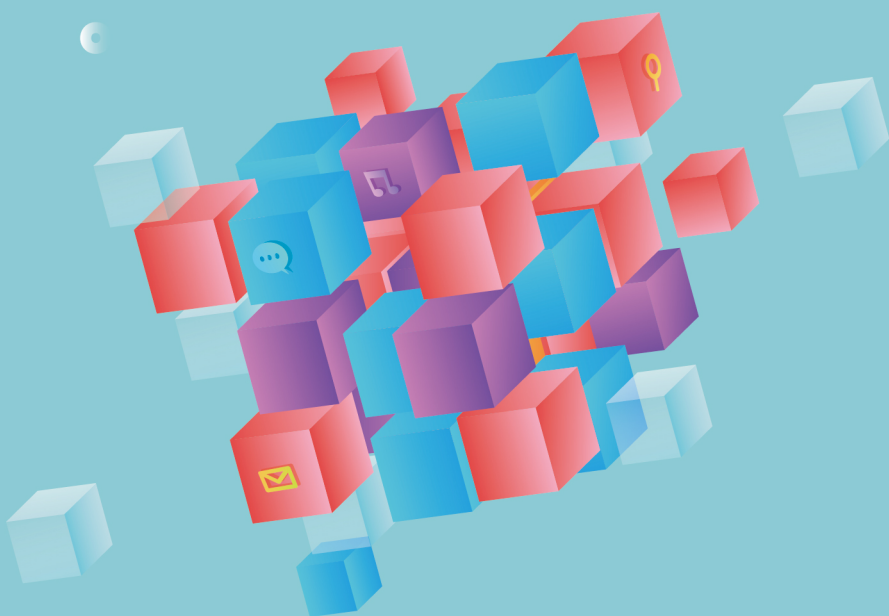


知识魔方

i 数学



主 编：马建明

本模块制作人：吕金琳

本模块审核人：闫聪聪

封面设计：林梦涵

教研团队：高中数学组

前言

学而思爱智康产品升级介绍

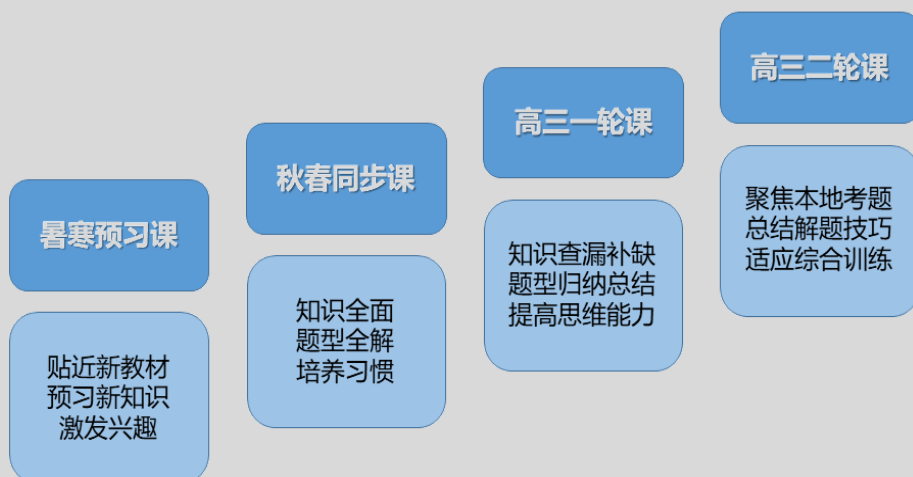
新教材改革已经如火如荼地展开，智康新产品助学助考的开发问题已成为家长和学子重点关注的焦点。应广大家长和学子的需求，我们带领最优质的高中理科教师团队制作出最新人教版教材的全模块切片产品。该系列产品能帮助学生掌握新的课程标准，让学生能够按照新教材理念科学高效的学习。该书以“三次课学懂一个模块”为宗旨，帮你轻松找到学习目标，助你走向成功。

这套产品在整体设计上有四个突出的特点：

- (1) 标准教学大纲变为专属大纲，并且可以随时调整
- (2) 讲义 + 习题册，形成测、讲、评、练学习闭环
- (3) 难度阶梯分明，在学科层次上由浅入深、给不同程度的学生都能带来持续的进步
- (4) 针对本地考卷进行大数据分析，精选例题，直击考点

如果你在使用的过程中发现有那里需要改正或者优化，希望优秀的你能够给予我更多的建议与意见，帮助我更好的提升自己。

高中理科产品课程体系



扫描右侧二维码
提出你的意见与建议吧



高三数学课程产品设计

考点占比：让同学们更加清楚本模块知识在高考中的地位。

考点分析：以大数据方式分析考试重点难点，紧扣考试热点，让同学们的复习更具针对性。

知识导图：梳理知识结构，帮助同学们形成网络状的知识图谱，更有助于对知识点的理解记忆。

典型例题：分析考试情况，精选最新的考题，让同学们清楚每一个知识点的考法。

巩固练习：匹配同类型题目，讲练结合，锻炼提升解题能力。

本模块介绍

本模块标准讲义选题主要为：2020 年各区二模试卷、各学校三四月份模拟考试卷、高三上学期期末试卷；

本模块主要用于高三考生四月至六月最后阶段的冲刺复习，内容主要围绕着天津高考常见的题型进行复习。

目 录

第 1 讲 导函数专项复习..... 01

- 知 识 点 1 导函数的基础应用
- 知 识 点 2 导函数模考常见基础题型
- 知 识 点 3 函数与方程
- 知 识 点 4 导数解答

第 2 讲 三角函数及解三角形专项复习.....13

- 知 识 点 1 三角函数基础性应用
- 知 识 点 2 三角函数的图像性质
- 知 识 点 3 解三角形
- 知 识 点 4 解三角形解答

第 3 讲 数列、基本不等式专项复习.....21

- 知 识 点 1 数列
- 知 识 点 2 基本不等式

第 4 讲 立体几何、平面向量、复数专项复习.....35

- 知 识 点 1 立体几何解答
- 知 识 点 2 空间几何体
- 知 识 点 3 平面向量
- 知 识 点 4 复数



我们一起开始学习吧 o (*^_^*) o



目 录

第 5 讲 曲线性质选填 + 椭圆解答专项复习.....43

- 知 识 点 1 直线与圆
- 知 识 点 2 圆锥曲线选填
- 知 识 点 3 椭圆解答

第 6 讲 概率统计及计数原理专项复习.....57

- 知 识 点 1 概率统计
- 知 识 点 2 计数原理

第 7 讲 自测模拟卷.....65



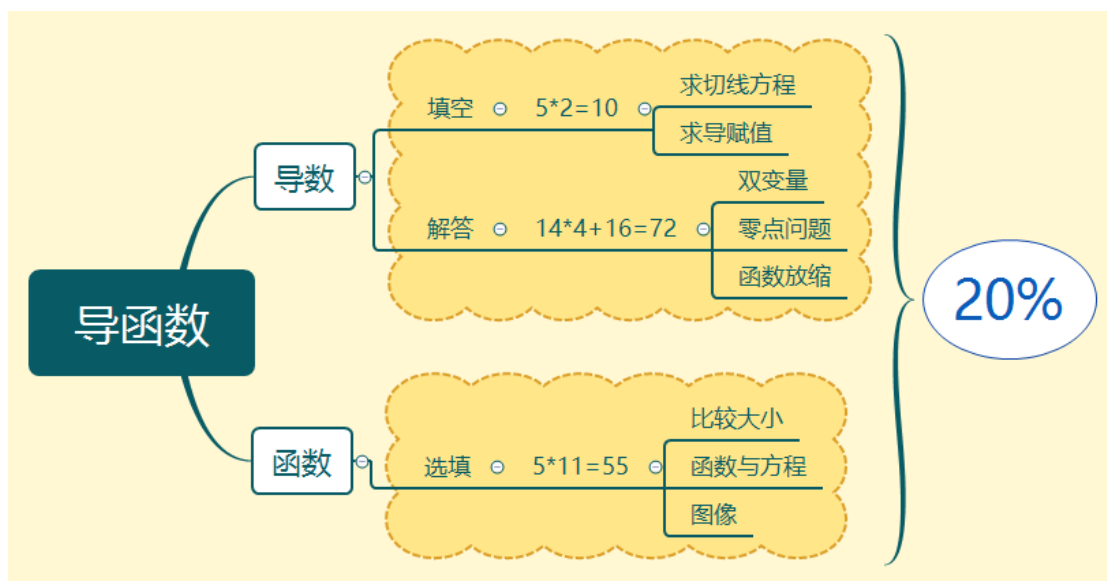
我们一起开始学习吧 o (*^_^*) o



第 1 讲

导函数专项复习





导函数的基础应用

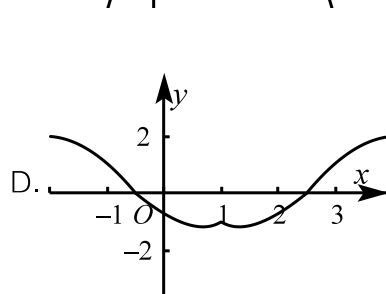
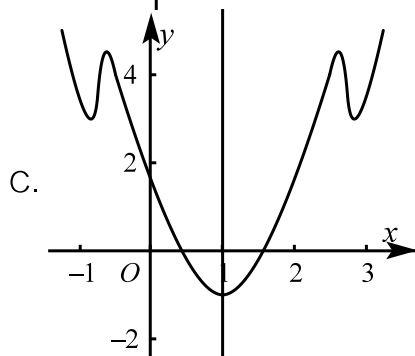
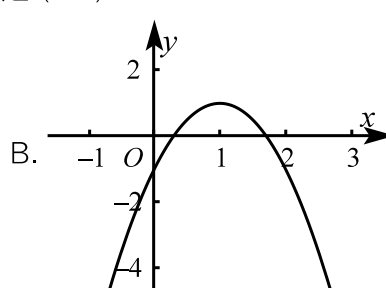
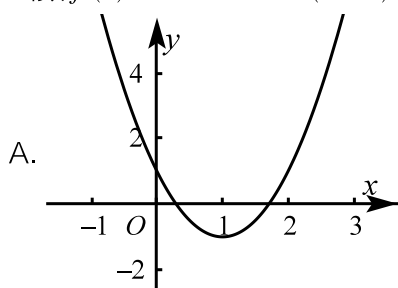


图像判定

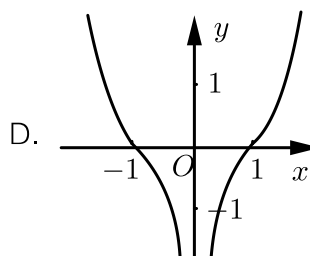
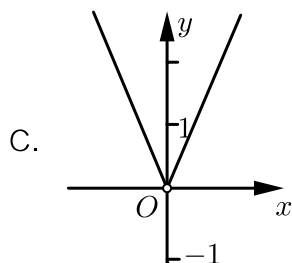
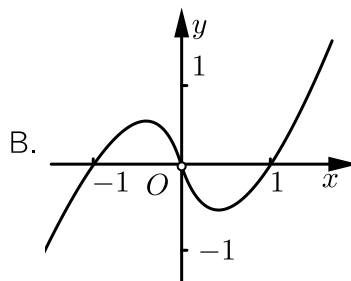
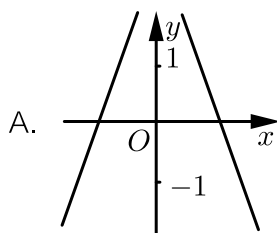
此类题目多出现于选择题部分，题号靠前，难度较低

主要解题办法及思路：**赋值**、**判断奇偶**、**判断单调性**、**判断正负**

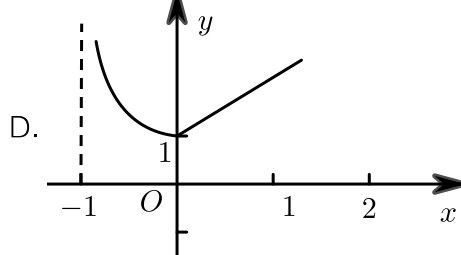
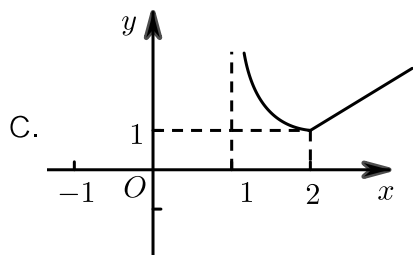
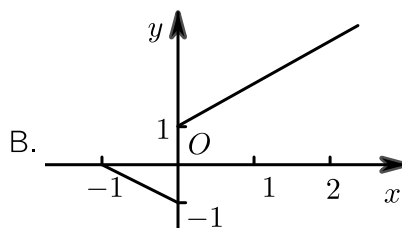
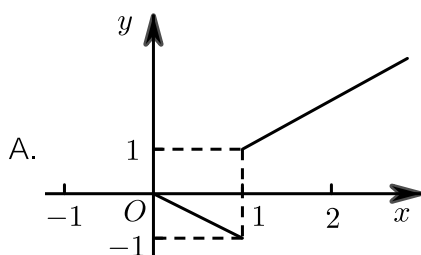
1 函数 $f(x) = e^{|x-1|} - 2\cos(x-1)$ 的部分图象可能是 () .



