

02函数的奇偶性练习题

1. 判断函数奇偶性单调性

1 2020~2021学年天津南开区天津中学高一上学期期中第3题5分

下列函数既是偶函数，又在 $(0, +\infty)$ 上为增函数的是（ ）。

A. $y = x$

B. $y = -x^2$

C. $y = |x|$

D. $y = \frac{1}{x}$

答案 C

解析

A选项： $y = x$ 为奇函数，排除，

B选项： $y = -x^2$ 在 $(0, +\infty)$ 为减函数，排除，

C选项： $y = |x|$ 为偶函数，当 $x > 0$ 时， $y = x$ ，为增函数，正确，

D选项： $y = \frac{1}{x}$ 为奇函数，排除，

故选C.

2 2020~2021学年天津红桥区天津市复兴中学高一上学期期中第7题4分

下列函数中，既是奇函数又在定义域上是增函数的为（ ）。

A. $y = -2x$

B. $y = -2x^2$

C. $y = \frac{1}{x}$

D. $y = x$

答案 D

解析

A选项： $y = -2x$ 是奇函数，在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，故不符合题意；

B选项： $y = -2x^2$ 是偶函数，在 $(0, +\infty)$ 单调递减，在 $(-\infty, 0)$ 单调递增，故不符合题意；

C选项： $y = \frac{1}{x}$ 是奇函数，在 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 单调递减，故不符合题意；

D选项： $y = x$ 是奇函数，在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，故符合题意。

故选D.

2. 求解析式

3 2020~2021学年天津南开区天津中学高一上学期期中第8题5分

已知函数 $f(x)$ 是奇函数，且当 $x > 0$ 时， $f(x) = x^3 + x + 1$ ，则当 $x < 0$ 时， $f(x)$ 的解析式为 () .

- A. $f(x) = x^3 + x - 1$ B. $f(x) = -x^3 - x - 1$ C. $f(x) = x^3 - x + 1$ D. $f(x) = -x^3 - x + 1$

答案 A

解析 任取 $x < 0$ ， $-x > 0$ ，

$$f(-x) = (-x)^3 + (-x) + 1 = -x^3 - x + 1,$$

又 $\because f(x)$ 为奇函数，

$$\therefore f(x) = -f(-x) = x^3 + x - 1.$$

故A .

4 2017~2018学年北京西城区北京市第三中学高一上学期期中第11题4分

已知函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，当 $x > 0$ 时， $f(x) = x^3 - 2x^2$ ，则当 $x < 0$ 时，函数 $f(x)$ 的表达式是 () .

- A. $f(x) = x^3 - 2x^2$ B. $f(x) = x^3 + 2x^2$ C. $f(x) = -x^3 + 2x^2$ D. $f(x) = -x^3 - 2x^2$

答案 B

解析 当 $x < 0$ 时， $-x > 0$ ，则 $f(-x) = -x^3 - 2x^2$.

而 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，所以， $f(x) = -f(-x) = x^3 + 2x^2$.

3. 求函数值

5 2020~2021学年北京海淀区北京市清华志清中学高一上学期期中第6题4分

已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且当 $x > 0$ 时， $f(x) = x^2$ ，则 $f\left(-\frac{1}{2}\right) = ()$.

A. $-\frac{1}{4}$

B. $\frac{1}{4}$

C. $-\frac{9}{4}$

D. $\frac{9}{4}$

答案 A

解析 根据题意, $f(x)$ 满足 $x > 0$ 时, $f(x) = x^2$, 则 $f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$,
又由函数 $f(x)$ 为奇函数, 则 $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$;
故选: A.

4. 求参数值

6 2019~2020 学年 10 月天津和平区天津市第一中学高一上学期周测 D 卷第 9 题

若函数 $f(x)$ 是定义在区间 $[2a, 1-a]$ 上的奇函数, 则 a 的值为 _____.

答案 -1

解析 $\because f(x)$ 为奇函数,
 $\therefore$ 定义域对称.
 $\therefore 2a + 1 - a = 0$,
 $\therefore a = -1$.

7 2019~2020 学年天津宁河县高一上学期期中第 5 题 4 分

若函数 $f(x) = \frac{x}{(2x-1)(x+a)}$ 是奇函数, 则实数 $a = (\quad)$.

