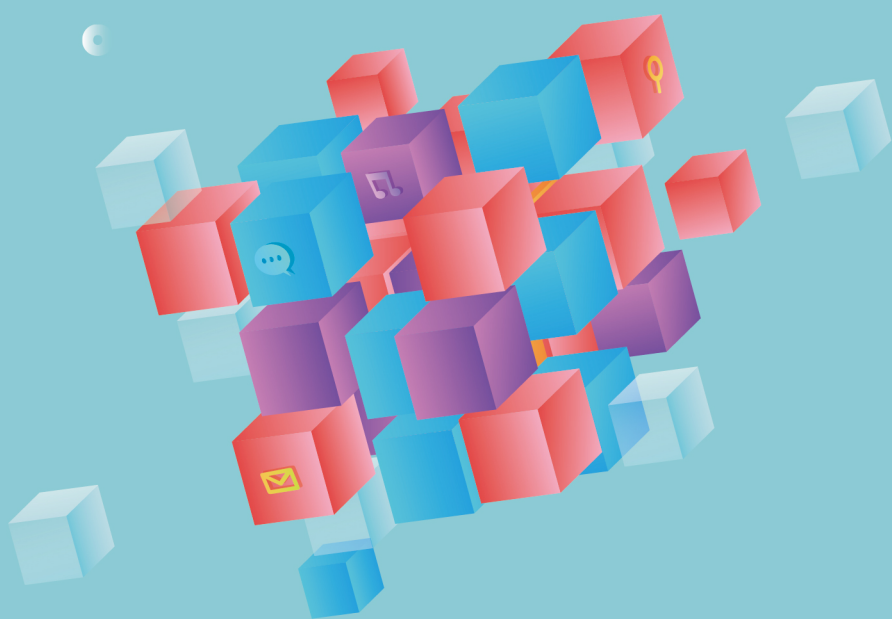


知识魔方

i 数学



总 主 编：马建明

本模块主编：吕金琳

教 研 团 队：吕金琳 闫聪聪

封面设计：刘雅迪

前言

学而思一对一产品升级介绍

为进一步打造本地化产品，助力学生高考，学而思 1 对 1 产品团队打造了模块课系列产品，该产品旨在将高中阶段所有的知识点全部打散，再针对每一个学生的具体情况重新组合，制定个性化的学习方案，帮助学生进步。

随着模块课 1.0 版本的推进，无论是课程选择，还是内容学习上，学生有更多可以选择的空间，切实满足不同学生的个性化需求。本着“随需而变，才有未来”的精神，我们又推出了 2.0 版本《知识魔方·i 系列》，此系列涵盖《知识魔方·i 数学》、《知识魔方·i 物理》、《知识魔方·i 化学》、《知识魔方·i 生物》、《知识魔方·i 历史》多种学科，结合学科共性，统一产品逻辑，与此同时，兼顾到学科特色，创新学习形式，激发学生学习兴趣，做学习的主人。

本产品在设计上有三个突出的**特点**：

- (1) 模块产品，私人订制效果棒
- (2) 本地优化，海量资源覆盖广
- (3) 知识解构，新旧旧识尽入囊



扫描二维码，关注公众号，获取更多学习资料

高中数学课程产品设计

考点分析：以大数据方式分析考试重点难点，紧扣考试热点，让同学们的复习更具针对性。

知识导图：梳理知识结构，帮助同学们形成网络状的知识图谱，更有助于对知识点的理解记忆。

典型例题：分析考试情况，精选最新的考题，让同学们清楚每一个知识点的考法。

巩固练习：匹配同类型题目，讲练结合，锻炼提升解题能力。

本模块介绍

在本模块中，我们会结合前面学习的相关函数知识，理解有理数指数幂的含义，了解幂函数及指数运算，能够利用分式指数幂与根式的互化解决化简和求值问题，并由此引申出指数函数的概念并掌握指数函数的图象与性质。同时也要充分掌握能利用指数函数的单调性比较幂的大小。

而在以上知识掌握扎实后，我们将引入对数的概念，并学会熟练地进行对数式与指数式的互化，与此同时，掌握对数的运算性质，并能够利用其进行对数运算。通过此处内容理解对数函数的概念并掌握对数函数的图象与性质。

目 录

第 1 讲 幂函数以及二次函数.....	01
第 2 讲 指数运算与指数函数.....	05
第 3 讲 对数运算与对数函数 1.....	09
第 4 讲 对数函数 2 及基本初等函数综合.....	11



我们一起开始学习吧 o (*^_^*) o



第 1 讲

幂函数以及二次函数





幂函数



求解析式

- 2019~2020 学年天津河西区高一上学期期中第 11 题 4 分
已知幂函数 $y = f(x)$ 的图象过点 $(2, \sqrt{2})$, 则它的解析式为 _____.
- 2019~2020 学年天津高一上学期期末 (武清、蓟县、静海、宁河、宝坻) 第 11 题 4 分
已知幂函数 $y = f(x)$ 的图象过 $(2, 4)$, 则 $f(3) =$ _____.