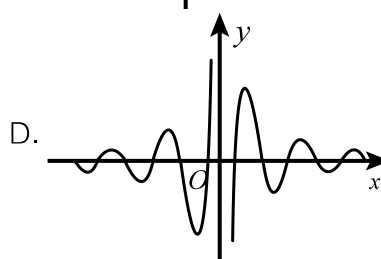
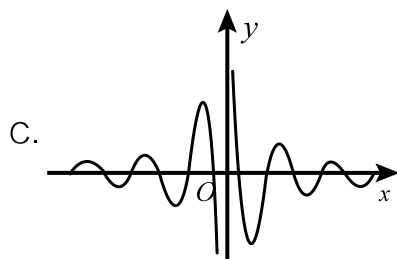
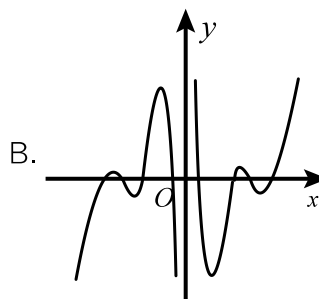
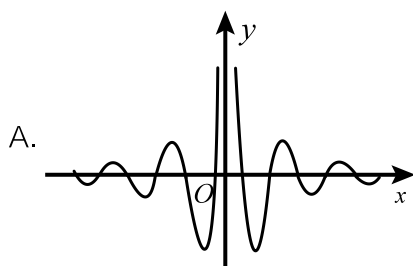
2 函数 $f(x) = (3^x + 3^{-x}) \lg|x|$ 的图象大致为 ().



3 已知函数 $f(x) = e^{|\ln x|}$, 则函数 $y = f(x+1)$ 的图象大致为 ().



4 若函数 $f(x) = \frac{\cos 6x}{2^x - 2^{-x}}$ 的图象大致为 ().





比较大小

- 5 已知函数 $f(x) = \ln \sqrt{x^2 + 1}$, 且 $a = f(0.2^{0.2})$, $b = f(\log_3 4)$, $c = f\left(\log_{\frac{1}{3}} 3\right)$, 则 a, b, c 的大小关系为 ().
- A. $a < b < c$ B. $c < b < a$ C. $c < a < b$ D. $a < c < b$
- 6 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2) = -f(x)$, 且在区间 $[1, 2]$ 上是减函数, 令 $a = \ln 2$, $b = \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$, $c = \log_{\frac{1}{2}} 2$, 则 $f(a), f(b), f(c)$ 的大小关系为 ().
- A. $f(b) < f(c) < f(a)$ B. $f(a) < f(c) < f(b)$
C. $f(c) < f(b) < f(a)$ D. $f(c) < f(a) < f(b)$
- 7 设 a, b, c 均为正数, 且 $2^a = \log_{\frac{1}{2}} a$, $\left(\frac{1}{2}\right)^b = \log_{\frac{1}{2}} b$, $\left(\frac{1}{2}\right)^c = \log_2 c$, 则 ().
- A. $a < b < c$ B. $c < b < a$ C. $c < a < b$ D. $b < a < c$
- 8 设 $a = \log_3 \pi$, $b = \log_2 \sqrt{3}$, $c = \log_3 \sqrt{2}$, 则 ().
- A. $a > b > c$ B. $a > c > b$ C. $b > a > c$ D. $b > c > a$



求解切线方程

- 9 已知函数 $f(x) = 4 \sin x + \frac{1}{3}x^3$ 在 $x = 0$ 处的切线与直线 $nx - y - 6 = 0$ 平行, 则 $\left(x - \frac{2}{x}\right)^n$ 的展开式中常数项为 _____.
- 10 曲线 $y = e^x - \frac{1}{x}$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线的斜率为 _____ 在该点处的切线方程为 _____.



导函数模考常见基础题型



分段函数单调性

- 11 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$, 若函数 $y = f(x+2)$ 为偶函数, 且 $f(x)$ 对任意数 $x_1, x_2 \in [2, +\infty)$ ($x_1 \neq x_2$), 都有 $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$, 若 $f(a) \leq f(3a+1)$, 则实数 a 的取值范围是 ().
- A. $\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$ B. $[-2, -1]$ C. $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$ D. $\left(\frac{3}{4}, +\infty\right)$
- 12 已知函数 $f(x) = \begin{cases} a^{-x}, & x < -1 \\ (1-2a)x + 3a, & x \geq -1 \end{cases}$, 对任意的 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ ($x_1 \neq x_2$), 总有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$ 成立, 则实数 a 的取值范围是 ().
- A. $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ B. $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ C. $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ D. $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$



利用函数性质求解参数值或求解不等式

- 13 函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且当 $x \geq 0$ 时， $f(x) = 2^x + x + a$ (a 为常数)，则 $f(a) =$ () .
- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $-\frac{3}{2}$ D. -2
- 14 已知函数 $f(x) = -x - \log_2 \frac{2+ax}{2-x}$ 为奇函数，则使不等式 $f\left(\frac{1}{m}\right) + \log_2 6 < 0$ 成立的 m 的取值范围是 () .
- A. $(-\infty, 1)$ B. $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ C. $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$ D. $(1, +\infty)$



利用函数周期性进行赋值运算

- 15 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇数 $f(x)$ 满足 $f(x+1) = f(1-x)$ ，且当 $x \in [0, 1]$ 时， $f(x) = 2^x - m$ ，则 $f(2019) =$ () .
- A. 1 B. -1 C. 2 D. -2



函数与方程

此类题目多出现于选择题、填空题最后一题，题号靠前，难度较高

主要题型及解题思路：

- ①分参型函数交点问题：分离参数后，画出不含参函数图像，平移 $y = a$ (参数)，确定解个数；
- ②不分参型函数交点问题：画出不含参函数图像，之后判断等号另一侧含参直线的方程是斜率确定还是过定点型——
- 斜率确定——平移；
- 过定点——绕定点旋转
- ③复合函数型 $y = f(g(x))$ ——将 $g(x)$ 看作一个整体 t 分析 $f(t)$ ，再分析 $t = g(x)$ 的解个数



分参型

- 16 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2x - x^2, & x \geq 0 \\ \frac{1}{x}, & x < 0 \end{cases}$ ，若函数 $g(x) = |f(x)| - x + m$ 恰有三个零点，则实数 m 的取值范围是 () .
- A. $(-\infty, -2) \cup \left(-\frac{1}{4}, 0\right]$ B. $\left[0, \frac{1}{4}\right) \cup (2, +\infty)$
- C. $\left(-2, -\frac{1}{4}\right] \cup [0, +\infty)$ D. $\left(\frac{1}{4}, 2\right) \cup [0, +\infty)$



过定点型

- 17 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & x \leq 0 \\ \frac{2x-4}{x}, & x > 0 \end{cases}$, 若函数 $F(x) = f(x) - |kx - 1|$ 有且只有 3 个零点, 则实数 k 的取值范围 ().
- A. $(0, \frac{9}{16})$ B. $(\frac{9}{16}, +\infty)$
C. $(0, \frac{1}{2})$ D. $(-\frac{1}{16}, 0) \cup (0, \frac{9}{16})$
- 18 已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$ 满足: 当 $x \in (-1, 1]$ 时, $f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{x+1}, & -1 < x \leq 0 \\ 2^{2-x} - 2, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$, 且 $f(x+2) = f(x)$ 对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立. 若函数 $g(x) = f(x) - m(x+1)$ 在区间 $[-1, 5]$ 内有 6 个零点, 则实数 m 的取值范围是 _____.



斜率确定型

- 19 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 1 + \log_a(x+2), & x \geq -1 \\ (x+1)^2 + 4a, & x < -1 \end{cases}$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上为单调函数, 若函数 $g(x) = |f(x)| - |x-2|$ 有三个不同的零点, 则实数 a 的取值范围是 ().
- A. $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ B. $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ C. $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \cup \{\frac{13}{16}\}$ D. $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}] \cup \{\frac{13}{16}\}$



复合函数型

- 20 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \leq 0 \\ |\ln x|, & x > 0 \end{cases}$, 方程 $f[f(x)] = 3$ 的实数根的个数是 ().
- A. 6 B. 3 C. 4 D. 5
- 21 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上单调递增, 且 $f(-1) = -1$. 若 $f(x-1) + 1 \geq 0$, 则 x 的取值范围是 _____; 设函数 $g(x) = \begin{cases} (\sqrt{x}+1)^2 - a - 1, & x > 0 \\ 2^x + x - a + 1, & x \leq 0 \end{cases}$, 若方程 $f(g(x)) + 1 = 0$ 有且只有两个不同的实数解, 则实数 a 的取值范围为 _____.



换元法求解型

- 22 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + \frac{1}{4x^2 + 8x}, & -2 < x < 0 \\ x^2 + 2x - 1, & x \leq -2 \text{ 或 } x \geq 0 \end{cases}$, 若函数 $g(x) = a|f(x)| + 1$ 有 6 个零点, 则实数 a 的取值范围是 _____.



导数解答



恒能成立典型问题

23 已知函数 $f(x) = e^x (\sin x - \cos x + 4)$ ，函数 $g(x) = 2x - \cos x$ ，其中 $e = 2.71828 \dots$ 是自然对数的底数.

- (1) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程.
- (2) 设函数 $h(x) = f(x) - ag(x)$ ($a \in \mathbf{R}$)，讨论 $h(x)$ 的单调性.
- (3) 若对任意 $x \in \left[0, \frac{5\pi}{12}\right]$ ，恒有关于 x 的不等式 $\cos x - \frac{x+m}{e^x} \leq 0$ 成立，求实数 m 的取值范围.



零点存在性定理的应用

24

已知函数 $f(x) = a \ln x + x^2 - (a+2)x$, 其中 $a \in \mathbf{R}$.

- (1) 若曲线 $y = f(x)$ 在点 $(2, f(2))$ 处的切线的斜率为 1, 求 a 的值.
- (2) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性.
- (3) 若函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 在区间 $(1, e)$ 上存在零点, 证明: 当 $x \in (1, e)$ 时, $f(x) > -e^2$.



已知零点信息求参数取值范围

25

已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}ax - a + 1 - \frac{\ln x}{x}$, 其中 $a \in \mathbf{R}$.

- (1) 若 $f(x)$ 为单调递减函数, 求 a 的取值范围.
- (2) 若 $f(x)$ 有两个不同的零点, 求 a 的取值范围.



隐零点 —— 无需对隐零点范围进行估计

26

已知函数 $f(x) = x + a \ln x$, $a \in \mathbb{R}$.

(1) 当 $a = 1$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线方程.

(2) 求函数 $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上的最小值.

(3) 若函数 $F(x) = \frac{1}{x^2}f(x)$, 当 $a = 2$ 时, $F(x)$ 的最大值为 M , 求证: $M < \frac{3}{2}$.



隐零点 —— 需要对隐零点所在区间进行估计

27 已知函数 $f(x) = e^x - e^x \sin x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (e 为自然对数的底数).

- (1) 求函数 $f(x)$ 的值域.
- (2) 若不等式 $f(x) \geq k(x-1)(1-\sin x)$ 对任意 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 恒成立, 求实数 k 的取值范围.
- (3) 证明: $e^{x-1} > -\frac{1}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + 1$.



双变量 —— 韦达定理

28 已知函数 $f(x) = \frac{1}{x} - x + a \ln x$.

- (1) 讨论 $f(x)$ 的单调性.
- (2) 若 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1, x_2 , 证明: $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < a - 2$.



函数的放缩

29 已知 $f(x) = a \sin(1-x) + \ln x$, 其中 $a \in \mathbf{R}$.

(1) 当 $a = 0$ 时, 设函数 $g(x) = f(x) - x^2$, 求函数 $g(x)$ 的极值.

