.

- (1) 若 $f(m+1) + f(1-2m) > 0$, 求 m 的取值范围.
- (2) 若 $f(2) = 1$, 解不等式 $f(x+1) + 1 > 0$.

答案 (1) $-1 \leq m < 2$.
 (2) $(-3, 2]$.

解析 (1) 因为定义在 $[-3, 3]$ 上的奇函数 $y = f(x)$ 是增函数,
 由 $f(m+1) + f(1-2m) > 0$ 可得 $f(m+1) > -f(1-2m) = f(2m-1)$,
 $\therefore 3 \geq m+1 > 2m-1 \geq -3$,
 解可得, $-1 \leq m < 2$.
 (2) $\because f(2) = 1$,
 $\therefore f(-2) = -1$,
 由 $f(x+1) + 1 > 0$ 可得 $f(x+1) > -1 = f(-2)$,
 $\therefore \begin{cases} -3 \leq x+1 \leq 3 \\ x+1 > -2 \end{cases}$,
 解可得, $-3 < x \leq 2$.
 故不等式的解集 $(-3, 2]$.

8 2020~2021学年天津和平区天津市汇文中学高一上学期期中第7题3分

设 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ，图象关于 y 轴对称，且 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上为增函数，则 $f(-2)$ ， $f(-\pi)$ ， $f(3)$ 的大小顺序是（ ）.

- A. $f(-\pi) < f(-2) < f(3)$ B. $f(-2) < f(3) < f(-\pi)$
C. $f(-\pi) < f(3) < f(-2)$ D. $f(3) < f(-2) < f(-\pi)$

答案 B

解析 $\because f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ，图象关于 y 轴对称，
 $\therefore f(x)$ 是偶函数，
 $\therefore f(-2) = f(2)$ ， $f(-\pi) = f(\pi)$.
又 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上为增函数，且 $2 < 3 < \pi$ ，
 $\therefore f(2) < f(3) < f(\pi)$ ，
 $\therefore f(-2) < f(3) < f(-\pi)$.
故选B.

9 2019~2020学年天津和平区天津市第二南开中学高一上学期期中第3题3分

若函数 $f(x)$ 是偶函数，且在 $[0, 2]$ 上是增函数，在 $[2, +\infty)$ 上是减函数，则（ ）.

- A. $f(-2) < f(3) < f(-4)$ B. $f(3) < f(-2) < f(-4)$
C. $f(-4) < f(3) < f(-2)$ D. $f(3) < f(-4) < f(-2)$

答案 C

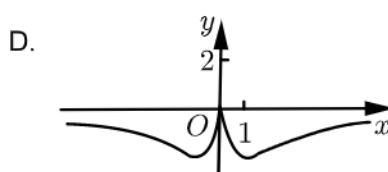
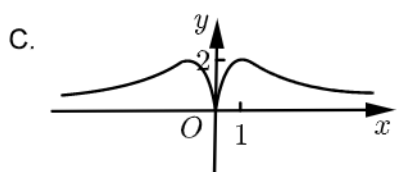
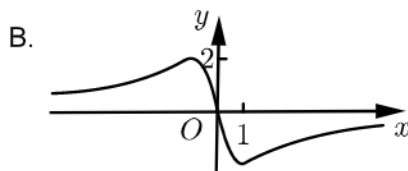
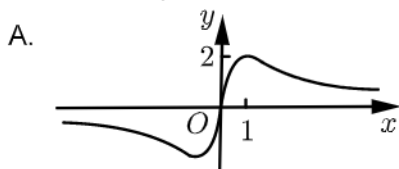
解析 $\because$ 函数 $f(x)$ 是偶函数，故 $f(-x) = f(x)$ ，
故 $f(-2) = f(2)$ ， $f(-4) = f(4)$ ，
又函数 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上是增函数，
在 $(2, +\infty)$ 上是减函数，
故 $f(4) < f(3) < f(2)$ ，
即 $f(-4) < f(3) < f(-2)$.

故选C.

图像判断

10 2020~2021学年山东济宁任城区高一上学期期中第6题5分

函数 $y = \frac{4x}{x^2 + 1}$ 的图象大致为 ().