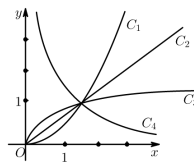
奇偶性、单调性

- 已知幂函数 $f(x) = (m^2 - m - 1)x^{m+2}$ 的图像关于 y 轴对称, 则实数 m 的值为 ().
A. 2 或 -1 B. -2 或 1 C. 2 D. -2
- 下列函数中, 既是奇函数, 又在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递减的函数是 ().
A. $y = x^{-2}$ B. $y = x^{-1}$ C. $y = x^2$ D. $y = x^{\frac{1}{3}}$
- 2019~2020 学年天津和平区天津市耀华中学高一上学期期中第 12 题 4 分
函数 $y = (m^2 - m - 1)x^{m^2 - 2m - 3}$ 是幂函数且在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 则实数 m 的值为 _____.



图像

- 幂函数 $y = x^\alpha$ 在第一象限内的图象如图所示, 且 α 分别取 $-1, 1, \frac{1}{2}, 2$, 则相对应的曲线 C_1, C_2, C_3, C_4 的 α 的值依次为 _____.



求解不等式

- 若 $(m+1)^{\frac{1}{2}} < (3-2m)^{\frac{1}{2}}$, 试求实数 m 的取值范围.
- 若 $(m+1)^{-1} < (3-2m)^{-1}$, 试求实数 m 的取值范围.



二次函数



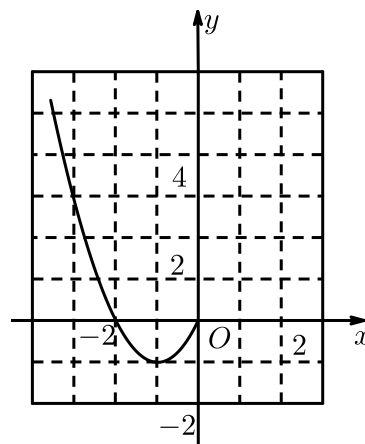
画图判断函数性质

9

2018~2019 学年 10 月天津南开区南开大学附属中学高一上学期月考第 17 题

已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，且当 $x \leq 0$ 时， $f(x) = x^2 + 2x$ ，现已画出函数 $f(x)$ 在 y 轴左侧的图象，如图所示，请根据图象：

- (1) 画出函数 $f(x)$ ($x \in \mathbf{R}$) 在 y 轴右侧的图象.
- (2) 写出函数 $f(x)$ ($x \in \mathbf{R}$) 的增区间.
- (3) 写出函数 $f(x)$ ($x \in \mathbf{R}$) 的解析式.



最值问题

10

2020~2021 学年天津塘沽紫云中学高一上学期期中第 15 题 5 分

已知函数 $f(x) = 2x + 1$ ， $g(x) = x^2 - 2$ ，对于 $\forall x \in \mathbf{R}$ ，用 $M(x)$ 表示 $f(x)$ 与 $g(x)$ 中的较大者，记为 $M(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ ，则 $M(x)$ 的最小值是 _____.

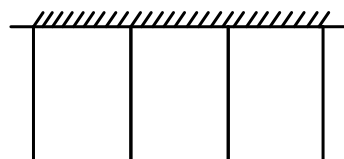


实际应用

11

2018~2019 学年天津南开区高一上学期期末第 15 题 3 分

有一批材料可以建成 360m 长的围墙，如果用此材料在一边靠墙的地方围成一块矩形场地，中间用同样材料隔成三个面积相等的小矩形（如图所示），则围成场地的最大面积为 _____ m^2 （围墙厚度不计）.





恒能成立问题的讨论



实数域上恒成立问题

12

2019~2020 学年 10 月天津河西区天津市新华中学高一上学期月考第 10 题

已知关于 x 的不等式 $kx^2 - 6kx + k + 8 \geq 0$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 则 k 的取值范围是 _____.

直接分参

13

2020~2021 学年 10 月天津南开区南开大学附属中学高一上学期月考第 13 题 4 分

若关于 x 的不等式 $x^2 - 4x - m \geq 0$ 对任意 $0 < x \leq 1$ 恒成立, 则 m 的最大值为 _____.