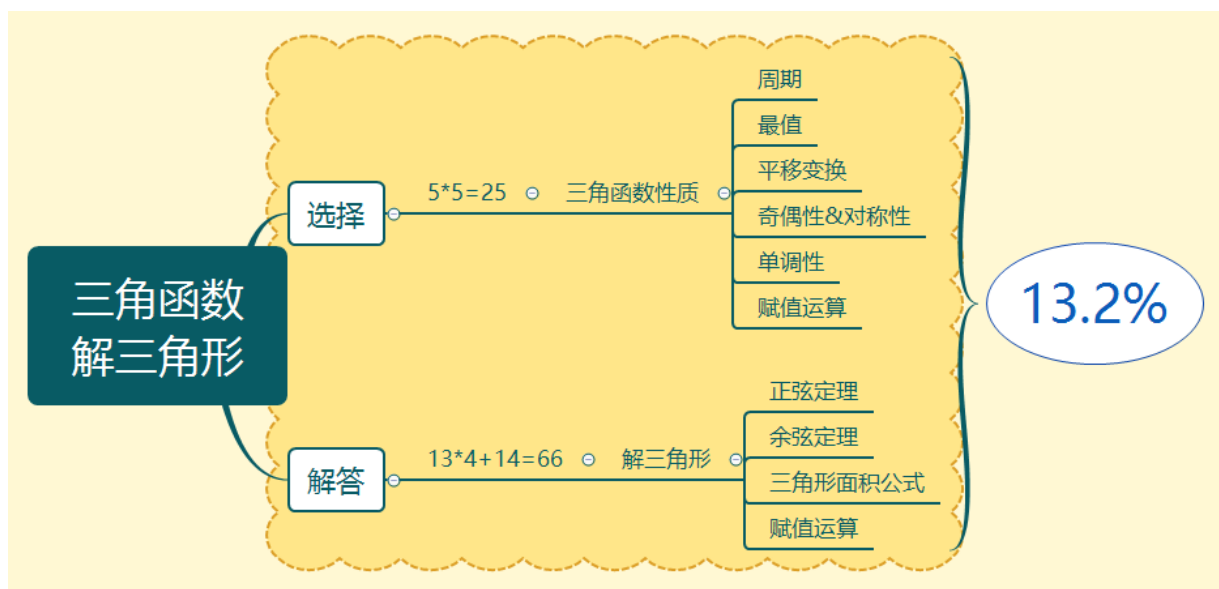
(2) 若函数 $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 上递增, 求 a 的取值范围.

(3) 证明: $\sum_{k=1}^n \sin \frac{1}{(2+k)^2} < \ln 3 - \ln 2$.

第 2 讲

三角函数及解三角形专项复习





三角函数基础性质应用



平移变换

- 要想得到函数 $y = \sqrt{3} \sin\left(x - \frac{\pi}{12}\right)$ 的图象，只需将函数 $y = \sqrt{3} \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ 图象上的所有点的横坐标 ().
 A. 伸长到原来的 2 倍 (纵坐标不变)，再将得到的图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度.
 B. 伸长到原来的 2 倍 (纵坐标不变)，再将得到的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度.
 C. 缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍 (纵坐标不变)，再将得到的图象向左平移 $\frac{5\pi}{24}$ 个单位长度.
 D. 缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍 (纵坐标不变)，再将得到的图象向右平移 $\frac{11\pi}{24}$ 个单位长度.
- 函数 $y = \sin 2x$ 的图象经过怎样的平移变换得到函数 $y = \sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$ 的图象 ().
 A. 向左平移 $\frac{2\pi}{3}$ 个单位长度
 B. 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度
 C. 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度
 D. 向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度



奇偶性、对称性

- 将函数 $y = \sin x - \sqrt{3} \cos x$ 的图象沿 x 轴向右平移 m ($m > 0$) 个单位长度，所得函数的图象关于 y 轴对称，则 m 的最小值是 ().
 A. $-\frac{\pi}{12}$ B. $\frac{\pi}{12}$ C. $-\frac{\pi}{6}$ D. $\frac{\pi}{6}$
- 把函数 $f(x) = A \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ ($A \neq 0$) 的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度，得到函数 $g(x)$ 的图象，若函数 $g(x-m)$ ($m > 0$) 是偶函数，则实数 m 的最小值是 ().
 A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{5\pi}{6}$ C. $\frac{5\pi}{12}$ D. $\frac{\pi}{12}$



确定区间上单调性

- 5 将函数 $f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度后得到函数 $g(x)$ 的图象, 则关于函数 $g(x)$ 的正确结论是 ().
- A. 奇函数, 在 $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ 上单调递减
 B. 最大值为 1, 图象关于直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称
 C. 最小正周期为 π , 图象关于点 $\left(\frac{3\pi}{8}, 0\right)$ 对称
 D. 偶函数, 在 $\left(-\frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right)$ 上单调递增



综合判断

- 6 设函数 $f(x) = \sqrt{3}\cos 2x + 2\sin x \cos x$, 给出下列结论:
- ① $f(x)$ 的最小正周期为 π ;
 ② $y = f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{12}$ 对称;
 ③ $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right]$ 单调递减;
 ④ 把函数 $y = 2\cos 2x$ 的图象上所有点向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度, 可得到函数 $y = f(x)$ 的图象.
 其中所有正确结论的编号是 ().
- A. ①④ B. ②④ C. ①②④ D. ①②③
- 7 已知函数 $f(x) = \sin x + \cos x$, 下列结论错误的是 ().
- A. $f(x)$ 的最小正周期为 2π B. $y = f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{5\pi}{4}$ 对称
 C. $\frac{7\pi}{4}$ 是 $f(x)$ 的一个零点 D. $f(x)$ 在区间 $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ 单调递减
- 8 关于函数 $f(x) = \cos x + \sin |x|$ 有下述四个结论:
- ① $f(x)$ 的周期为 2π ;
 ② $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{5\pi}{4}\right]$ 上单调递增;
 ③ 函数 $y = f(x) - 1$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上有 3 个零点;
 ④ 函数 $f(x)$ 的最小值为 $-\sqrt{2}$.
 其中所有正确结论的编号为 ().
- A. ①② B. ②③ C. ③④ D. ②④

9 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$)，其图象相邻两条对称轴之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$ ，且函数 $g(x) = f\left(x + \frac{\pi}{12}\right)$ 是偶函数。关于函数 $f(x)$ 给出下列命题：

- ①函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = -\frac{5\pi}{12}$ 轴对称；
- ②函数 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(-\frac{\pi}{6}, 0\right)$ 中心对称；
- ③函数 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{12}\right]$ 上单调递减；
- ④把函数 $y = \sin x$ 的图象上所有点的横坐标变为原来的 $\frac{1}{2}$ ，然后再将所得的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 单位长度，即可得到函数 $y = f(x)$ 的图象。

其中真命题共有 () 个。

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4



三角函数解答

10 已知函数 $f(x) = 2\sqrt{3} \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \cos^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - \sin(x + \pi)$ 。

- (1) 求 $f(x)$ 的定义域和最小正周期。
- (2) 若将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位，得到函数 $g(x)$ 的图象，求函数 $g(x)$ 在区间 $[0, \pi]$ 上的最大值和最小值。

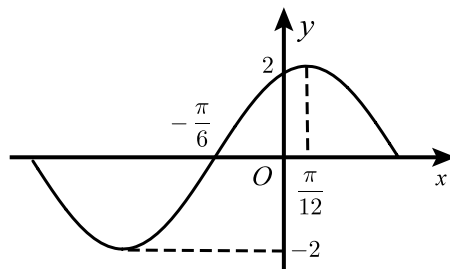


三角函数的图像性质

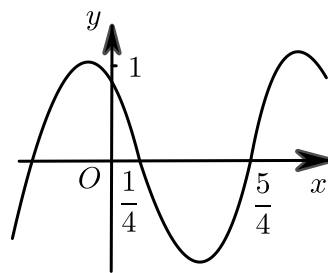


根据已知图像确定周期和相位参数

- 11 将函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的图象上所有点向左平行移动 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度, 所得函数的部分图象如图所示, 则 $f(x) =$ _____.



- 12 函数 $f(x) = \cos(\omega x + \varphi)$ 的部分图象如图所示, 则 $f(x)$ 的单调递减区间为 ().



- A. $\left(k\pi - \frac{1}{4}, k\pi + \frac{3}{4}\right), k \in \mathbf{Z}$
 B. $\left(2k\pi - \frac{1}{4}, 2k\pi + \frac{3}{4}\right), k \in \mathbf{Z}$
 C. $\left(k - \frac{1}{4}, k + \frac{3}{4}\right), k \in \mathbf{Z}$
 D. $\left(2k - \frac{1}{4}, 2k + \frac{3}{4}\right), k \in \mathbf{Z}$



利用题目分析出图像情况

- 13 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \theta)$, 其中 $\omega > 0, \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 其图象关于直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 对称, 对满足 $|f(x_1) - f(x_2)| = 2$ 的 x_1, x_2 , 有 $|x_1 - x_2|_{\min} = \frac{\pi}{2}$, 将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得到函数 $g(x)$ 的图象, 则函数 $g(x)$ 的单调递减区间是 ().

- A. $\left[k\pi - \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right] (k \in \mathbf{Z})$
 B. $\left[k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}\right] (k \in \mathbf{Z})$
 C. $\left[k\pi + \frac{\pi}{3}, k\pi + \frac{5\pi}{6}\right] (k \in \mathbf{Z})$
 D. $\left[k\pi + \frac{\pi}{12}, k\pi + \frac{7\pi}{12}\right] (k \in \mathbf{Z})$

- 14 设函数 $f(x) = 2 \sin(\omega x + \varphi)$, 其中 $\omega > 0, |\varphi| < \pi$, 若 $f\left(\frac{5\pi}{8}\right) = 2, f\left(\frac{11\pi}{8}\right) = 0$, 且 $f(x)$ 的最小正周期大于 2π , 则 ().

- A. $\omega = \frac{1}{3}, \varphi = -\frac{11\pi}{24}$
 B. $\omega = \frac{2}{3}, \varphi = -\frac{11\pi}{12}$
 C. $\omega = \frac{2}{3}, \varphi = \frac{\pi}{12}$
 D. $\omega = \frac{1}{3}, \varphi = \frac{7\pi}{24}$

21 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c 且 $2a - c = 2b \cos C$.

(1) 求 $\sin\left(\frac{A+C}{2} + B\right)$ 的值.

(2) 若 $b = \sqrt{3}$, 求 $c - a$ 的取值范围.



解三角形解答

22 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且满足 $c \sin A = a \sin\left(C + \frac{\pi}{3}\right)$.

(1) 求角 C 的大小.

(2) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $3\sqrt{3}$, $a - b = 1$, 求 c 和 $\cos(2A - C)$ 的值.



23 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 满足 $b^2 + c^2 - a^2 = c(a \cos C + c \cos A)$.

(1) 求角 A 的大小.

(2) 若 $\cos B = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 求 $\sin(2B + A)$ 的值.

(3) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$, $a = 3$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

24 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 已知 $3(a - c)^2 = 3b^2 - 2ac$.

(1) 求 $\cos B$ 的值.

(2) 若 $5a = 3b$, ①求 $\sin A$ 的值. ②求 $\sin\left(2A + \frac{\pi}{6}\right)$ 的值.

25 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $2a \sin A = (2b + c) \sin B + (b + 2c) \sin C$.

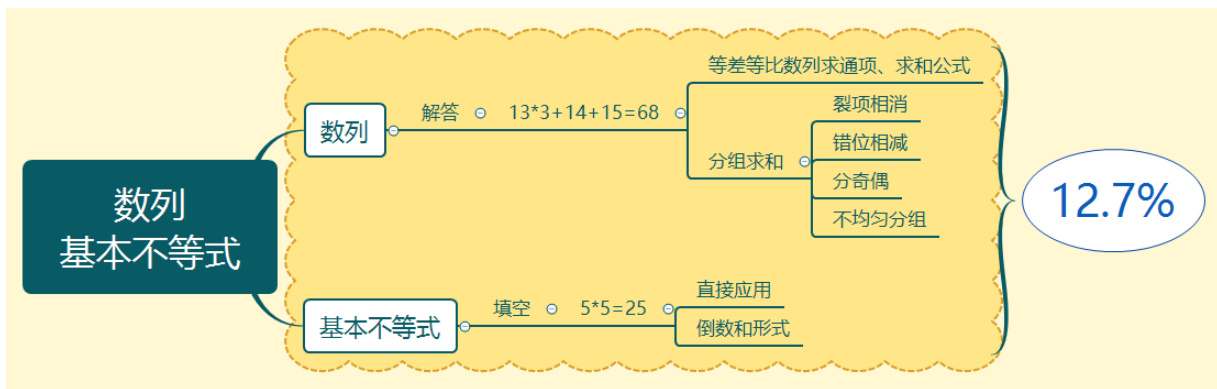
(1) 求角 A 的大小.

