

02函数的奇偶性

1. 函数的奇偶性

1. 奇函数偶函数的定义

奇偶性	定义	图象特点
偶函数	对于函数 $f(x)$ 的定义域内任意一个 x ，都有_____①	关于_____②对称
奇函数	对于函数 $f(x)$ 的定义域内任意一个 x ，都有_____③	关于_____④对称

教法备注

【答案】① $f(-x) = f(x)$ ；② y 轴；③ $f(-x) = -f(x)$ ；④原点

【教师备注】判断函数的奇偶性，首先应该判断函数**定义域是否关于原点对称**。

定义域关于原点对称是函数具有奇偶性的一个**必要条件**。

1 2020~2021学年天津和平区天津市耀华嘉诚国际学校高一上学期期中第8题4分

函数 $f(x) = |x+1| - |x-1|$ 为（ ）。

- A. 奇函数
- B. 偶函数
- C. 既是奇函数也是偶函数
- D. 既不是奇函数也不是偶函数

答案 A

解析 $f(-x) = |-x+1| - |-x-1| = |x-1| - |x+1|$ ，

$\therefore f(-x) = -f(x)$ ，

$\therefore$ 函数为奇函数。

故选A。

2. 奇函数偶函数的最值

一个奇函数在 $[a, b]$ 上的最大值为 M ，最小值为 m ，则它在 $[-b, -a]$ 上的最大值为_____①，

最小值为_____②；

一个偶函数在 $[a, b]$ 和 $[-b, -a]$ 上的最大值为 M ，最小值为 m ，则它在 $[-b, -a]$ 上的最大值为_____③，最小值为_____④；

教法备注

【答案】① $-m$ ，② $-M$ ；③ M ，④ m ；

3.奇函数偶函数的单调性

奇函数在 $[a, b]$ 和 $[-b, -a]$ 上的单调性_____①，

偶函数在 $[a, b]$ 和 $[-b, -a]$ 上的单调性_____②。

教法备注

【答案】①相同；②相反

2 2017~2018学年9月北京昌平区昌平实验中学高一上学期月考第6题5分

如果奇函数 $f(x)$ 在 $[3, 7]$ 上是增函数，且最小值是5，那么 $f(x)$ 在 $[-7, -3]$ 上是（ ）。

- A. 增函数且最小值是 -5
- B. 增函数且最大值是 -5
- C. 减函数且最小值是 -5
- D. 减函数且最大值是 -5

答案 B

解析 若奇函数 $f(x)$ 在 $[3, 7]$ 上是增函数且最小值为5，
则 $f(x)$ 在 $[-7, -3]$ 上是增函数且最大值为 -5 。
故选B。

3 2018~2019学年12月天津南开区南开大学附属中学高一上学期月考第4题3分

下列函数中，既是偶函数又在 $(0, +\infty)$ 上单调递减的函数是（ ）。

- A. $y = x^3$
- B. $y = -x^2 + 1$
- C. $y = |x| + 1$
- D. $y = \sqrt{x}$

答案 B

解析 A选项： $y = x^3$ 是奇函数，在 $(0, +\infty)$ 单调递增；
 B选项： $y = -x^2$ 符合题意，正确；
 C选项： $y = |x| + 1$ 是偶函数，在 $(0, +\infty)$ 单调递增；
 D选项： $y = \sqrt{x}$ 是非奇非偶函数，在 $(0, +\infty)$ 单调递增。
 故选B.

4 2020~2021学年天津和平区天津市第五十五中学高一上学期期中第5题3分

下列函数中，在其定义域内既是奇函数又是减函数的是（ ）.