答案 A

解析 由题意知 $f(x) = \frac{4x}{x^2 + 1}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,
 $f(-x) = \frac{4(-x)}{(-x)^2 + 1} = \frac{-4x}{x^2 + 1} = -f(x)$,

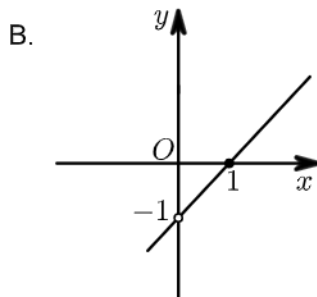
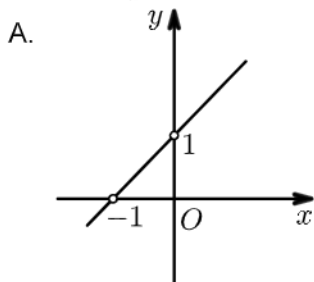
$\therefore f(x)$ 为奇函数, 故排除C、D.

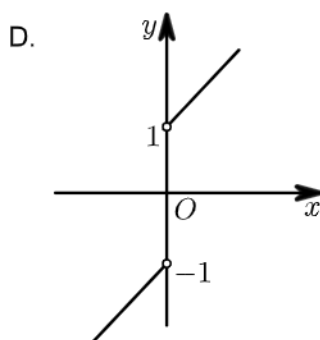
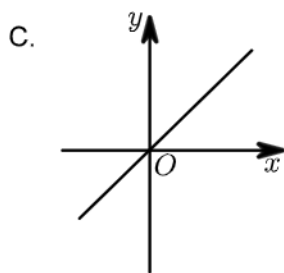
当 $x > 0$ 时, $f(x) > 0$, 故排除B.

故选A.

11 2019年天津河北区高三会考模拟学业水平模拟第17题3分

函数 $y = \frac{|x|}{x} + x$ 的图象是 ().



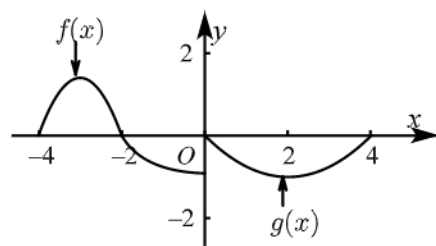


答案 D

解析 函数 $y = \frac{|x|}{x} + x$ 的定义域为 $\{x|x \neq 0, x \in \mathbf{R}\}$,
 且 $f(-x) = \frac{|-x|}{-x} - x = -\frac{|x|}{x} - x = -f(x)$,
 $\therefore$ 函数 $y = \frac{|x|}{x} + x$ 为其定义域上的奇函数 .
 综上所述 , D 选项符合条件 .
 故选 D .

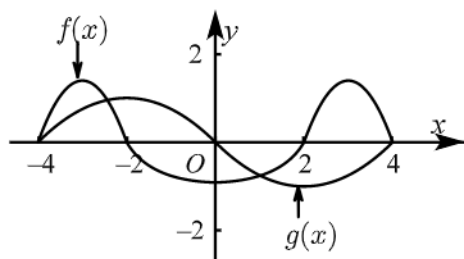
12 2019~2020学年10月天津和平区天津市第一中学高一上学期周测D卷第11题

偶函数 $f(x)$ 与奇函数 $g(x)$ 的定义域均为 $[-4, 4]$, $f(x)$ 在 $[-4, 0]$, $g(x)$ 在 $[0, 4]$ 上的图像如图所示 , 则不等式 $f(x) \cdot g(x) < 0$ 解集为 _____ .



答案 $(-2, 0) \cup (2, 4)$

解析 $\because f(x)$ 为偶函数 , $g(x)$ 为奇函数 ,
 $\therefore$ 补全图像 ,



$\therefore f(x) \cdot g(x) < 0$ 时,

x 的取值范围是 $(-2, 0) \cup (2, 4)$.