(2) 若 $a = 2\sqrt{3}$, 求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

第 3 讲

数列、基本不等式专项复习





数列



数列性质在选填题中的应用

- 1 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n = n^2 \sin(\frac{2n+1}{2}\pi)$, 则 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{12} = (\quad)$.
A. 0 B. 55 C. 66 D. 78

- 2 等比数列 $\{a_n\}$ 的首项为 2, 项数为奇数, 其奇数项之和为 $\frac{85}{32}$, 偶数项之和为 $\frac{21}{16}$, 这个等比数列前 n 项和的积为 $T_n (n \geq 2)$, 则 T_n 的最大值为 $(\quad)$.
A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. 2

- 3 已知实数 a, b 满足条件: $ab < 0$, 且 1 是 a^2 与 b^2 的等比中项, 又是 $\frac{1}{a}$ 与 $\frac{1}{b}$ 的等差中项, 则 $\frac{a+b}{a^2+b^2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

- 4 已知数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 均为等差数列, 前 n 项和分别为 S_n, T_n , 且满足: $\forall n \in \mathbf{N}^*, \frac{S_n}{T_n} = \frac{n+3}{2n+1}$, 则 $\frac{a_1 + a_6 + a_{14} + a_{19}}{b_5 + b_8 + b_{12} + b_{15}} = \underline{\hspace{2cm}}$.



错位相减求和

5 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_4 = 4S_2$, $a_{2n} = 2a_n + 1$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 设数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 且 $T_n + \frac{a_n + 1}{2^n} = \lambda$ (λ 为常数). 令 $c_n = b_{2n}$ ($n \in \mathbf{N}^*$). 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 R_n .

6 已知数列 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等比数列, 数列 $\{b_n\}$ 为等差数列, 且 $b_1 = a_1 = 1$, $b_3 = a_3 + 1$, $b_5 = a_5 - 7$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 求数列 $\{a_n b_n\}$ 的前 n 项和 A_n .

(3) 设 S_n 为数列 $\{a_n^2\}$ 的前 n 项和, 若对于任意 $n \in \mathbf{N}^*$, 有 $S_n + \frac{1}{3} = t \cdot 2^{b_n}$, 求实数 t 的值.



7 已知数列 $\{a_n\}$ 满足条件 $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, 且 $a_{n+2} = (-1)^n(a_n - 1) + 2a_n + 1$, $n \in \mathbf{N}^*$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 设 $b_n = \frac{a_{2n-1}}{a_{2n}}$, S_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和, 求证: $S_n \geq \frac{2^n - n}{2^n + 1}$.



分段数列通项求解 (分奇偶)

8 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, 且 $[3 + (-1)^n]a_{n+2} - 2a_n + 2[(-1)^n - 1] = 0$, $n \in \mathbf{N}^*$.

(1) 求 a_3 , a_4 , a_5 , a_6 的值及数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 设 $b_n = a_{2n-1} \cdot a_{2n}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n .



裂项相消

9 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $2S_n = 3a_n + 4n - 7, n \in \mathbf{N}^*$.

(1) 证明: 数列 $\{a_n - 2\}$ 是等比数列.

(2) 若 $b_n = \frac{a_n - 2}{(a_{n+1} - 1)(a_n - 1)}, n \in \mathbf{N}^*$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

10 等比数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, $2a_5, a_4, 4a_6$ 成等差数列, 且满足 $a_4 = 4a_3^2$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = \frac{(n+1)b_n}{2}, n \in \mathbf{N}^*$, 且 $b_1 = 1$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 设 $c_n = \frac{b_{2n+5}}{b_{2n+1}b_{2n+3}}a_n, n \in \mathbf{N}^*$, 求证: $\sum_{k=1}^n c_k < \frac{1}{3}$.



11 已知数列 $\{a_n\}$ 是递增的等比数列, 且 $a_1 + a_4 = 9$, $a_2 a_3 = 8$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式

(2) 设 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $b_n = \frac{a_{n+1}}{S_n S_{n+1}}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .



分组求和

12 已知数列 $\{a_n\}$ 是公差为 1 的等差数列, 数列 $\{b_n\}$ 是等比数列, 且 $a_3 + a_4 = a_7$, $b_2 \cdot b_4 = b_5$,

$$a_4 = 4b_2 - b_3, \text{ 数列 } \{c_n\} \text{ 满足: } c_n = \begin{cases} b_{2m-1}, n = 3m - 2 \\ b_{2m}, n = 3m - 1 \\ a_m, n = 3m \end{cases}, \text{ 其中 } m \in \mathbf{N}^*.$$

(1) 求数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 记 $t_n = c_{3n-2}c_{3n-1} + c_{3n-1}c_{3n} + c_{3n}c_{3n+1}$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 求数列 $\{t_n\}$ 的前 n 项和.

- 13 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $a_1 = 2$ ， $S_5 = 30$ ，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ，且 $T_n = 2^n - 1$ 。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 的通项公式。

(2) 设 $c_n = \frac{b_n}{(b_n + 1)(b_{n+1} + 1)}$ ，数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 M_n ，求 M_n 。

(3) 设 $d_n = (-1)^n (a_n b_n + \ln S_n)$ ，求数列 $\{d_n\}$ 的前 n 项和。



分段数列求和

14 设 $\{a_n\}$ 是等比数列, 公比大于 0, $\{b_n\}$ 是等差数列, $(n \in \mathbf{N}^*)$. 已知 $a_1 = 1$, $a_3 = a_2 + 2$, $a_4 = b_3 + b_5$, $a_5 = b_4 + 2b_6$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 设数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_1 = c_2 = 1$, $c_n = \begin{cases} 1, & 3^k < n < 3^{k+1} \\ a_k, & n = 3^k \end{cases}$, 其中 $k \in \mathbf{N}^*$.

①求数列 $\{b_{3^n} (c_{3^n} - 1)\}$ 的通项公式.

②若 $\left\{ \frac{na_n}{(n+1)(n+2)} \right\} (n \in \mathbf{N}^*)$ 的前 n 项和 T_n , 求 $T_{3^n} + \sum_{i=1}^{3^n} b_i c_i (n \in \mathbf{N}^*)$.

- 15 设 $\{a_n\}$ 是等比数列的公比大于 0，其前 n 项和为 S_n ， $\{b_n\}$ 是等差数列，已知 $a_1 = 1$ ， $a_3 = a_2 + 2$ ， $a_4 = b_3 + b_5$ ， $a_5 = b_4 + 2b_6$.
- (1) 求 $\{a_n\}$ ， $\{b_n\}$ 的通项公式.
- (2) 设 $c_n = \frac{a_n}{(a_n + 1)(a_{n+1} + 1)}$ ，数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ，求 T_n .
- (3) 设 $d_n = \begin{cases} b_n, n \neq 2^k \\ b_n(\log_2 b_n + 1), n = 2^k \end{cases}$ ，其中 $k \in \mathbf{N}^*$ ，求 $\sum_{i=1}^{2^n} d_i$.



数列的函数性质

16 已知数列 $\{a_n\}$ 是公差为 0 的等差数列, $a_1 = \frac{3}{2}$, 数列 $\{b_n\}$ 是等比数列, 且 $b_1 = a_1$, $b_2 = -a_3$, $b_3 = a^4$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n .

(1) 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 设 $c_n = \begin{cases} b_n, & n \leq 5 \\ 8a_n, & n \geq 6 \end{cases}$, ($n \in \mathbf{N}^*$). 求 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

(3) 若 $A \leq S_n - \frac{1}{S_n} \leq B$ 对 $n \in \mathbf{N}^*$ 恒成立, 求 $B - A$ 的最小值.

17 设各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 + a_3 = 10$, $a_3 + a_5 = 40$, $b_n = \log_2 a_n$.

(1) 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 若 $c_1 = 1$, $c_{n+1} = c_n + \frac{b_n}{a_n}$, 求证: $c_n < 3$.

(3) 是否存在正整数 k , 使得 $\frac{1}{b_n + 1} + \frac{1}{b_n + 2} + \cdots + \frac{1}{b_n + n} > \frac{k}{10}$ 对任意正整数 n 均成立? 若存在, 求出 k 的最大值, 若不存在, 说明理由.



放缩

18 设 $\{a_n\}$ 是各项都为整数的等差数列, 其前 n 项和为 S_n , $\{b_n\}$ 是等比数列, 且 $a_1 = b_1 = 1$, $a_3 + b_2 = 7$, $S_5 b_2 = 50$, $n \in \mathbf{N}^*$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 设 $c_n = \log_2 b_1 + \log_2 b_2 + \log_2 b_3 + \cdots + \log_2 b_n$, $T_n = a_{c_n+1} + a_{c_n+2} + a_{c_n+3} + \cdots + a_{c_n+n}$.

①求 T_n .

②求证: $\sum_{i=2}^n \frac{1}{\sqrt{T_i - i}} < 2$.



基本不等式



配凑及 1 的代换

19 已知 $a > 0, b > 0$, 且 $\frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+2} = \frac{1}{6}$, 则 $a+b$ 的最小值为 _____.

20 已知 $a > 0, b > 0$, 且 $\frac{3}{a+2} + \frac{3}{b+2} = 1$, 则 $a+2b$ 的最小值为 _____.



换元法 / 配凑法

21 已知实数 x, y 满足 $x > y > 0$, 则 $\frac{4x+2y}{x+y} + \frac{x+y}{x-y}$ 的取值范围是 _____.

22 若正实数 x, y 满足 $x+2y=5$, 则 $\frac{x^2-3}{x+1} + \frac{2y^2-1}{y}$ 的最大值是 _____.



1 的代换 (数化为式)

23 已知正数 a, b 满足 $ab=1$, 则 $\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a}$ 的最小值为 _____.

24 已知 a, b 均为正数, 且 $a+b=1$, 则 $\frac{a^2+1}{2ab} - 1$ 的最小值为 _____.

25 若 $x > 0, y > 0$, 且 $x+2y=1$, 则 $\frac{y}{x+y} + \frac{1}{2y}$ ().

A. 有最大值为 $\frac{7}{3}$

B. 有最小值为 $\sqrt{2} + \frac{1}{2}$

C. 有最小值为 2

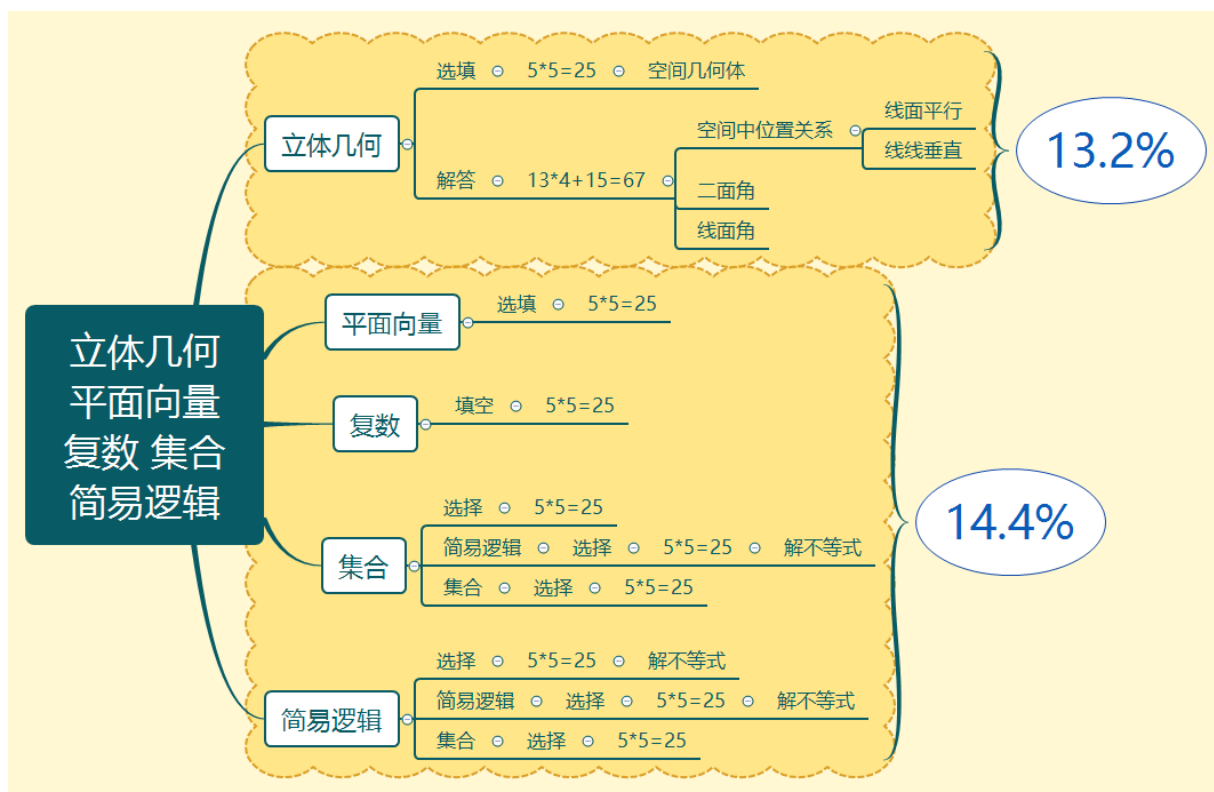
D. 无最小值



第 4 讲

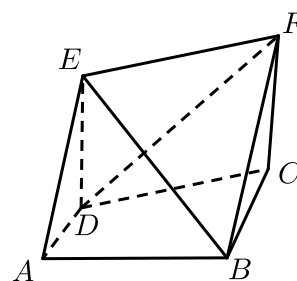
立体几何、平面向量、 复数专项复习





立体几何解答

- 1 如图所示，直角梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $AD \perp AB$ ， $AB = BC = 2AD = 2$ ，四边形 $EDCF$ 为矩形， $CF = \sqrt{3}$ ，平面 $EDCF \perp$ 平面 $ABCD$ 。
- 求证： $DF \parallel$ 平面 ABE 。
 - 求平面 ABE 与平面 EFB 所成锐二面角的余弦值。
 - 在线段 DF 上是否存在点 P ，使得直线 BP 与平面 ABE 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ，若存在，求出线段 BP 的长，若不存在，请说明理由。