- A. $y = \frac{1}{x}$ B. $y = x^3$ C. $y = x$ D. $y = \begin{cases} -x^2 (x \geq 0) \\ x^2 (x < 0) \end{cases}$

答案 D

解析 A选项： $\because y = \frac{1}{x}$ ，
 $\therefore x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ ，
 x 在 $(-\infty, 0)$ 上为减函数，
 x 在 $(0, +\infty)$ 上为减函数，
 但是在定义域内不是减函数，故A错误；
 B选项： $y = x^3$ 为增函数，故B错误；
 C选项： $y = x$ 为增函数，故C错误；
 D选项： $y = \begin{cases} -x^2 (x \geq 0) \\ x^2 (x < 0) \end{cases}$ 在其定义域内既是奇函数又是减函数，故D正确。
 故选D.

2. 函数奇偶性的应用

求函数值

5 2020~2021学年天津东丽区天津一中滨海学校高一上学期期中第8题5分

设函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且 $f(-1) = 1$ ，则 $f(1) + f(0) = ()$.

- A. 1 B. 0 C. -1 D. -2

答案 C

解析 $\because f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 ,
 $\therefore f(0) = 0, f(1) = -f(-1) = -1,$
 $\therefore f(0) + f(1) = 0 - 1 = -1.$
 故选 C .

6 2020~2021 学年天津静海区静海区第一中学高一上学期期中 (七校联考) 第10题5分

已知 $y = f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上奇函数 , 当 $x \geq 0$ 时 , $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$, 则 $f(-2)$ 的值是 _____ .

答案 $-\frac{2}{5}$

解析 $\because x \geq 0$ 时 , $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1},$
 $\therefore f(2) = \frac{2}{4 + 1} = \frac{2}{5},$
 又 $\because f(x)$ 为奇函数 ,
 $\therefore f(-2) = -f(2) = -\frac{2}{5}.$
 故答案为 : $-\frac{2}{5}.$

精进不休 日新月异

7 2020~2021 学年天津南开区南开大学附属中学高一上学期期中第9题4分

已知 $f(x), g(x)$ 分别是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数和奇函数 . 且 $f(x) - g(x) = x^3 + x^2 + 1$, 则 $f(1) + g(1)$ 的值为 () .

A. -3 B. -1 C. 1 D. 3

答案 C

解析 $\because f(x), g(x)$ 分别是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数和奇函数 ,
 $\therefore f(x) = f(-x),$

$$g(x) + g(-x) = 0 ,$$

$$\therefore f(1) + g(1) = f(-1) - g(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 + 1 = 1 ,$$

故选C .

8 2017~2018学年北京海淀区北京一零一中学高一上学期期末第4题5分

已知函数 $g(x) = f(x) - x$, 若 $f(x)$ 是偶函数 , 且 $f(2) = 1$, 则 $g(-2) = (\quad)$.

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

答案 C

解析 $\because f(x)$ 是偶函数 ,

$$\therefore f(-2) = f(2) = 1 ,$$

$$\therefore g(-2) = f(-2) - (-2) = 1 + 2 = 3 ,$$

故选C .

求解析式

9 2020~2021学年天津和平区天津市第二十一中学高一上学期期中第15题10分

已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 , 且当 $x \leq 0$ 时 , $f(x) = -x + 1$.

(1) 求 $f(0)$, $f(2)$ 的值 .

(2) 求函数 $f(x)$ 的解析式 .

答案 (1) $f(0) = 1$; $f(2) = 3$.

$$(2) f(x) = \begin{cases} -x + 1, & x \leq 0 \\ x + 1, & x > 0 \end{cases} .$$

解析 (1) 因为当 $x \leq 0$ 时 , $f(x) = -x + 1$,

$$\text{所以 } f(0) = 1 ,$$

又函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 ,

$$\text{所以 } f(2) = f(-2) = -(-2) + 1 = 3 ,$$

所以 $f(2) = 3$.