2. 综合性问题



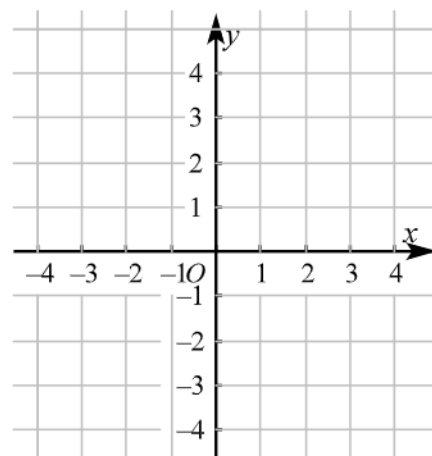
画图并判断单调性

13

2018~2019 学年天津河西区天津市第四中学高一上学期期中第 17 题 8 分

已知函数 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数, 当 $x > 0$ 时, $f(x) = x^2 - 2x$.

- (1) 求出函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的解析式.
- (2) 画出函数 $f(x)$ 的图象, 并根据图象直接写出 $f(x)$ 的单调区间.



- (3) 求使 $f(x) = 1$ 时的 x 的值.

答案

$$(1) f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x^2 - 2x, & x < 0 \end{cases}.$$

(2) 见解析.

(3) $x = 1 + \sqrt{2}$ 或 $x = -1$.

解析

(1) ① 函数 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数.

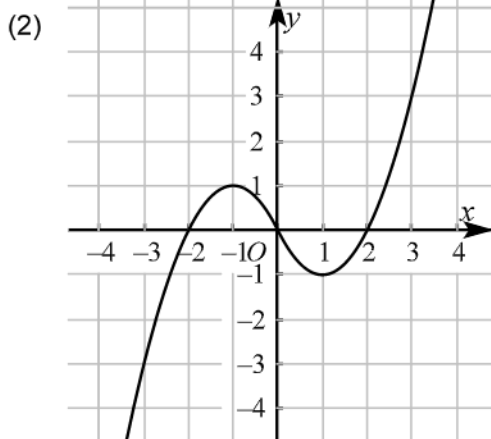
则 $f(0) = 0$.

②当 $x < 0$ 时, $-x > 0$.

$$\therefore f(-x) = -f(x) .$$

$$\therefore f(x) = -f(-x) = -[(-x)^2 - 2(-x)] = -x^2 - 2x .$$

$$\text{综上: } f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x^2 - 2x, & x < 0 \end{cases} .$$



单增区间: $(-\infty, -1]$, $[1, +\infty)$.

单减区间: $(-1, 1)$.

(3) 当 $x > 0$ 时, $x^2 - 2x = 1$.

$$\text{解得 } x = 1 + \sqrt{2} \text{ 或 } x = 1 - \sqrt{2} .$$

因为 $x > 0$. 所以 $x = 1 + \sqrt{2}$.

当 $x < 0$ 时, $-x^2 - 2x = 1$.

$$\text{解得 } x = -1 .$$

综上: $x = 1 + \sqrt{2}$ 或 $x = -1$.



含参问题

14

2020~2021学年天津和平区天津市第一中学高一上学期期中第19题

已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ x^2 + mx, & x < 0 \end{cases}$ 是奇函数 .

(1) 求实数 m 的值 .

(2) 若函数 $f(x)$ 在区间 $[-1, a-2]$ 上单调递增, 求实数 a 的取值范围 .

(3) 求不等式 $\frac{f(x) - f(-x)}{x} < 0$ 的解集 .

答案

- (1) $m = 2$.
 (2) $(1, 3]$.
 (3) $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

解析

- (1) $\because$ 函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ x^2 + mx, & x < 0 \end{cases}$ 是奇函数 ,

设 $x < 0$, 则 $-x > 0$,

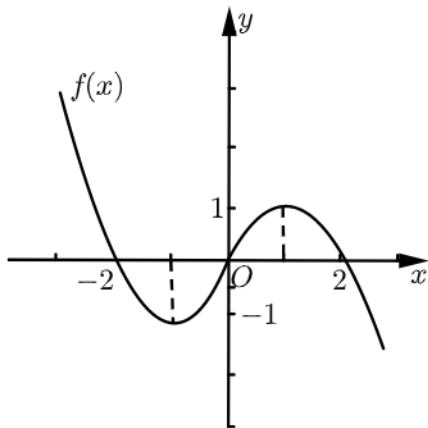
$$\therefore f(-x) = -(-x)^2 + 2(-x) = -x^2 - 2x ,$$

$$\therefore f(x) = -f(-x) = x^2 + 2x ,$$

$$\text{即当 } x < 0 \text{ 时} , f(x) = x^2 + mx = x^2 + 2x ,$$

则 $m = 2$.