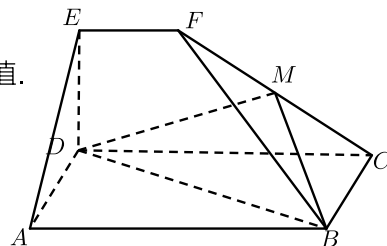


- 2 如图所示, 平面 $CDEF \perp$ 平面 $ABCD$, 且四边形 $ABCD$ 为平行四边形, $\angle DAB = 45^\circ$, 四边形 $CDEF$ 为直角梯形, $EF \parallel DC$, $ED \perp CD$, $AB = 3EF = 3$, $ED = a$, $AD = \sqrt{2}$.

(1) 求证: $AD \perp BF$.

(2) 若线段 CF 上存在一点 M , 满足 $AE \parallel$ 平面 BDM , 求 $\frac{CM}{CF}$ 的值.

(3) 若 $a = 1$, 求二面角 $D-BC-F$ 的余弦值.

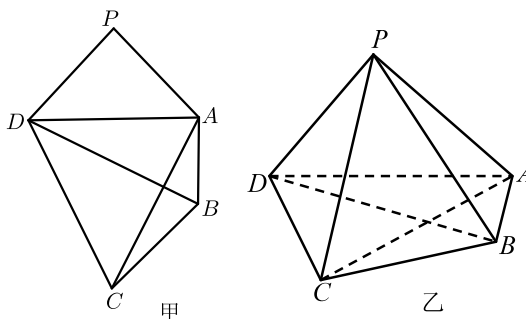


- 3 如图甲的平面五边形 $PABCD$ 中, $PD = PA$, $AC = CD = BD = \sqrt{5}$, $AB = 1$, $AD = 2$, $PD \perp PA$, 现将图甲中的 $\triangle PAD$ 沿 AD 边折起, 使平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$ 得图乙的四棱锥 $P-ABCD$, 在图乙中.

(1) 求证: $PD \perp$ 平面 PAB .

(2) 求二面角 $A-PB-C$ 的大小.

(3) 在棱 PA 上是否存在点 M 使得 BM 与平面 PCB 所成的角的正弦值为 $\frac{1}{3}$? 并说明理由.



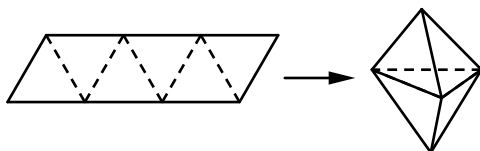


空间几何体

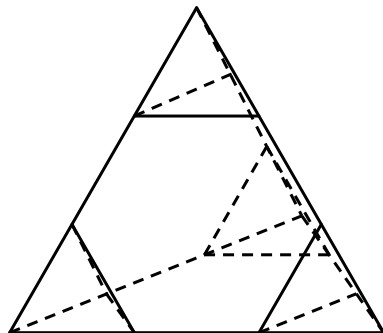


几何体体积、表面积

- 4 农历五月初五是端午节，民间有吃粽子的习惯，粽子又称粽粿，俗称“粽子”，古称“角黍”，是端午节大家都会品尝的食品，传说这是为了纪念战国时期楚国大臣、爱国主义诗人屈原如图，平行四边形形状的纸片是由六个边长为 1 的正三角形构成的，将它沿虚线折起来，可以得到如图所示粽子形状的六面体，则该六面体的体积为 _____；若该六面体内有一球，则该球体积的最大值为 _____。



- 5 已知正四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是边长为 $\sqrt{2}$ 的正方形，其体积为 $\frac{4}{3}$ ，若圆柱的一个底面的圆周经过正方形的四个顶点，另一个底面的圆心为该棱锥的高的中点，则该圆柱的表面积为 ()。
- A. π B. 2π C. 4π D. 6π
- 6 半正多面体亦称“阿基米德多面体”，是由边数不全相同的正多边形为面组成的多面体。如将正四面体所有棱各三等分，沿三等分点从原几何体割去四个小正四面体如图所示，余下的多面体就成为一个半正多面体，若这个半正多面体的棱长为 2，则这个半正多面体的体积为 _____。

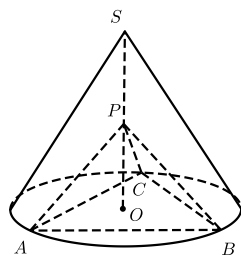


外接球

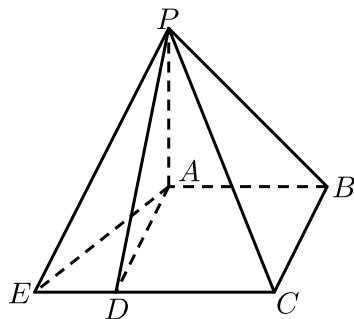
- ①构造直角三角形
- ②补长方体
- ③建系

- 7 在三棱锥 $P-ABC$ 中， $PA \perp$ 平面 ABC ，且 $\triangle ABC$ 为等边三角形， $AP = AB = 2$ ，则三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的表面积为 ()。
- A. $\frac{27}{2}\pi$ B. $\frac{28}{3}\pi$ C. $\frac{26}{3}\pi$ D. $\frac{25}{2}\pi$

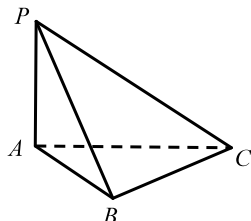
- 8 在三棱锥 $D-ABC$ 中, $CD \perp$ 底面 ABC , $AC \perp BC$, $AB = BD = 5$, $BC = 4$, 则此三棱锥的外接球的表面积为 _____.
- 9 已知四面体 $ABCD$ 的每个顶点在一个球面上, AB, AC, AD 两两垂直, 且 $AB = 1$, $AC = 2$, $AD = 3$, 则四面体 $ABCD$ 的体积为 _____, 这个球的表面积为 _____.
- 10 正四棱锥的顶点都在同一球面上. 若该棱锥的高为 4, 底面边长为 2, 则该球的表面积为 _____.
- 11 如图, 在圆锥 SO 中, $SO = \sqrt{2}$, 圆锥的侧面积为 $\sqrt{3}\pi$, $\triangle ABC$ 是圆锥底面圆 O 的内接正三角形, P 为 SO 上一点, 且 $\angle APC = 90^\circ$, 则圆锥 SO 的体积为 _____, 三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的表面积为 _____.



- 12 已知两个圆锥有公共底面, 且两圆锥的顶点和底面的圆周都在同一个球面上. 若圆锥底面面积是这个球面面积的 $\frac{3}{16}$, 则这两个圆锥中, 体积较小者的高与体积较大者的高的比值为 _____.
- 13 中国古代数学经典《九章算术》系统地总结了战国、秦、汉时期的数学成就, 书中将底面为长方形且有一条侧棱与底面垂直的四棱锥称之为阳马, 将四个面都为直角三角形的三棱锥称之为鳖臑. 如图为一个阳马与一个鳖臑的组合体, 已知 $PA \perp$ 平面 $ABCE$, 四边形 $ABCD$ 为正方形, $AD = 2$, $ED = 1$, 若鳖臑 $P-ADE$ 的外接球的体积为 $\frac{9\pi}{2}$, 则阳马 $P-ABCD$ 的外接球的表面积等于 _____.



- 14 如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA \perp$ 平面 ABC , $AB \perp BC$, $PA = 1$, $AB = 2$, $BC = 3$, 则三棱锥 $P-ABC$ 外接球的表面积为 _____.



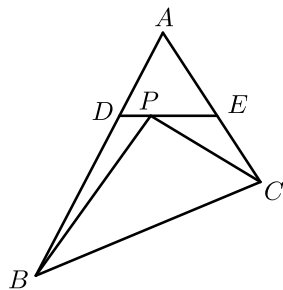


平面向量



基底法

- 15 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 3$, $AC = 2$, $\angle BAC = 60^\circ$, D, E 分别是边 AB, AC 的中点, $AE = 1$, 且 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}$, 则 $|\overrightarrow{AD}| =$ _____, 若 P 是线段 DE 上的一个动点, 则 $\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{CP}$ 的最小值为 _____.



- 16 在平行四边形 $ABCD$ 中, $AD = 1$, $\angle BAD = \frac{\pi}{3}$, 点 E, F 在 CD 上, 且满足 $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DC}$, 若 M 为 AB 的中点, 且 $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{ME} = 1$, 则 AB 的长为 _____.
- 17 已知菱形 $ABCD$ 的边长为 2, $\angle BAD = 120^\circ$, 点 E, F 分别在边 BC, CD 上, $\overrightarrow{BE} = \lambda \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DF} = \mu \overrightarrow{DC}$, 若 $2\lambda + \mu = \frac{5}{2}$, 则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF}$ 的最小值 _____.



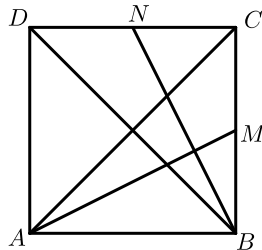
坐标法

- 18 在梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $\angle DAB = 90^\circ$, $AB = 2$, $CD = AD = 1$, 若点 M 在线段 BD 上, 则 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CM}$ 的最小值为 ().
- A. $\frac{3}{5}$ B. $-\frac{9}{20}$ C. $-\frac{3}{5}$ D. $\frac{9}{20}$
- 19 在菱形 $ABCD$ 中, $\angle BAD = \frac{2\pi}{3}$, $AB = 2$, 点 M, N 分别为 BC, CD 边上的点, 且满足 $\frac{|\overrightarrow{BM}|}{|\overrightarrow{BC}|} = \frac{|\overrightarrow{CN}|}{|\overrightarrow{CD}|}$, 则 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN}$ 的最小值为 _____.
- 20 梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $AB = 4$, $AD = 3$, $CD = 2$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 6$, 若 M 为线段 AD 上的一点, 则 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BM}$ 的最大值为 _____.
- 21 在梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $\angle DAB = 90^\circ$, $AB = 2$, $CD = AD = 1$, 若点 M 在线段 BD 上, 则 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CM}$ 的最小值为 _____.

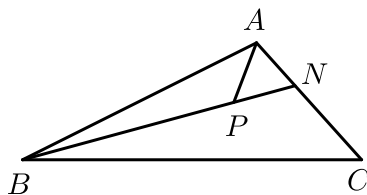


基底表示的唯一性

- 22 如图，在边长为 1 的正方形 $ABCD$ 中， M, N 分别是 BC, CD 的中点，则 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC} = \underline{\hspace{2cm}}$ ，若 $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AM} + \mu \overrightarrow{BN}$ ，则 $\lambda + \mu = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



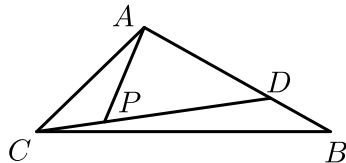
- 23 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3} \overrightarrow{NC}$ ， P 是 BN 上的一点，若 $\overrightarrow{AP} = m \overrightarrow{AB} + \frac{2}{9} \overrightarrow{AC}$ ，则实数 m 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。



三点共线

- 24 在 $\triangle ABC$ 中， D 在线段 BC 上，且 $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{DC}$ ， $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AC}$ ， $\overrightarrow{AN} = \mu \overrightarrow{AB}$ ， λ, μ 均为非零实数，若 N, D, M 三点共线，则 $\frac{2}{\lambda} + \frac{1}{\mu} = (\quad)$ 。
- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

- 25 如图在 $\triangle ABC$ 中， $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{DB}$ ， P 为 CD 上一点，且 $\overrightarrow{AP} = m \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$ ，则 m 的值为 $(\quad)$ 。



- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{5}$



复数



相等条件

26 若 $\frac{a}{1+i} = 1+bi$, 其中 a, b 都是实数, i 是虚数单位, 则 $|a+bi| = \underline{\hspace{2cm}}$.