(2) 令 $x > 0$, 则 $-x < 0$, 从而 $f(-x) = x + 1$,

所以当 $x > 0$ 时 , $f(x) = x + 1$.

$$\text{所以 } f(x) = \begin{cases} -x + 1, & x \leq 0 \\ x + 1, & x > 0 \end{cases} .$$

10 2019~2020学年10月天津和平区天津市第一中学高一上学期周测C卷第10题

定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 , 当 $x < 0$ 时 , $f(x) = x - x^2$, 则当 $x > 0$ 时 , $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

答案 $-x^2 - x$

解析 令 $x > 0$,

$$\therefore -x < 0 ,$$

$$\therefore f(-x) = -x - (-x)^2$$

$$= -x - x^2 ,$$

又 $\because f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为偶函数 ,

$$\therefore \text{当 } x > 0 , f(x) = f(-x) = -x^2 - x .$$

11 2020~2021学年天津南开区天津市南开中学高一上学期期中第7题4分

函数 $f(x)$ 为奇函数 , 且当 $x \in (-\infty, 0)$ 时 , $f(x) = -1 + x^2 - x^3$, 则当 $x \in (0, +\infty)$ 时 , $f(x)$ 的解析式是 () .

A. $f(x) = 1 - x^2 - x^3$

B. $f(x) = 1 - x^2 + x^3$

C. $f(x) = -1 - x^2 - x^3$

D. $f(x) = -1 - x^2 + x^3$

答案 A

解析 任取 $x \in (0, +\infty)$,

$$-x \in (-\infty, 0) ,$$

$$\therefore f(-x) = -1 + (-x)^2 - (-x)^3$$

$$= -1 + x^2 + x^3 ,$$

又 $\because f(x)$ 为奇函数,

$$\begin{aligned}\therefore f(x) &= -f(-x) \\ &= 1 - x^2 - x^3.\end{aligned}$$

故选A.



求参数值

12

2020~2021学年天津红桥区天津市复兴中学高一上上学期期中第14题4分

若关于 x 的函数 $y = (x-1)(x+a)$ 为偶函数, 则实数 $a =$ _____.

答案

1

解析

$$\text{函数 } y = (x-1)(x+a) = x^2 + (a-1)x - a,$$

$\because$ 函数 $y = (x-1)(x+a)$ 为偶函数,

$$\therefore x^2 - (a-1)x - a = x^2 + (a-1)x - a,$$

$$\therefore a-1 = 0,$$

$$\therefore a = 1.$$

故答案为: 1.

13

2017~2018学年天津和平区天津市耀华中学高一上上学期期中第3题4分

设函数 $f(x) = \frac{x^2 + (a+1)x + a}{x}$ 为奇函数, 则实数 $a =$ ().

A. -1

B. 1

C. 0

D. -2

答案

A

解析

函数 $f(x)$ 定义域为 $\{x|x \neq 0\}$, 关于原点对称,

$\because$ 函数 $f(x) = \frac{x^2 + (a+1)x + a}{x}$ 为奇函数,

$$\therefore f(-x) + f(x) = \frac{x^2 - (a+1)x + a}{-x} + \frac{x^2 + (a+1)x + a}{x} = 0,$$

化为 $(a+1)x = 0$,

$\therefore a + 1 = 0$, 解得 $a = -1$.

故选A .



求解不等式

14

2020~2021学年天津和平区天津市第二十一中学高一上学期期中第6题4分

已知偶函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递增 , 则满足 $f(2x - 1) < f\left(\frac{1}{3}\right)$ 的 x 取值范围是 () .

A. $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

B. $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

C. $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$

D. $\left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$

答案

A

解析

$\because f(x)$ 是偶函数 , $\therefore f(x) = f(|x|)$,

则不等式等价于 $f(|2x - 1|) < f\left(\frac{1}{3}\right)$,

$\because f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递增 ,

$\therefore |2x - 1| < \frac{1}{3}$, 解得 $\frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}$.

故选A .

15

2020~2021学年天津和平区天津市第一中学高一上学期期中第15题4分

已知 $f(x)$ 是定义在 $[2b, 1 - b]$ 上的偶函数 , 且在 $[2b, 0]$ 上为增函数 , 则 $f(x - 1) \leq f(2x)$ 的解集为 _____ .