对勾函数型

14

2019~2020 学年 9 月天津河北区天津外国语学院附属外国语学校高一上学期月考第 12 题 4 分

当 $x \in (1, 3)$ 时, 不等式 $x^2 - mx + 4 > 0$ 恒成立, 则实数 m 的取值范围是 _____.

第 2 讲

指数运算与指数函数





指数运算

- 1 下列运算正确的是 ().
- A. $a^2 \cdot a^3 = a^6$ B. $(3a)^3 = 9a^3$ C. $\sqrt[8]{a^8} = a$ D. $(-2a^2)^3 = -8a^6$
- 2 $\left(5\frac{1}{16}\right)^{0.5} + (-1)^5 \div \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} + \left(2\frac{10}{27}\right)^{-\frac{2}{3}} = ().$
- A. $-\frac{9}{4}$ B. $\frac{4}{9}$ C. $\frac{9}{4}$ D. $-\frac{4}{9}$
- 3 计算: $\sqrt{6\frac{1}{4}} + \left(3\frac{3}{8}\right)^{\frac{1}{3}} + \sqrt[3]{125} = \underline{\hspace{2cm}}.$
- 4 计算下列各式 (式中字母均是正数).
- $\left(2a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}}\right)\left(-6a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}\right) \div \left(-3a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{5}{6}}\right).$



比较大小

- 5 若 $a > b > 0$, 则下列不等式不成立的是 ().
- A. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ B. $|a| > |b|$ C. $a + b < 2\sqrt{ab}$ D. $\left(\frac{1}{2}\right)^a < \left(\frac{1}{2}\right)^b$
- 6 设 $a = 0.6^{0.6}, b = 0.6^{1.5}, c = 1.5^{0.6}$, 则 a, b, c 的大小关系是 ().
- A. $a < b < c$ B. $a < c < b$ C. $b < a < c$ D. $b < c < a$
- 7 设 $a = \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{2}{5}}, b = \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{3}{5}}, c = \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{2}{5}}$, 则 a, b, c 的大小关系是 ().
- A. $b > c > a$ B. $a > b > c$ C. $c > a > b$ D. $a > c > b$



过定点问题

- 8 函数 $f(x) = a^{x-1} - 2$ 恒过定点 _____.
- 9 不论 $a(a > 0, a \neq 1)$ 为何值, 函数 $f(x) = a^{x-3} - 1$ 的图象一定经过点 P , 则点 P 的坐标为 _____.



解不等式

- 10 已知集合 $A = \{x|x^2 - 5x + 6 \leq 0\}$, 集合 $B = \{x|2^x > 4\}$, 则集合 $A \cap B = (\quad)$.
- A. $\{x|2 \leq x \leq 3\}$ B. $\{x|2 \leq x < 3\}$ C. $\{x|2 < x \leq 3\}$ D. $\{x|2 < x < 3\}$
- 11 设集合 $A = \{x|2^x - 8 \geq 0\}$, $B = \{x|x^2 - 7x + 10 \leq 0\}$, 则 $A \cap B = (\quad)$.
- A. $\{x|2 \leq x \leq 3\}$ B. $\{x|3 \leq x \leq 5\}$ C. $\{x|x \leq 5\}$ D. $\{x|x \geq 2\}$



综合问题

- 12 已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的单调递减的奇函数 $f(x)$, 当 $x > 0$ 时, $f(x) = \frac{x}{3} - 2^x$.
- (1) 求 $f(-1)$ 的值.
- (2) 求 $f(x)$ 的解析式.
- (3) 若对任意的 $t \in \mathbf{R}$, 不等式 $f(t^2 - 2t) + f(2t^2 - k) < 0$ 恒成立, 求实数 k 的取值范围.

第 3 讲

对数运算与对数函数 1





对数运算

1 求值: $2^{\log_2 \frac{1}{4}} - \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} + \lg \frac{1}{100} + (\sqrt{2})^{\ln 1} = \underline{\hspace{2cm}}.$

2 计算: $e^{\ln 2} + \lg 2 + \lg 5 = \underline{\hspace{2cm}}.$

3 计算: $e^{\ln 3} + \log_{\sqrt{5}} 25 + (0.125)^{-\frac{2}{3}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

4 计算:
 $\lg 2 - \lg \frac{1}{4} + 3 \lg 5 - \log_3 2 \cdot \log_4 9$

5 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 2, & x \leq 0 \\ -1 + \ln x, & x > 0 \end{cases}$, 若 $f(a) = 0$, 则 a 的值为 ().

A. -2

B. 1

C. 1, e

D. -2, e



比较大小

6 $a = 3^{0.7}, b = 0.7^3, c = \log_3 0.7$, 则 a, b, c 的大小关系是 ().