运算

27 若复数 z 满足 $\bar{z} - |z| = -1 - 3i$, 其中 i 为虚数单位, 则 $z = (\quad)$.

- A. $4+3i$ B. $3+4i$ C. $-5+3i$ D. $4-3i$

28 设 i 是虚数单位, 若复数 z 满足 $(z-2)i = \sqrt{3}-i$, 则 $z = (\quad)$.

- A. $1-\sqrt{3}i$ B. $1+\sqrt{3}i$ C. $1-3i$ D. $1+3i$

29 已知复数 $z = \frac{5i}{2-i} + 5i$, 则 $|z| = \underline{\hspace{2cm}}$.



实部 / 虚部

30 若复数 $\frac{1+2ai}{2-i}$ (i 为虚数单位) 的实部与虚部相等, 则实数 a 的值为 $(\quad)$.

- A. $\frac{1}{6}$ B. $-\frac{1}{6}$ C. 1 D. -1

31 已知 i 为虚数单位, 若复数 $z = \frac{1+ai}{2-i}$ ($a \in \mathbf{R}$) 的实部为 -1 , 则 $|z| = (\quad)$.

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\sqrt{2}$ C. $\frac{5}{3}$ D. $\sqrt{10}$



实数 / 纯虚数

32 i 是虚数单位, 若复数 $(1-2i)(a+i)$ 是纯虚数, 则实数 a 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

33 设 $a \in \mathbf{R}$, 若 $\frac{a}{1+i} + 1+i$ 是实数, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.



复数几何意义

34 若复数 z 满足 $(1-2i)z = -\frac{1}{2}(2+i)$, 其中 i 为虚数单位, 则 z 的共轭复数在复平面内对应点的坐标为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

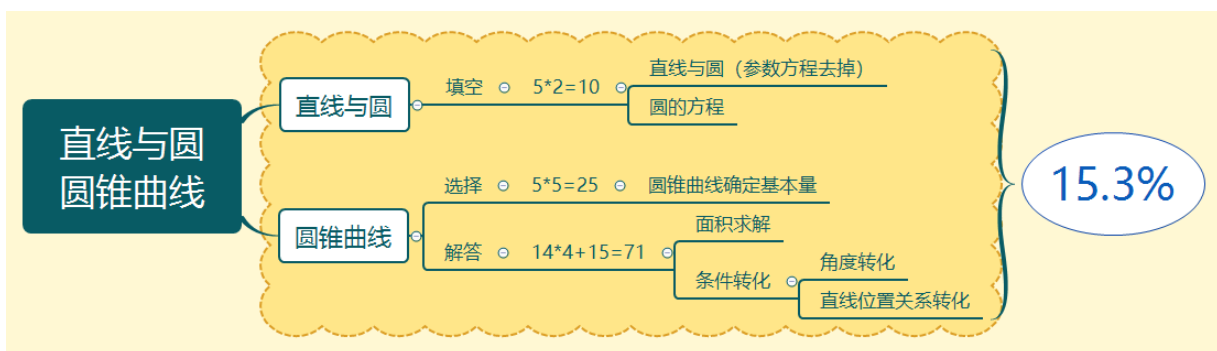
35 已知复数 $z = a+2i$ ($a \in \mathbf{R}$) 的共轭复数为 $\bar{z}$, 且 $z+\bar{z} = 2$, 则复数 $\frac{|z|}{2-ai}$ 在复平面内对应点位于 $(\quad)$.

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

第 5 讲

曲线性质选填 + 椭圆解答专项复习





直线与圆



直线与圆的位置关系

- 1 已知圆 $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 13 = 0$ 的圆心到直线 $ax + y - 1 = 0$ 的距离为 1, 则 a 的值为 ().
A. $\sqrt{3}$ B. $-\frac{3}{4}$ C. 2 D. $-\frac{4}{3}$
- 2 过点 $(-\sqrt{3}, 1)$ 的直线 l 与圆 $x^2 + y^2 = 4$ 相切, 则直线 l 在 y 轴上的截距为 ____.
- 3 已知直线 $x + y + 5 = 0$ 与圆 $x^2 + y^2 + 4x - 2y + m = 0$ 相交于 A, B 两点, 若 $|AB| = 2$, 则实数 $m =$ ____.



与圆锥曲线基本量结合

- 4 若经过抛物线 $y^2 = 4x$ 焦点的直线 l 与圆 $(x - 4)^2 + y^2 = 4$ 相切, 则直线 l 的斜率为 ____.
- 5 设双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一个焦点为 $F(c, 0) (c > 0)$, 且离心率等于 $\sqrt{5}$, 若该双曲线的一条渐近线被圆 $x^2 + y^2 - 2cx = 0$ 截得的弦长为 $2\sqrt{5}$, 则该双曲线的标准方程为 ().
A. $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$ B. $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{100} = 1$ C. $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{20} = 1$ D. $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{25} = 1$
- 6 已知圆 $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$ 关于双曲线 $C: \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一条渐近线对称, 则双曲线 C 的离心率为 ().
A. $\sqrt{5}$ B. 5 C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ D. $\frac{5}{4}$



圆锥曲线选填



利用定义求解基本量

- 7 已知抛物线 $\frac{1}{20}x^2 = y$ 的焦点 F 与双曲线 $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的一个焦点重合, 且点 F 到双曲线的渐近线的距离为 4, 则双曲线的方程为 ().
- A. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ B. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{41} = 1$ C. $\frac{y^2}{41} - \frac{x^2}{16} = 1$ D. $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$
- 8 已知抛物线 $x^2 = 20y$ 的焦点 F 与双曲线 $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的一个焦点重合, 且点 F 到双曲线的渐近线的距离为 4, 则双曲线的方程为 ().
- A. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ B. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{41} = 1$ C. $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$ D. $\frac{y^2}{41} - \frac{x^2}{16} = 1$
- 9 已知 $a > b > 0$, 曲线 C_1 的方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 曲线 C_2 的方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, C_1 与 C_2 的离心率之积为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$, 则 C_2 的渐近线方程为 ().
- A. $\sqrt{3}x \pm y = 0$ B. $x \pm \sqrt{3}y = 0$ C. $3x \pm y = 0$ D. $x \pm 3y = 0$
- 10 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的左顶点与抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点的距离为 4, 且双曲线的一条渐近线与抛物线的准线的交点坐标为 $(-2, -1)$, 则双曲线的焦距为 ().
- A. $2\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{3}$ C. 4 D. $2\sqrt{5}$
- 11 已知 F_1, F_2 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的左、右焦点, M 为双曲线左支上一点, 且满足 $|MF_1| = 2|F_1F_2|$, 若 $\cos \angle MF_1F_2 = -\frac{5}{16}$, 则该双曲线的离心率为 ().
- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. $\frac{9}{2}$
- 12 已知双曲线 $M: \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 . 若双曲线 M 的右支上存在点 P , 使 $\frac{1}{\sin \angle PF_1F_2} = \frac{c}{\sin \angle PF_2F_1}$, 并且 $PF_2 = 2$ 则双曲线 M 的离心率为 ().
- A. $\sqrt{2}$ B. $\frac{\sqrt{6}}{2}$ C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{4}{3}$



直线与圆锥曲线的位置关系

- 13 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{3} = 1 (a > 0)$ 的右焦点为 F , 圆 $x^2 + y^2 = c^2$ (c 为双曲线的半焦距) 与双曲线 C 的一条渐近线交于 A, B 两点, 且线段 AF 的中点 M 落在另一条渐近线上, 则双曲线 C 的方程是 ().
- A. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$ B. $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{3} = 1$ C. $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3} = 1$ D. $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$
- 14 已知 F 为抛物线 $C: y^2 = 3x$ 的焦点, 过 F 且倾斜角为 30° 的直线交 C 于 A, B 两点, 则 $|AB| = ()$.
- A. $\frac{\sqrt{30}}{3}$ B. 6 C. 12 D. $7\sqrt{3}$
- 15 设抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 $F(1, 0)$, 准线为 l , 过焦点的直线交抛物线于 A, B 两点, 分别过 A, B 作 l 的垂线, 垂足为 C, D , 若 $|AF| = 4|BF|$, 则 $p = \underline{\hspace{2cm}}$, 三角形 CDF 的面积为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
- 16 已知 F 是抛物线 $C: y^2 = 2x$ 的焦点, M 是 C 上一点, FM 的延长线交 y 轴于点 N . 若 M 为 FN 的中点, 则 $|FN| = \underline{\hspace{2cm}}$.
- 17 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的两顶点为 A_1, A_2 , 虚轴两端点为 B_1, B_2 , 两焦点为 F_1, F_2 , 若以 A_1A_2 为直径的圆内切于菱形 $F_1B_1F_2B_2$, 则双曲线的离心率是 ().
- A. $\sqrt{5} - 1$ B. $\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{5} + 1}{2}$ D. $\sqrt{3} + 1$



取值范围问题

- 18 设椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的一个焦点 $F(2, 0)$ 点 $A(-2, 1)$ 为椭圆 E 内一点, 若椭圆 E 上存在一点 P , 使得 $|PA| + |PF| = 8$, 则椭圆 E 的离心率的取值范围是 ().
- A. $\left[\frac{4}{9}, \frac{4}{7}\right]$ B. $\left(\frac{4}{9}, \frac{4}{7}\right)$ C. $\left[\frac{2}{9}, \frac{2}{7}\right]$ D. $\left[\frac{2}{9}, \frac{2}{7}\right]$
- 19 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点为 F , 虚轴的上端点为 B , P 为左支上的一个动点, 若 $\triangle PBF$ 周长的最小值等于实轴长的 3 倍, 则该双曲线的离心率为 ().
- A. $\frac{\sqrt{10}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{10}}{5}$ C. $\sqrt{10}$ D. $\sqrt{2}$



椭圆解答



与直线的位置关系基础求解



直线方程求解

20 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, F_1, F_2 分别为椭圆 E 的左、右焦点, M 为 E 上任意一点, $S_{\triangle F_1 M F_2}$ 的最大值为 1, 椭圆右顶点为 A .

(1) 求椭圆 E 的方程.

(2) 若过 A 的直线 l 交椭圆于另一点 B , 过 B 作 x 轴的垂线交椭圆于 C (C 异于 B 点), 连接 AC 交 y 轴于点 P . 如果 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \frac{1}{2}$ 时, 求直线 l 的方程.



在向量数量积中的计算

21 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$, 点 $T\left(2\sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 在椭圆上.

(1) 求椭圆的方程.

(2) 已知直线 $y = \sqrt{2}x + m$ 与椭圆交于 A, B 两点, 点 P 的坐标为 $(2\sqrt{2}, 0)$, 且 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = -1$, 求实数 m 的值.

 弦长公式的应用

与基本不等式结合

22 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 经过点 $(\sqrt{6}, 1)$, 且离心率 $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) 若直线 l 与椭圆 C 相交于 A, B 两点, 且满足 $\angle AOB = 90^\circ$ (O 为坐标原点), 求 $|AB|$ 的取值范围.



与解不等式结合

23 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率 $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 椭圆上的点到左焦点 F_1 的距离的最大值为 $\sqrt{2} + 1$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程.

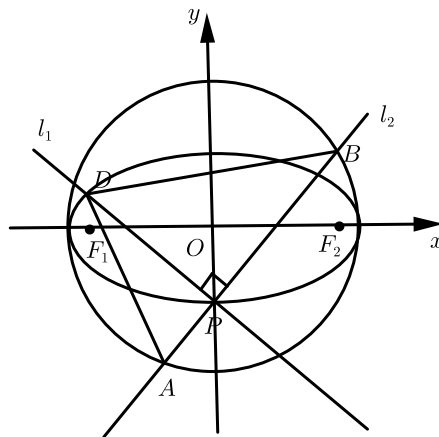
(2) 已知直线 $l: y = kx + t (k \neq 0)$ 与椭圆 C 交于 M, N 两点, 在 y 轴上是否存在点 $P(0, m)$, 使得 $|MP| = |NP|$ 且 $|MN| = 2$. 若存在, 求出实数 m 的取值范围; 若不存在, 说明理由.