答案

$\left[-1, \frac{1}{3}\right]$

解析

$\because f(x)$ 是定义在 $[2b, 1 - b]$ 上的偶函数 ,

$\therefore 2b + 1 - b = 0$,

$\therefore b = -1$,

$\because f(x)$ 在 $[-2, 0]$ 上单增 ,

$\therefore f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上单减 ,

$\therefore$ 自变量越靠近0, 函数值越大,

$$\therefore f(x-1) \leq f(2x),$$

$$\therefore |2x| \leq |x-1|,$$

$$\therefore 4x^2 \leq x^2 + 1 - 2x,$$

$$\therefore 3x^2 + 2x - 1 \leq 0,$$

$$\therefore (3x-1)(x+1) \leq 0,$$

$$\therefore -1 \leq x \leq \frac{1}{3},$$

$$\text{又} \therefore -2 \leq x-1 \leq 2,$$

$$\therefore -1 \leq x \leq 3,$$

$$\text{又} \therefore -2 \leq 2x \leq 2,$$

$$\therefore -1 \leq x \leq 1,$$

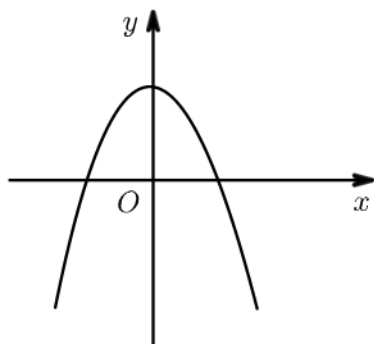
$$\text{综上} -1 \leq x \leq \frac{1}{3}.$$

16 2020~2021学年天津和平区天津市耀华嘉诚国际学校高一上学期期中第16题4分

设 $f(x)$ 为定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数, 且 $x \geq 0$ 时, $f(x) = 4 - x^2$. 则关于 x 的不等式 $f(x+1) > f(10)$ 的解集为 _____.

答案 $(-11, 9)$

解析 结合条件, 可画出 $y = f(x)$ 图象:



$$\text{又} \therefore f(x+1) > f(10),$$

$$\therefore |x+1| < 10,$$

$$\text{即} -11 < x < 9,$$

$$\text{解得} x \in (-11, 9).$$

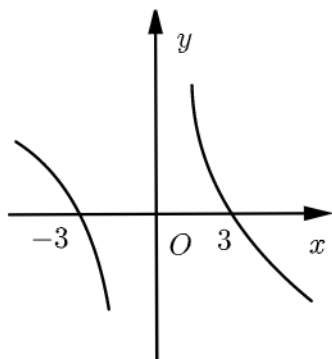
借助图像求解不等式

17 2018~2019学年天津河西区天津市第四中学高一上学期期中第14题4分

如果定义在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上的奇函数 $f(x)$ ，在 $(0, +\infty)$ 内是减函数，又有 $f(3) = 0$ ，则 $x \cdot f(x) < 0$ 的解集为 _____ .

答案 $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$

解析 由题意可画出函数 $f(x)$ 的草图，如图所示 .



因为 $x \cdot f(x) < 0$ ，

所以当 $x > 0$ 时， $f(x) < 0$ ，

所以 $x > 3$ ；当 $x < 0$ 时， $f(x) > 0$ ，

所以 $x < -3$.

$\therefore$ 解集为 $\{x | x < -3 \text{ 或 } x > 3\}$.

18 2019~2020学年10月天津和平区天津市第一中学高一上学期周测D卷第7题

已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，且在区间 $(-\infty, 0]$ 上单调递增 . 若实数 a 满足 $f(a) > f(-\sqrt{2})$ ，则 a 的取值范围是 () .