A. $\frac{1}{2}$

B. $-\frac{1}{2}$

C. 1

D. -1

答案 A

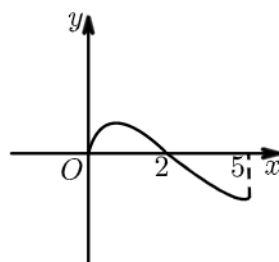
解析 $\because f(x) = \frac{x}{(2x-1)(x+a)}$ 是奇函数,
 $\therefore f(1) = -f(-1)$, $\frac{1}{1+a} = -\frac{-1}{-3(-1+a)}$,
解得: $a = \frac{1}{2}$, 经检验, 符合题意.

故选A.

5. 求解不等式

8 2018~2019学年9月天津河东区天津市第四十五中学高一上学期月考第11题

奇函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-5, 5)$, 若 $x \in [0, 5)$ 时, $f(x)$ 的图象如图所示, 则不等式 $f(x) < 0$ 的解集为_____.



答案 $(-2, 0) \cup (2, 5)$

解析 当 $x \in [0, 5)$ 时 $f(x) < 0$ 得 $2 < x < 5$,

$\because f(x)$ 是奇函数,

$\therefore$ 当 $x \in (-5, 0)$ 时, $f(x) < 0$ 得 $-2 < x < 0$,

综上, $x \in (-2, 0) \cup (2, 5)$.

故答案为: $(-2, 0) \cup (2, 5)$.

9 2015~2016学年天津高一上学期期末理科六校联考第6题4分

已知偶函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 单调递减, 则满足 $f(2x-1) > f\left(\frac{1}{3}\right)$ 的 x 取值范围是().

A. $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

B. $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

C. $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$

D. $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$

答案 A

解析 $\because$ 偶函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 单调递减, 且满足 $f(2x-1) > f\left(\frac{1}{3}\right)$,

$\therefore$ 不等式等价于 $f(|2x-1|) > f\left(\frac{1}{3}\right)$,

即 $|2x-1| < \frac{1}{3}$,

$\therefore -\frac{1}{3} < 2x-1 < \frac{1}{3}$,

解得 $\frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}$,

故 x 取值范围是 $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$,

故选 A.

10 2020~2021 学年天津南开区南开大学附属中学高一上学期期中第 8 题 4 分

已知偶函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 则满足条件 $f(2x+1) < f(5)$ 的 x 的取值范围是 () .

A. $(-3, 2)$

B. $(-2, 3)$

C. $(-2, 2)$

D. $[-3, 2]$

答案 A

解析 偶函数在 $[0, +\infty)$ 上单调递增,

在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减,

$\therefore f(2x+1) < f(5)$,

$\therefore 2x+1$ 到对成轴的距离, 小于 5 到对成轴的距离. 解得 $x \in (-3, 2)$.

故选 A.

11 2020~2021 学年天津南开区天津大学附属中学高一上学期期中第 11 题 4 分

已知偶函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递减, $f(2) = 0$, 若 $f(x-1) > 0$, 则 x 的取值范围是 ____ .

答案 $(-1, 3)$

解析 解: $\therefore$ 偶函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递减, $f(2) = 0$,

$\therefore$ 不等式 $f(x-1) > 0$ 等价于 $f(x-1) > f(2)$,

即 $f(|x-1|) > f(2)$,

$\therefore |x-1| < 2$,

解得 $-1 < x < 3$,

故答案为 : $(-1, 3)$.

12 2018~2019学年9月天津河东区天津市第五十四中学高一上学期月考第14题4分

已知函数 $f(x)$ 是定义在 $[-2, 2]$ 上的增函数 , 且 $f(1-m) < f(m)$, 则实数 m 的取值范围 _____ .

答案 $\left(\frac{1}{2}, 2\right]$

解析 $f(x)$ 在 $[-2, 2]$ 上递增 .

$$\therefore \begin{cases} -2 \leq 1-m \leq 2 \\ -2 \leq m \leq 2 \\ 1-m < m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq m \leq 3 \\ -2 \leq m \leq 2 \\ m > \frac{1}{2} \end{cases} .$$

$$\therefore m \in \left(\frac{1}{2}, 2\right] .$$

6. 综合应用

13 2020~2021学年天津红桥区天津市复兴中学高一上学期期中第19题8分

已知函数 $f(x) = 1 - \frac{2}{x}$.