- (2) 函数 $y = f(x)$ 的图象如图所示 ,



要使 $f(x)$ 在 $[-1, a-2]$ 上单调递增 , 结合 $y = f(x)$ 的图象 ,

$$\text{可知} \begin{cases} a-2 > -1 \\ a-2 \leq 1 \end{cases} ,$$

解得 $1 < a \leq 3$,

故实数 a 的取值范围为 $(1, 3]$.

- (3) 由 (1) 可知 , 函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ x^2 + 2x, & x < 0 \end{cases}$,

$$\text{① } x > 0 \text{ 时} , \frac{f(x) - f(-x)}{x} = \frac{-x^2 + 2x - [(-x)^2 + 2(-x)]}{x} = -2x + 4 ,$$

则此时不等式 $\frac{f(x) - f(-x)}{x} < 0$ 的解集为 $(2, +\infty)$;

$$\text{② } x = 0 \text{ 时} , \text{不等式 } \frac{f(x) - f(-x)}{x} < 0 \text{ 不成立} ;$$

$$\text{③ } x < 0 \text{ 时} , \frac{f(x) - f(-x)}{x} = \frac{x^2 + 2x - [-(-x)^2 + 2(-x)]}{x} = 2x + 4 ,$$

则此时不等式 $\frac{f(x) - f(-x)}{x} < 0$ 的解集为 $(-\infty, -2)$,

综上所述, 不等式 $\frac{f(x) - f(-x)}{x} < 0$ 的解集为 $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

15 2020~2021学年天津西青区高一上学期期末第19题15分

已知函数 $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$.

(1) 函数 $h(x)$ 是奇函数, 当 $x > 0$ 时, $h(x) = f(x)$, 求 $h(x)$ 在 $x \in \mathbf{R}$ 上的解析式.

(2) 若 $g(x) = -f(x) + mx + 1$, 当 $x \in [1, 2]$ 时, 若 $g(x)$ 的最大值为 2, 求 m 的值.

答案

$$(1) h(x) = \begin{cases} -2x^2 - 3x - 1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 2x^2 - 3x + 1, & x > 0 \end{cases}.$$

(2) 1.

解析

(1) 设 $x < 0$, 则 $-x > 0$,

$\because$ 函数 $h(x)$ 是奇函数,

$$\therefore h(x) = -h(-x) = -(2x^2 + 3x + 1) = -2x^2 - 3x - 1,$$

$$\therefore h(x) = \begin{cases} -2x^2 - 3x - 1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 2x^2 - 3x + 1, & x > 0 \end{cases}.$$

(2) $\because g(x) = -f(x) + mx + 1$,

$$\therefore g(x) = -2x^2 + (3+m)x,$$

$g(x)$ 为二次函数, 图象开口向下, 对称轴方程为 $x = \frac{3+m}{4}$,

在 $x \in [1, 2]$ 时, $g(x)$ 的最大值为 2,

$$\textcircled{1} \text{ 当 } \frac{3+m}{4} \leq 1,$$

$$\text{即 } m \leq 1 \text{ 时, } g(x)_{\max} = g(1) = -2 + 3 + m = 2,$$

解得 $m = 1$,

$$\textcircled{2} \text{ 当 } 1 < \frac{3+m}{4} < 2,$$

$$\text{即 } 1 < m < 5 \text{ 时, } g(x)_{\max} = g\left(\frac{3+m}{4}\right) = \frac{m^2 + 6m + 9}{8} = 2,$$

解得 $m = 1$ (舍) 或 $m = -7$ (舍);

$$\textcircled{3} \text{ 当 } \frac{3+m}{4} \geq 2, \text{ 即 } m \geq 5 \text{ 时, } g(x)_{\max} = g(2) = -8 + 2m + 6 = 2,$$

解得 $m = 2$ (舍).