A. $(-\infty, -\sqrt{2})$

B. $(\sqrt{2}, +\infty)$

C. $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

D. $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$

答案 C

解析 $\because f(x)$ 为偶函数在 $(-\infty, 0]$ 上单增,

又 $\because f(a) > f(-\sqrt{2})$,

$\therefore |a| < |-\sqrt{2}|$,

$\therefore |a| < |\sqrt{2}|$,

$\therefore -\sqrt{2} < a < \sqrt{2}$.

精进不休 日新月异

19 2017~2018 学年河北石家庄长安区石家庄第一中学高一下学期期中文科第 11 题 5 分

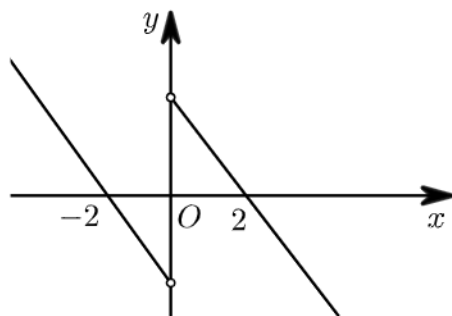
已知奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 且 $f(2) = 0$, 则不等式 $(x-1)f(x-1) > 0$ 的解集为 () .

- A. $(-3, -1)$ B. $(-3, 1) \cup (2, +\infty)$ C. $(-3, 0) \cup (3, +\infty)$ D. $(-1, 1) \cup (1, 3)$

答案 D

解析 方法一: 由题意, $f(x)$ 为奇函数, 则其图象关于原点对称,

又 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 且 $f(2) = 0$, 可画出满足条件的大致图象, 如下:



不等式 $(x-1)f(x-1) > 0$ 等价于 $\begin{cases} x-1 > 0 \\ f(x-1) > 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x-1 < 0 \\ f(x-1) < 0 \end{cases}$,

当 $\begin{cases} x-1 > 0 \\ f(x-1) > 0 \end{cases}$ 时, $\begin{cases} x > 1 \\ 0 < x-1 < 2 \end{cases}$, 解得 $1 < x < 3$;

当 $\begin{cases} x-1 < 0 \\ f(x-1) < 0 \end{cases}$ 时, $\begin{cases} x < 1 \\ -2 < x-1 < 0 \end{cases}$, 解得 $-1 < x < 1$,

综上, 不等式 $(x-1)f(x-1) > 0$ 的解集为 $(-1, 1) \cup (1, 3)$.

故选 D.

方法二: $\because f(x)$ 为奇函数,

又 $\because f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, $f(2) = 0$,

$\therefore$ 当 $x-1 > 0$ 时,

$$\therefore (x-1)f(x-1) > 0,$$

$$\therefore f(x-1) > 0,$$

$$\therefore 0 < x-1 < 2,$$

$$\therefore 1 < x < 3;$$

当 $x-1 < 0$ 时,

$$\therefore (x-1)f(x-1) > 0,$$

$$\therefore f(x-1) < 0,$$

$$\therefore -2 < x-1 < 0,$$

$$\therefore -1 < x < 1,$$

综上, $x \in (-1, 1) \cup (1, 3)$.

故选D.

3. 综合性应用

20 2019~2020学年天津和平区高一上学期期末第19题8分

已知函数 $f(x) = \frac{x+b}{x^2+1}$ 是定义在 $(-1, 1)$ 上的奇函数.

- (1) 确定函数 $f(x)$ 的解析式.
- (2) 用定义证明: 函数 $f(x)$ 在区间 $(-1, 1)$ 上是增函数.
- (3) 解不等式 $f(t-1) + f(t) < 0$.

答案

(1) $f(x) = \frac{x}{1+x^2} \quad (-1 < x < 1)$.

(2) 证明见解析.