- (1) 若 $g(x) = f(x) - a$ 为奇函数 , 求 a 的值 .
- (2) 试判断 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的单调性 , 并用定义证明 .

答案 (1) $a = 1$.

(2) 单调递增 , 证明见解析 .

解析 (1) $g(x) = f(x) - a = 1 - \frac{2}{x} - a$,

$\because g(x)$ 为奇函数 ,

$$\therefore g(1) + g(-1) = 0 ,$$

$$\therefore 1 - 2 - a + 1 + 2 - a = 0 ,$$

$$\therefore a = 1 , \text{ 此时 } g(x) = -\frac{2}{x} \text{ 为奇函数 .}$$

(2) 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增 , 证明如下 :

设 $0 < x_1 < x_2$,

$$\text{则 } f(x_1) - f(x_2) = 1 - \frac{2}{x_1} - \left(1 - \frac{2}{x_2}\right) = \frac{2(x_1 - x_2)}{x_1 x_2},$$

因为 $0 < x_1 < x_2$, 所以 $x_1 x_2 > 0$,

$$x_1 - x_2 < 0, \text{ 所以 } \frac{2(x_1 - x_2)}{x_1 x_2} < 0,$$

所以 $f(x_1) < f(x_2)$,

所以函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

14 2020~2021 学年天津河东区高一上学期期中第17题8分

已知函数 $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

(1) 判断函数的奇偶性, 并加以证明.

(2) 用定义证明 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上的单调性.

答案

(1) $f(x)$ 为奇函数, 证明见解析.

(2) $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 单调递增.

解析

(1) $\because$ 有 $\frac{1}{x}$,

$\therefore x \neq 0$,

$$f(-x) = -x + \frac{1}{-x} = -\left(x + \frac{1}{x}\right) = -f(x),$$

$\therefore f(x)$ 为奇函数.

(2) 任取 $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$,

不妨设 $x_1 > x_2$,

$$\begin{aligned} & f(x_1) - f(x_2) \\ &= x_1 + \frac{1}{x_1} - x_2 - \frac{1}{x_2} \\ &= x_1 - x_2 + \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} \\ &= (x_1 - x_2) \left(1 - \frac{1}{x_1 x_2}\right), \end{aligned}$$

$\because x_1 > x_2$,

$\therefore x_1 > x_2$,

又 $\because x_1 > x_2 \geq 1$,

$\therefore x_1 x_2 > 1$,

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{x_1 x_2} &< 1, \\ \therefore 1 - \frac{1}{x_1 x_2} &> 0, \\ \therefore f(x_1) - f(x_2) &> 0, \\ \therefore f(x_1) &> f(x_2), \\ \therefore f(x) &\text{在} [1, +\infty) \text{单调递增}. \end{aligned}$$

15 2020~2021学年天津滨海新区塘沽第一中学高一上学期期中第20题12分

函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 且当 $x > 0$ 时, 函数的解析式为 $f(x) = \frac{2}{x} - 1$.

- (1) 用定义证明 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是减函数.
- (2) 求当 $x < 0$ 时, 函数 $f(x)$ 的解析式.

答案

(1) 证明见解析.

(2) $f(x) = -\frac{2}{x} - 1$.

解析

(1) $\because f(x) = \frac{2}{x} - 1$, 任取 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 且 $x_1 < x_2$;

$$\begin{aligned} \text{则 } f(x_1) - f(x_2) &= \left(\frac{2}{x_1} - 1 \right) - \left(\frac{2}{x_2} - 1 \right) \\ &= \frac{2(x_2 - x_1)}{x_1 x_2}. \end{aligned}$$

$$\because 0 < x_1 < x_2, \therefore x_2 - x_1 > 0, x_1 x_2 > 0;$$

$$\therefore f(x_1) - f(x_2) > 0, \text{ 即 } f(x_1) > f(x_2).$$

$\therefore f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是减函数.

(2) 当 $x < 0$ 时, $-x > 0$,

$$\because x > 0 \text{ 时}, f(x) = \frac{2}{x} - 1,$$

$$\therefore f(-x) = \frac{2}{-x} - 1 = -\frac{2}{x} - 1,$$

$\therefore f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数,

$$\therefore f(-x) = f(x),$$

$$\therefore f(x) = -\frac{2}{x} - 1.$$

$$\text{即 } x < 0 \text{ 时}, f(x) = -\frac{2}{x} - 1.$$