与三角形面积与基本不等式结合

- 24 如图，点 $P(0, -1)$ 是椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的一个顶点， C_1 的长轴是圆 $C_2: x^2 + y^2 = 4$ 的直径. l_1, l_2 是过点 P 且互相垂直的两条直线，其中 l_1 交椭圆 C_1 于另一点 D ， l_2 交圆 C_2 于 A, B 两点.

- (1) 求椭圆 C_1 的方程.
- (2) 当 $\triangle ABD$ 的面积取得最大值时，求直线 l_1 的方程.



定值定点问题



定值问题

- 25 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $(0, \sqrt{2})$ 且满足 $a + b = 3\sqrt{2}$.

- (1) 求椭圆 C 的方程.
- (2) 若斜率为 $\frac{1}{2}$ 的直线与椭圆 C 交于两个不同的点 A, B ，点 M 坐标为 $(2, 1)$ ，设直线 MA 与 MB 的斜率分别为 k_1, k_2 ，试问 $k_1 + k_2$ 是否为定值？并说明理由.



26 已知 F_1, F_2 分别是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点其焦距为 6, 过 F_1 的直线与 C 交于 A, B 两点, 且 $\triangle ABF_2$ 的周长是 $12\sqrt{2}$.

(1) 求 C 的方程.

(2) 若 $M(x_0, y_0)$ 是 C 上的动点, 从点 O (O 是坐标系原点) 向圆 $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 6$ 作两条切线, 分别交 C 于 P, Q 两点. 已知直线 OP, OQ 的斜率存在, 并分别记为 k_1, k_2 .

①求证: $k_1 k_2$ 为定值.

②试问 $|OP|^2 + |OQ|^2$ 是否为定值? 若是, 求出该值; 若不是, 请说明理由.

- 27 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 过点 $(\sqrt{6}, \sqrt{2})$, 且离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$. 设 P 为圆 $x^2 + y^2 = 3$ 上任意一点, 过点 P 作该圆的切线交椭圆于 E, F 两点.

(1) 求椭圆的方程.

(2) 试判断 $\overrightarrow{PE} \cdot \overrightarrow{PF}$ 是否为定值? 若为定值, 则求出该定值; 否则, 请说明理由.



定点问题

- 28 设椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 下顶点为 A , 椭圆 C 的离心率是 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\triangle AF_1F_2$ 的面积是 $\sqrt{3}$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程.

(2) 直线 l 与椭圆 C 交于 B, D 两点 (异于 A 点), 若直线 AB 与直线 AD 的斜率之和为 1, 证明: 直线 l 恒过定点, 并求出该定点的坐标.



条件转化



三角形面积比值的转化

29

在平面直角坐标系 xOy 中，已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，短轴长为 2，

若点 A 、 B 分别是椭圆 E 的左、右顶点，动点 $M(a, t)$ ， $(t \geq \sqrt{2})$ ，直线 AM 交椭圆 E 于点 P 。

(1) 求椭圆 E 的方程。

(2) ①求证： $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{BP}$ 是定值。

②设 $\triangle ABP$ 的面积为 S_1 ，四边形 $OBMP$ 的面积为 S_2 ，求 $\frac{S_1}{S_2}$ 的最大值。



角度条件的转化

30 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左、右焦点分别为 F_1 、 F_2 ，且 $F_1(-1, 0)$ ，椭圆经过点 $(1, \frac{3}{2})$ 。

- (1) 求椭圆的方程。
- (2) 直线 l 过椭圆右顶点 B ，交椭圆于另一点 A ，点 G 在直线 l 上，且 $\angle GOB = \angle GBO$ 。若 $GF_1 \perp AF_2$ ，求直线 l 的斜率。



点在圆上条件的转化

31 设椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左、右焦点分别为 F_1 、 F_2 ，其离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，过 F_2 的直线 l 与 C 交于 A 、 B 两点，且 $\triangle AF_1B$ 的周长为 $4\sqrt{2}$ 。

- (1) 求椭圆 C 的方程。
- (2) 设椭圆 C 的上顶点为 P ，证明：当 l 的斜率为 $\frac{1}{3}$ 时，点 P 在以 AB 为直径的圆上。



等边三角形的条件转化

32 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ，短轴的两个端点和右焦点构成的三角形面积为 $2\sqrt{5}$ 。

(1) 求椭圆 C 的方程。

(2) 已知斜率为 k 的直线 l 经过点 $A(-a, 0)$ ，且直线 l 与椭圆 C 交于点 P (P 不在 x 轴上)，若点 Q 在 y 轴的负半轴上， $\triangle APQ$ 是等边三角形，求 k 的值。



垂直平分线条件的转化

33 已知 F_1, F_2 为椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点，椭圆 C 过点 $M\left(1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ，且 $MF_2 \perp F_1F_2$ 。

(1) 求椭圆 C 的方程。

(2) 经过点 $P(2, 0)$ 的直线 l 交椭圆 C 于 A, B 两点，若存在点 $Q(m, 0)$ ，使得 $|QA| = |QB|$ 。

①求实数 m 的取值范围。

②若线段 F_1A 的垂直平分线过点 Q ，求实数 m 的值。



三角函数式条件的转化

34 已知过点 $(0, -2\sqrt{3})$, 斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线 l 过椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的焦点, 椭圆 C 的中心关于直线 l 的对称点在直线 $x = \frac{a^2}{2}$ 上.

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) 过点 $E(-2, 0)$ 的直线 m 交椭圆 C 于点 M, N , 且满足 $\tan \angle MON = \frac{4\sqrt{6}}{3\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON}}$ (O 为坐标原点), 求直线 m 的方程.

第 6 讲

概率统计及计数原理专项复习





概率统计



正态分布

- 1 已知随机变量 x 服从正态分布 $N(3, \sigma^2)$, 且 $P(x \leq 4) = 0.84$, 则 $P(2 < x < 4) = (\quad)$.
- A. 0.84 B. 0.68 C. 0.32 D. 0.16



线性回归方程

- 2 已知 x 与 y 之间的一组数据:

x	0	1	3	4
y	2.2	4.3	4.8	6.7

则 y 与 x 的线性回归方程为 $\hat{y} = 0.95x + a$, 则 a 的值为 $(\quad)$.

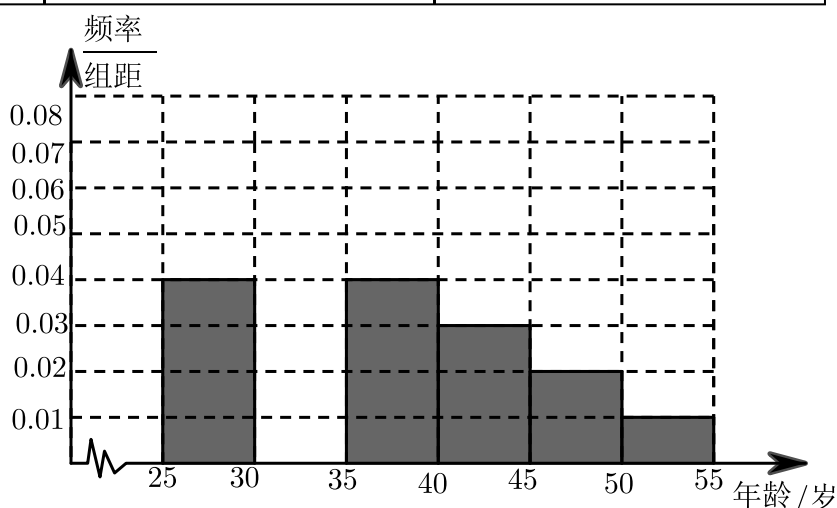
- A. 0.325 B. 0 C. 2.2 D. 2.6



频率分布直方图

- 3 某班同学进行社会实践，对 $[25, 55]$ 岁的人群随机抽取 n 人进行了生活习惯是否符合低碳观念的调查，若生活习惯符合低碳观念的称为“低碳族”，否则称为“非低碳族”，得到如下统计表和各年龄段人数频率分布直方图如下，则图表中的 p, a 的值分别为（ ）.

组数	分组	低碳族的人数	占本组的频率
第一组	$[25, 30)$	120	0.6
第二组	$[30, 35)$	195	p
第三组	$[35, 40)$	100	0.5
第四组	$[40, 45)$	a	0.4
第五组	$[45, 50)$	30	0.3
第六组	$[50, 55]$	15	0.3



- A. 0.79, 20 B. 0.195, 40 C. 0.65, 60 D. 0.975, 80



二项分布

- 4 若有一个不透明的袋子内装有大小、质量相同的 6 个小球，其中红球有 2 个，白球有 4 个，每次取两个，取后放回，连续取三次，设随机变量 ξ 表示取出后都是白球的次数，则 $E(\xi) = \underline{\hspace{2cm}}$.



离散型随机变量分布列的期望和方差

- 5 袋中装有 5 个同样大小的球，编号为 1, 2, 3, 4, 5. 现从该袋内随机取出 3 个球，记被取出的球的最大号码数为 ξ ，则 $E\xi$ 等于 $\underline{\hspace{2cm}}$.

- 6 某校在高一年级一班至六班进行了“社团活动”满意度调查（结果只有“满意”和“不满意”两种），从被调查的学生中随机抽取了 50 人，具体的调查结果如表：

班号	一班	二班	三班	四班	五班	六班
频数	4	5	11	8	10	12
满意人数	3	2	8	5	6	6

现从一班和二班调查对象中随机选取 4 人进行追踪调查，则选中的 4 人中恰有 2 人不满意的概率为 _____；若将以上统计数据中学生持满意态度的频率视为概率，在高一年级全体学生中随机抽取 3 名学生，记其中满意的人数为 X ，则随机变量 X 的数学期望是 _____。

- 7 小明的投篮命中率为 $\frac{3}{4}$ ，各次投篮命中与否相互独立。他连续投篮三次，设随机变量 X 表示三次投篮命中的次数，则 $P(X=2) = \underline{\hspace{2cm}}$ ； $E(X) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

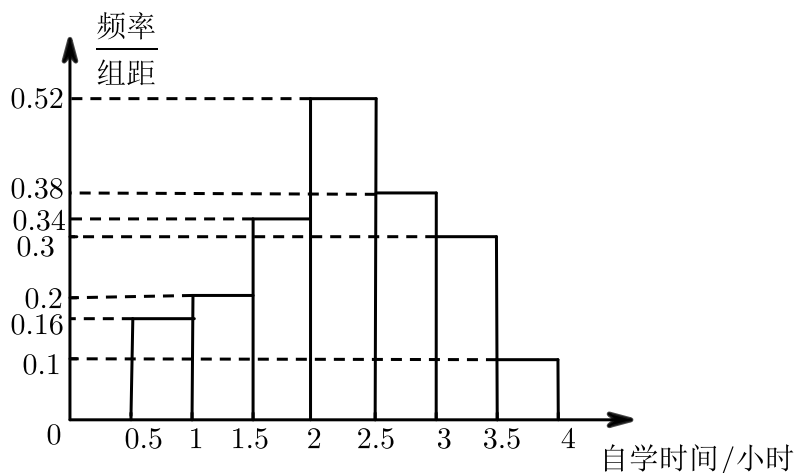
- 8 为了响应国家发展足球的战略，哈尔滨市某校在秋季运动会中，安排了足球射门比赛。现有 10 名同学参加足球射门比赛，已知每名同学踢进的概率均为 0.6，每名同学有 2 次射门机会，且各同学射门之间没有影响。现规定：踢进两个得 10 分，踢进一个得 5 分，一个未进得 0 分，记 X 为 10 个同学的得分总和，则 X 的数学期望为（ ）。

A. 30 B. 40 C. 60 D. 80



样本的数字特征

- 9 如图是某学校的教研处根据调查结果绘制的本校学生每天放学后的自学时间情况的频率分布直方图：根据频率分布直方图，求出自学时间的中位数和众数的估计值（精确到 0.01）分别是（ ）。



A. 2.20, 2.25 B. 2.29, 2.20 C. 2.29, 2.25 D. 2.25, 2.25

- 10 如图所示的茎叶图记录了甲、乙两组各 5 名工人某日的产量数据（单位：件）若这两组数据的中位数相等，且平均值也相等，则 $x + y$ 的值为 _____.

甲组		乙组
6	5	9
2 5	6	1 7 y
x 4	7	8



分层抽样

- 11 中国诗词大会的播出引发了全民的读书热，某小学语文老师在班里开展了一次诗词默写比赛，班里 40 名学生得分数据的茎叶图如图所示. 若规定得分不小于 85 分的学生得到“诗词达人”的称号，小于 85 分且不小于 70 分的学生得到“诗词能手”的称号，其他学生得到“诗词爱好者”的称号，根据该次比赛的成就按照称号的不同进行分层抽样抽选 10 名学生，则抽选的学生中获得“诗词能手”称号的人数为（ ）.