综上所述, m 的值为 1.



16 2020~2021学年天津和平区天津市第五十五中学高一上学期期中第19题12分

已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且当 $x > 0$ 时， $f(x) = x^2 - 2x + 2$ 。

- (1) 求函数 $f(x)$ 的解析式。
- (2) 若 $g(x) = kx - k$ ，若对任意的 $x \in (2, 4)$ 都有 $g(x) > f(x)$ 成立，求实数 k 的取值范围。

答案

$$(1) f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x - 2, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x^2 - 2x + 2, & x > 0 \end{cases}.$$

$$(2) k \geq \frac{10}{3}.$$

解析

(1) 对任取 $x < 0$ ， $-x > 0$ ，

$$f(-x) = (-x)^2 - 2(-x) + 2$$

$$= x^2 + 2x + 2,$$

又 $\because f(x)$ 为奇函数，

$$\therefore f(x) = -f(-x) = -x^2 - 2x - 2,$$

$$f(0) = 0,$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x - 2, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x^2 - 2x + 2, & x > 0 \end{cases}.$$

$$\text{故答案为: } f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x - 2, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x^2 - 2x + 2, & x > 0 \end{cases}.$$

(2) $\because g(x) > f(x)$ 对 $\forall x \in (2, 4)$ 恒成立，

$$\therefore kx - k > x^2 - 2x + 2 \text{ 对 } \forall x \in (2, 4) \text{ 恒成立，}$$

$$\therefore k(x - 1) > x^2 - 2x + 2 \text{ 对 } \forall x \in (2, 4) \text{ 恒成立，}$$

$$\because x \in (2, 4),$$

$$\therefore x - 1 > 0,$$

$$\therefore k > \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} \text{ 对 } \forall x \in (2, 4) \text{ 恒成立，}$$

$$\therefore k > \left(\frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} \right)_{\max},$$

$$\text{设 } x - 1 = A (A \in (1, 3)),$$

$$\frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = \frac{(x - 1)^2 + 1}{x - 1} = \frac{A^2 + 1}{A} = A + \frac{1}{A},$$

$$\because A + \frac{1}{A} \text{ 在 } (1, 3) \text{ 上单增，}$$

$$\begin{aligned}\therefore A + \frac{1}{A} &< 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}, \\ \therefore k &\geq \frac{10}{3}.\end{aligned}$$

故答案为： $k \geq \frac{10}{3}$.

17

2019~2020学年天津和平区天津市耀华中学高一上学期期中第19题10分

已知函数 $y = f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且当 $x \geq 0$ 时， $f(x) = -x^2 + ax$.

(1) 若 $a = -2$ ，求函数 $f(x)$ 的解析式.

(2) 若函数 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的单调减函数.

① 求 a 的取值范围.

② 若对任意实数 m ， $f(m-1) + f(m^2+t) < 0$ 恒成立，求实数 t 的取值范围.

答案

(1) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & x < 0 \\ -x^2 - 2x, & x \geq 0 \end{cases}.$

(2) ① $a \leq 0$.

② $t > \frac{5}{4}.$

解析

(1) 当 $x < 0$ 时， $-x > 0$,

又因为 $f(x)$ 为奇函数，且 $a = -2$,

所以 $f(x) = -f(-x) = x^2 - 2x$,

$$\text{所以 } f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & x < 0, \\ -x^2 - 2x, & x \geq 0. \end{cases}$$

(2) ① 方法一： $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调减函数，

$$f'(x) = -2x + a \leq 0 \text{ 在 } [0, +\infty) \text{ 上},$$

$$\therefore a \leq 2x.$$

$$\therefore a \leq 0.$$

方法二：当 $a \leq 0$ 时，对称轴 $x = \frac{a}{2} \leq 0$,

所以 $f(x) = -x^2 + ax$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递减，

由于奇函数在关于原点对称的区间上单调性相同，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减，

又在 $(-\infty, 0)$ 上 $f(x) > 0$ ，在 $(0, +\infty)$ 上 $f(x) < 0$ ，

所以当 $a \leq 0$ 时， $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的单调减函数.