A. $c < a < b$

B. $b < c < a$

C. $c < b < a$

D. $b < a < c$

7 已知 $a = \log_2 0.3, b = 2^{0.3}, c = 0.3^{0.2}$, 则 a, b, c 的大小关系是 ().

A. $b > c > a$

B. $c > b > a$

C. $a > b > c$

D. $b > a > c$

8 已知 $a = \log_2 0.2, b = 2^{0.2}, c = 0.2^{0.3}$, 则 ().

A. $a < b < c$

B. $a < c < b$

C. $c < a < b$

D. $b < c < a$

9 设 $a = 3^{0.4}, b = 0.4^3, c = \log_{0.4} 3$, 则 a, b, c 的大小关系是 ().

A. $c < b < a$

B. $a < b < c$

C. $c < a < b$

D. $b < a < c$

10 若 $a = 5^{0.3}, b = 0.3^5, c = \log_{0.3} 5$, 则 a, b, c 的大小关系为 ().

A. $a > b > c$

B. $a > c > b$

C. $b > a > c$

D. $c > a > b$

11 已知 $a = \log_{\frac{1}{2}} 5, b = \log_2 3, c = 3^{-0.6}$, 那么 ().

A. $a < b < c$

B. $a < c < b$

C. $c < a < b$

D. $b < a < c$

12 设 $a = \log_{0.5} 6, b = 0.5^6, c = 6^{0.5}$, 则 a, b, c 的大小顺序是 ().

A. $b < a < c$

B. $b < c < a$

C. $a < c < b$

D. $a < b < c$

第 4 讲

对数函数 2

及基本初等函数综合





对数函数综合问题

- 1 函数 $y = \log_2(x^2 - 3x + 2)$ 的递增区间为 ().
- A. $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$ B. $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$ C. $(2, +\infty)$ D. $(-\infty, 1)$
- 2 已知 $f(x) = \log_a(1+x) - \log_a(1-x)$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$).
- (1) 求函数 $f(x)$ 的定义域;
- (2) 判断函数 $f(x)$ 的奇偶性;
- (3) 求使 $f(x) > 0$ 的 x 的取值范围.
- 3 设函数 $f(x) = \lg \frac{a}{x+1}$ ($a \in \mathbf{R}$), 且 $f(1) = 0$.
- (1) 求 a 的值.
- (2) 求 $f(x)$ 的定义域.
- (3) 判断 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上的单调性, 并用单调性的定义证明.



基本初等函数综合



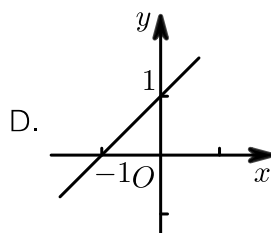
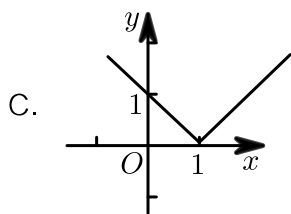
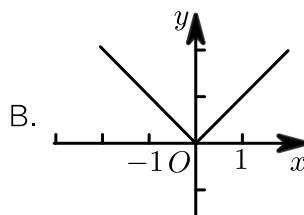
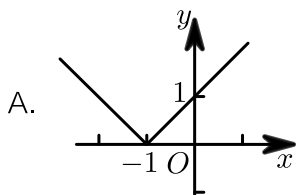
赋值运算

- 4 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \geq 0 \\ -x^2+1, & x < 0 \end{cases}$, 则 $f(f(-1)) = (\quad)$.
A. 0 B. -1 C. 1 D. 2
- 5 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x \leq 1 \\ \frac{2}{x}, & x > 1 \end{cases}$, 则 $f(f(3)) = (\quad)$.
A. $\frac{1}{5}$ B. 3 C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{13}{9}$
- 6 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2+4x+3, & x \leq 0 \\ 3-x, & x > 0 \end{cases}$, 则 $f(f(5)) = \underline{\hspace{2cm}}$.
- 7 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \log_3 x, & x > 0 \\ 2^x, & x \leq 0 \end{cases}$, 则 $f\left(f\left(\frac{1}{9}\right)\right) = (\quad)$.
A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{1}{8}$



函数图像

- 8 函数 $y = |x+1|$ 的图象是 ().



零点问题

- 9 已知函数 $f(x) = \frac{3}{x} - \log_2 x$, $x \in (0, +\infty)$, 则 $f(x)$ 的零点所在的区间是 ().
A. (0, 1) B. (1, 2) C. (2, 3) D. (3, 4)
- 10 函数 $f(x) = \frac{4}{x} - 2^x$ 的零点所在区间是 ().
A. $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ B. $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ C. $\left(1, \frac{3}{2}\right)$ D. $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$