(3) $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

解析

(1) 函数 $f(x) = \frac{x+b}{1+x^2}$ 是定义在 $(-1, 1)$ 上的奇函数,

则 $f(0) = 0$, 即有 $b = 0$,

则函数 $f(x)$ 的解析式: $f(x) = \frac{x}{1+x^2} \quad (-1 < x < 1)$.

(2) 设 $-1 < m < n < 1$,

$$\text{则 } f(m) - f(n) = \frac{m}{1+m^2} - \frac{n}{1+n^2}$$

$$= \frac{(m-n)(1-mn)}{(1+m^2)(1+n^2)},$$

由于 $-1 < m < n < 1$, 则 $m-n < 0$, $mn < 1$, 即 $1-mn > 0$,

$(1+m^2)(1+n^2) > 0$, 则有 $f(m)f(n) < 0$,

则 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上是增函数.

(3) 由于奇函数 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上是增函数,

则不等式 $f(t-1) + f(t) < 0$ 即为 $f(t-1) < -f(t) = f(-t)$,

$$\text{即有 } \begin{cases} -1 < t-1 < 1 \\ -1 < t < 1 \\ t-1 < -t \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} 0 < t < 2 \\ -1 < t < 1 \\ t < \frac{1}{2} \end{cases}.$$

则有 $0 < t < \frac{1}{2}$,

即解集为 $(0, \frac{1}{2})$.

21

2020~2021学年天津东丽区天津一中滨海学校高一上学期期中第24题

已知函数 $f(x) = \frac{ax+b}{x^2+1}$ 是定义在 $(-1, 1)$ 上的奇函数, 且 $f(\frac{1}{2}) = \frac{4}{5}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式.

(2) 判断当 $x \in (-1, 1)$ 时函数 $f(x)$ 的单调性, 并用定义证明.

(3) 解不等式 $f(t^2-1) + f(t) < 0$.

答案

(1) $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$.

(2) $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ 在 $(-1, 1)$ 上单调递增, 证明见解析.

(3) $(-1, 0) \cup (0, \frac{-1+\sqrt{5}}{2})$.

解析

(1) $\because$ 函数 $f(x) = \frac{ax+b}{x^2+1}$ 是定义在 $(-1, 1)$ 上的奇函数,

$$\therefore f(0) = b = 0.$$

$$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}a}{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1} = \frac{4}{5},$$

$$\therefore a = 2.$$

$$\therefore \text{函数 } f(x) \text{ 的解析式为 } f(x) = \frac{2x}{x^2+1}.$$

(2) 任取 $-1 < x_1 < x_2 < 1$,

$$\text{则 } f(x_1) - f(x_2) = \frac{2x_1}{x_1^2+1} - \frac{2x_2}{x_2^2+1} = \frac{2(1-x_1x_2)(x_1-x_2)}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)},$$

$$\because -1 < x_1 < x_2 < 1 ,$$

$$\therefore x_1 - x_2 < 0 , 1 - x_1 x_2 > 0 ,$$

$$\therefore f(x_1) - f(x_2) < 0 , \text{ 即 } f(x_1) < f(x_2) ,$$

$$\therefore f(x) = \frac{2x}{1+x^2} \text{ 在 } (-1, 1) \text{ 上单调递增 .}$$

$$(3) \quad f(t^2 - 1) + f(t) < 0 ,$$

$$\because f(x) \text{ 是定义在 } (-1, 1) \text{ 上的奇函数 ,}$$

$$\therefore f(t^2 - 1) < -f(t) = f(-t) ,$$

$$\text{由 (2) 得 } f(x) \text{ 为 } (-1, 1) \text{ 上的增函数 ,}$$

$$\therefore \begin{cases} -1 < t < 1 \\ -1 < t^2 - 1 < 1 , \\ t^2 - 1 < -t \end{cases}$$

$$\text{解得 : } -1 < t < \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \text{ 且 } t \neq 0 .$$

$$\therefore \text{ 不等式的解集为 : } (-1, 0) \cup \left(0, \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right) .$$