当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, \frac{a}{2})$ 上单调递增,

在 $(\frac{a}{2}, +\infty)$ 上单调递减, 不合题意.

所以函数 $f(x)$ 为单调减函数时, a 的范围为 $a \leq 0$.

② 因为 $f(m-1) + f(m^2+t) < 0$,

所以 $f(m-1) < -f(m^2+t)$,

又因为 $f(x)$ 是奇函数, 所以 $f(m-1) < f(-t-m^2)$,

又因为 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的单调减函数,

所以 $m-1 > -t-m^2$ 恒成立,

所以 $t > -m^2 - m + 1 = -\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}$ 恒成立,

所以 $t > \frac{5}{4}$.

最值

18 2015~2016学年广东深圳南山区深圳市南山区育才中学高一上学期期中第21题14分

若函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 且当 $x < 0$ 时, $f(x) = -x^2 - 2x$.

(1) 写出函数 $f(x) (x \in \mathbf{R})$ 的解析式.

(2) 若函数 $g(x) = f(x) - 2ax + 2 (x \in [1, 2])$, 求函数 $g(x)$ 的最小值.

答案

$$(1) f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x^2 - 2x, & x > 0 \end{cases}.$$

$$(2) g(x)_{\min} = \begin{cases} 1 - 2a, & a \leq 0 \\ 1 - 2a - a^2, & 0 < a < 1 \\ -4a + 2, & a \geq 1 \end{cases}.$$

解析

(1) $\because f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上奇函数

$$\therefore f(0) = 0, f(-x) = -f(x),$$

$$\text{当 } x < 0 \text{ 时, } f(x) = -x^2 - 2x,$$

$$\text{当 } x > 0 \text{ 时, } -x < 0,$$

$$\therefore f(-x) = -(-x)^2 + 2x = -x^2 + 2x = -f(x),$$

$$\therefore f(x) = x^2 - 2x,$$

$$\text{综上: } f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x^2 - 2x, & x > 0 \end{cases}.$$

(2) $g(x) = x^2 - (2 + 2a)x + 2$, $x \in [1, 2]$, 对称轴为 $x = 1 + a$, 开口向上,

当 $1 + a \leq 1$, 即 $a \leq 0$ 时,

$$g(x)_{\min} = g(1) = 1 - 2 - 2a + 2 = 1 - 2a,$$

当 $1 < 1 + a < 2$, 即 $0 < a < 1$ 时,

$$g(x)_{\min} = g(1 + a) = 1 - 2a - a^2$$

当 $1 + a \geq 2$, 即 $a \geq 1$ 时,

$$g(x)_{\min} = g(2) = -4a + 2,$$

$$\text{综上: } g(x)_{\min} = \begin{cases} 1 - 2a, a \leq 0 \\ 1 - 2a - a^2, 0 < a < 1 \\ -4a + 2, a \geq 1 \end{cases}.$$

19 2020~2021学年天津南开区天津中学高一上学期期中第19题10分

已知函数 $f(x) = \frac{mx+1}{1+x^2}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数.

- (1) 求实数 m 的值.
- (2) 判断并证明函数 $y = f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上单调性.
- (3) 求函数 $y = f(x)$ 在 $[-3, 2]$ 上的最大值与最小值.

答案

- (1) $m = 0$.
- (2) 函数 $y = f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上为增函数, 证明见解析.
- (3) 最大值为 1, 最小值为 $\frac{1}{10}$.

解析

- (1) 若函数 $f(x) = \frac{mx+1}{1+x^2}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 则 $f(-x) = f(x)$,
即 $\frac{m(-x)+1}{1+(-x)^2} = \frac{mx+1}{1+x^2}$, 对任意实数 x 恒成立, 解得 $m = 0$.
- (2) 由 (1) 得: $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$,

函数 $y = f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上为增函数, 下证明:

设任意 $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$ 且 $x_1 < x_2$, 即 $\Delta x = x_2 - x_1 > 0$,

$$\begin{aligned} \text{则 } \Delta y &= f(x_2) - f(x_1) = \frac{1}{1+x_2^2} - \frac{1}{1+x_1^2} \\ &= \frac{x_1^2 - x_2^2}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)} = \frac{-(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}, \end{aligned}$$

$\because x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$ 且 $\Delta x = x_2 - x_1 > 0$,

$$\therefore \frac{-(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)} > 0, \text{ 即 } \Delta y > 0,$$

于是函数 $y = f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上为增函数.

(3) 由 (2) 知, 函数 $y = f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上为增函数,

又 $f(x)$ 是偶函数, 则 $y = f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上为减函数,

$$\text{又 } f(-3) = \frac{1}{10}, f(0) = 1, f(2) = \frac{1}{5},$$

所以 $f(x)$ 的最大值为 1, 最小值为 $\frac{1}{10}$.

20 2020~2021 学年天津和平区天津市第五十五中学高一上学期期中第 20 题 14 分

已知函数 $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + ax + \frac{a}{2}$.

(1) 若 $a = 1$, 求函数的最值.

(2) 若函数 $f(x)$ 在区间 $(-4, 4)$ 上为单调函数, 求实数 a 的取值范围.

(3) 当 $|x| \leq 2$ 时, 求函数 $f(x)$ 的最小值 $g(a)$ 的表达式.

答案

(1) 最小值 $-\frac{1}{2}$, 无最大值.

(2) $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$.

$$(3) \quad g(a) = \begin{cases} 1 - \frac{3}{2}a & (a \geq 1) \\ \frac{a}{2} - a^2 & (-1 < a < 1) \\ 1 + \frac{5}{2}a & (a \leq -1) \end{cases}.$$

解析

(1) $a = 1$ 时, $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + x + \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}x + 1\right)^2 - \frac{1}{2}$,
则 $f(x)$ 有最小值 $-\frac{1}{2}$, 当 $x = -2$ 时取到, 无最大值.

(2) $f(x) = \frac{1}{4}(x + 2a)^2 + \frac{a}{2} - a^2$ 在 $(-4, 4)$ 上为单调函数,

则 $-2a \leq -4$ 或 $-2a \geq 4$.

则 $a \geq 2$ 或 $a \leq -2$.

即 $a \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$.

(3) $\because |x| \leq 2$,

$\therefore -2 \leq x \leq 2$.

① 若 $-2a \leq -2$, 即 $a \geq 1$ 时, $g(a) = f(-2) = 1 - 2a + \frac{a}{2} = 1 - \frac{3}{2}a$.

② 若 $-2 < -2a < 2$; 即 $-1 < a < 1$ 时, $g(a) = f(-2a) = \frac{a}{2} - a^2$.

③ 若 $-2a \geq 2$, 即 $a \leq -1$ 时, $g(a) = f(2) = 1 + 2a + \frac{a}{2} = 1 + \frac{5}{2}a$.

$$\therefore g(a) = \begin{cases} 1 - \frac{3}{2}a (a \geq 1) \\ \frac{a}{2} - a^2 (-1 < a < 1) \\ 1 + \frac{5}{2}a (a \leq -1) \end{cases}.$$

3. 零点问题

1. 零点的定义

对于函数 $y = f(x)$ ，我们把使 $f(x) = 0$ 的实数 x 的值叫做函数 $y = f(x)$ 的零点。

2. 零点的等价理解

由函数零点的概念可知，函数 $y = f(x)$ 的零点也是函数 $y = f(x)$ 与 x 轴的交点的横坐标。

也即：方程 $f(x) = 0$ 有实数根 $\Leftrightarrow$ 函数 $y = f(x)$ 的图像与 x 轴有交点 $\Leftrightarrow$ 函数 $y = f(x)$ 有零点。

21

2020~2021学年天津高一上学期期末（六校联考）第12题4分

设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + bx + c, & x \geq 0 \\ 1, & x < 0 \end{cases}$ ，若 $f(4) = f(0)$ ， $f(2) = 2$ ，则函数 $g(x) = f(x) - x$ 的零点的个数是 _____。

答案 2

解析

因为 $f(4) = f(0)$ ，

所以当 $x \geq 0$ 时，函数图象关于 $x = 2$ 对称，

所以 $\frac{b}{2} = -2$ ，解得 $b = -4$ ，

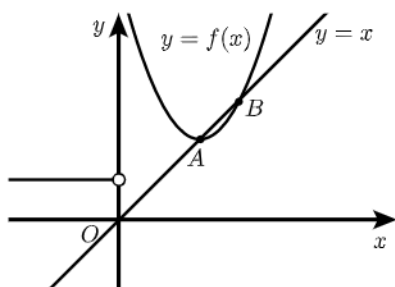
又 $f(2) = 4 - 8 + c = 2$ ，

解得 $c = 6$ ，

所以 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 6, & x \geq 0 \\ 1, & x < 0 \end{cases}$ ，

令 $g(x) = f(x) - x = 0$ ，即 $f(x) = x$ ，

在同一坐标系中作出 $y = f(x)$ ， $y = x$ 的图象，如图所示：



由图象知，函数 $y=f(x)$ ， $y=x$ 的图象交点有2个，

所以 $g(x)=f(x)-x$ 的零点的个数有2个，

故答案为：2.

22 2020~2021学年12月天津河西区天津市海河中学高一上学期月考第7题

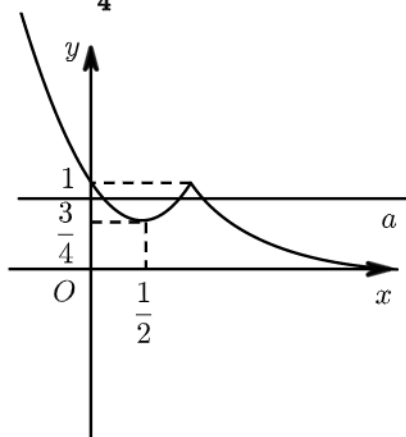
已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1, & x < 1 \\ \frac{1}{x}, & x \geq 1 \end{cases}$ ，若函数 $y=f(x)-a$ 有三个零点，则实数 a 的取值范围为_____.

答案 $\frac{3}{4} < a < 1$

解析 $\because f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1, & x < 1 \\ \frac{1}{x}, & x \geq 1 \end{cases}$,

$$x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4},$$

由图知 $\frac{3}{4} < a < 1$.



23 2020~2021学年12月天津河东区天津市第三十二中学高一上学期月考第9题5分

已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x}, & x \geq 2 \\ x^2 - 3, & x < 2 \end{cases}$, 若关于 x 的方程 $f(x) = k$ 有三个不等的实根, 则实数 k 的取值范围是 () .

A. $(-3, 1)$

B. $(0, 1)$

C. $(-2, 2)$

D. $(0, +\infty)$

答案 B

解析 $y = \frac{2}{x}$ 在 $[2, +\infty)$ 单调递减, $y = x^2 - 3$ 在 $(-\infty, 0)$ 单调递减, 在 $(0, 2)$ 单调递增.

$f(0) = -3$, $f(2) = 1$, 另 $y = \frac{2}{x}$ 在 $[2, +\infty)$ 上始终大于 0, 故 k 的取值范围为 $(0, 1)$.

24 2020~2021 学年天津南开区天津市南开中学高一上学期期末第 15 题 4 分

已知函数 $f(x) = x^2 - ax + 2$ 在区间 $[1, 3]$ 上有零点, 则实数 a 的取值范围是 _____ .

答案 $\left[2\sqrt{2}, \frac{11}{3}\right]$

解析 $\because f(x) = x^2 - ax + 2$ 在 $[1, 3]$ 上有零点,

$\therefore \exists x \in [1, 3]$,

使得 $x^2 - ax + 2 = 0$,

$x^2 - ax + 2 = 0$,

$\because x \in [1, 3]$,

$\therefore a = x + \frac{2}{x}$,

$\because x \in [1, 3]$,

$x + \frac{2}{x} \in \left[2\sqrt{2}, \frac{11}{3}\right]$,

$\therefore a \in \left[2\sqrt{2}, \frac{11}{3}\right]$.