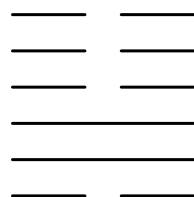
9	1 2 5 6 8
8	0 0 1 2 4 5 7 8
7	0 2 2 3 3 3 4 5 5 6 9
6	0 2 2 3 4 4 4 5 7 7 8 9
5	6 6 8 9

- A. 2 B. 4 C. 5 D. 6



概率

- 12 我国古代典籍《周易》用“卦”描述万物的变化. 每一“重卦”由从下到上排列的 6 个爻组成，爻分为阳爻“—”和阴爻“— —”，如图就是一重卦. 在所有重卦中随机取一重卦，则该重卦恰有 3 个阳爻的概率是（ ）.



- A. $\frac{5}{16}$ B. $\frac{15}{64}$ C. $\frac{21}{32}$ D. $\frac{11}{16}$

- 13 有编号分别为 1, 2, 3, 4, 5 的 5 个红球和 5 个黑球，从中随机取出 4 个，则取出球的编号互不相同的概率为 _____.
- 14 一个袋子中有形状和大小完全相同的 3 个白球与 2 个黑球，每次从中取出一个球，取到白球得 2 分，取到黑球得 3 分. 甲从袋子中有放回地依次取出 3 个球，则甲了三次都取到白球的概率为 _____，甲总得分是 7 的概率为 _____.



计数原理



排列组合

- 15 某学校食堂为了进一步加强学校疫情防控工作，降低学生因用餐而交叉感染的概率规定：就餐时，每张餐桌（如图）至多坐两个人，一张餐桌坐两个人时，两人既不能相邻也不能相对（即二人只能坐在对角线的位置上）。现有 3 位同学到食堂就餐，如果 3 人在 1 号和 2 号两张餐桌上就餐（同一张餐桌的 4 个座位是没有区别的），则不同的坐法种数为（ ）。



- A. 6 B. 12 C. 24 D. 48
- 16 天津大学某学院欲安排 4 名毕业生到某外资企业的三个部门 A、B、C 实习，要求每个部门至少安排 1 人，其中甲大学生不能安排到 A 部门工作的方法有 _____ 种（用数字作答）。
- 17 由 0, 1, 2, 3, 4, 5 所组成的没有重复数字的四位数中，能被 5 整除的有（ ）。
- A. 512 个 B. 192 个 C. 240 个 D. 108 个



二项式定理 —— 常数项

- 18 $\left(2x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$ 的展开式中，常数项是 _____。
- 19 已知 $\left(\sqrt[3]{x} - \frac{2a}{x}\right)^8$ 的展开式中常数项为 112，则实数 a 的值为（ ）。
- A. ± 1 B. 1 C. 2 D. ± 2
- 20 $\left(x - \frac{1}{x}\right)\left(2x + \frac{1}{x}\right)^5$ 的展开式中，常数项为 _____。



二项式定理 —— 项的系数

- 21 若 $\left(x^2 + \frac{1}{ax}\right)^6$ 的二项展开式中 x^3 的系数为 $\frac{5}{2}$ ，则 $a =$ _____。
- 22 在二项式 $\left(x + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^9$ 的展开式中，含 x^6 的项的系数为 _____。

23 在 $\left(\frac{2}{x} - \sqrt{x}\right)^5$ 的展开式中, x 的系数是 _____ (用数字作答).

24 $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^8$ 的展开式中 x^7 的系数为 _____. (用数字作答)

25 将 $(3+x)^n$ 的展开式按照 x 的升幂排列, 若倒数第三项的系数是 90, 则 n 的值是 _____.



系数和 / 二项式系数和

26 若 $\left(\frac{3}{\sqrt{x}} - \sqrt[3]{x}\right)^n$ 的展开式中所有项系数的绝对值之和为 1024, 则该展开式中的常数项是 _____.

27 已知二项式 $\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^n$ 的展开式中各项的二项式系数和为 512, 其展开式中第四项的系数 _____.

28 如果 $\left(3\sqrt{x} - \frac{1}{x}\right)^n$ 的展开式中各项系数之和为 128, 则展开式中 $\frac{1}{x^4}$ 的系数是 _____.

第 7 讲

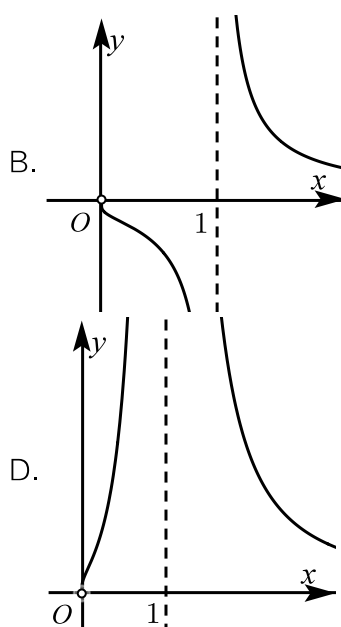
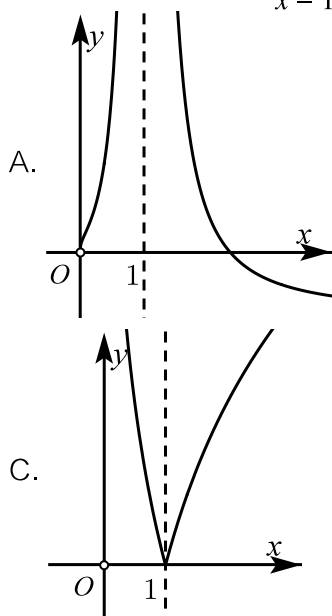
概率统计及计数原理专项复习



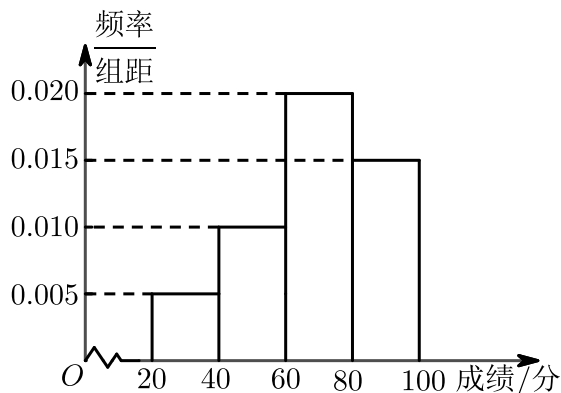


选择题

- 1 (5分) 已知全集 $U = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, 集合 $A = \{-2, 0, 1, 2\}$, $B = \{-1, 0, 1\}$, 则集合 $A \cap \complement_U B = (\quad)$.
- A. $\{0, 1\}$ B. $\{-2, 2\}$ C. $\{-2, -1\}$ D. $\{-2, 0, 2\}$
- 2 (5分) 设 $x \in \mathbf{R}$, 则 “ $x^3 < 1$ ” 是 “ $\left|x - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$ ” 的 ($\quad$).
- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
- 3 (5分) 函数 $f(x) = \frac{2}{x-1+\ln x}$ 的图象大致为 ($\quad$).



- 4 (5分) 某学校组织学生参加英语测试, 成绩的频率分布直方图如图, 数据分组依次为 $[20, 40)$, $[40, 60)$, $[60, 80)$, $[80, 100]$, 若低于 60 分的人数是 15 人, 则该班的学生人数是 ($\quad$).



- A. 45 B. 50 C. 55 D. 60

- 5 (5分) 设 $a = 2^{\ln 2}$, $b = -\log_{\frac{1}{2}} 4$, $c = \log_3 2$, 则 a, b, c 的大小关系是 ().
 A. $b > a > c$ B. $a > b > c$ C. $b > c > a$ D. $a > c > b$
- 6 (5分) 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 三棱锥 $A - B_1CD_1$ 的表面积为 $4\sqrt{3}$, 则正方体外接球的体积为 ().
 A. $4\sqrt{3}\pi$ B. $\sqrt{6}\pi$ C. $32\sqrt{3}\pi$ D. $8\sqrt{6}\pi$
- 7 (5分) 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 和直线 $l: \frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 1$, 若过双曲线 C 的左焦点和点 $(0, -b)$ 的直线与直线 l 平行, 则双曲线 C 的离心率为 ().
 A. $\frac{5}{4}$ B. $\frac{5}{3}$ C. $\frac{4}{3}$ D. 5
- 8 (5分) 函数 $f(x) = 1 + \cos 2x - 2\sin^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$, 其中 $x \in \mathbf{R}$, 则下列结论中正确的是 ().
 A. $f(x)$ 是最小正周期为 x 的偶函数
 B. $f(x)$ 的条对称轴是 $x = \frac{\pi}{3}$
 C. $f(x)$ 的最大值为 2
 D. 将函数 $y = \sqrt{3} \sin 2x$ 的图象左移 $\frac{\pi}{6}$ 得到函数 $f(x)$ 的图象
- 9 (5分) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |x-1| - 1, & x \leq 2 \\ -\frac{1}{2}f(x-2), & x > 2 \end{cases}$, 若函数 $g(x) = x \cdot f(x) - a$ ($a \geq -1$) 的零点个数为 2, 则实数 a 的取值范围是 ().
 A. $\frac{2}{3} < a < \frac{8}{7}$ 或 $a = -1$ B. $\frac{2}{3} < a < \frac{8}{7}$
 C. $\frac{7}{8} < a < \frac{3}{2}$ 或 $a = -1$ D. $\frac{7}{8} < a < \frac{3}{2}$



填空题

- 10 (5分) 已知复数 $z = \frac{5i}{2-i} + 5i$, 则 $|z| =$ _____.
- 11 (5分) 在 $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{x}\right)^9$ 的展开式中的常数项是 _____.
- 12 (5分) 已知直线 $l: y = x + m$ 被圆 $C: x^2 + y^2 - 4x - 2y - 1 = 0$ 截得的弦长等于该圆的半径, 则实数 $m =$ _____.



- 13 (5分) 在某地区某高传染性病毒流行期间, 为了建立指标显示疫情已受控制, 以便向该地区居民显示可以过正常生活, 有公共卫生专家建议的指标是“连续7天每天新增感染人数不超过5人”, 根据连续7天的新增病例数计算, 下列各个选项中, 一定符合上述指标的是 _____.
- ①平均数 $\bar{x} \leq 3$;
②标准差 $S \leq 2$;
③平均数 $\bar{x} \leq 3$ 且标准差 $S \leq 2$;
④平均数 $\bar{x} \leq 3$ 且极差小于或等于2;
⑤众数等于1且极差小于或等于4.
- 14 (5分) 已知 $a > 0, b > 0$, 且 $\frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+2} = \frac{1}{3}$, 则 $a+2b$ 的最小值为 _____.
- 15 (5分) 已知菱形 $ABCD$ 的边长为3, 对角线 AC 与 BD 相交于 O 点, $|\overrightarrow{AC}| = 2\sqrt{3}$, E 为 BC 边 (包含端点) 上一点, 则 $|\overrightarrow{EA}|$ 的取值范围是 _____, $\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{ED}$ 的最小值为 _____.



解答题

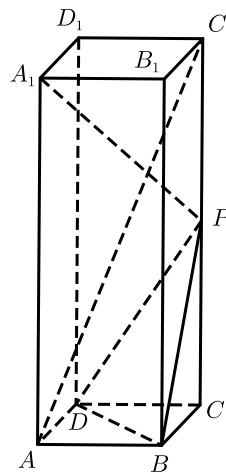
- 16 (14分) 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $2 \sin B \sin\left(C + \frac{\pi}{6}\right) = \sin A$.
- (1) (6分) 求角 B 的大小.
- (2) (8分) 若 $AB = 4$, $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$, 求 $\sin 2A$ 的值.

- 17 (15分) 如图, 四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1 \perp$ 底面 $ABCD$, 底面 $ABCD$ 是正方形, 点 P 为侧棱 CC_1 上的一点, 且 $AA_1 = 3AB = 3$.

(1) (5分) 若点 P 为 CC_1 的中点, 求证: $AC_1 \parallel$ 平面 PBD .

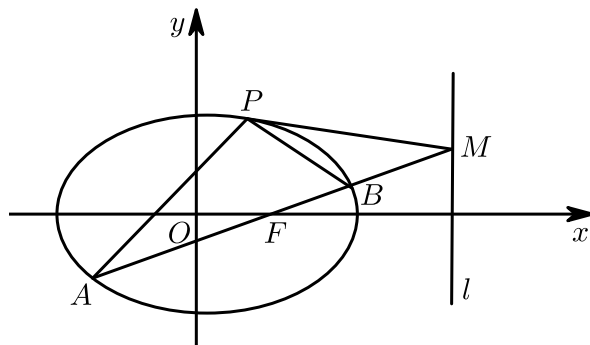
(2) (4分) 若 $\frac{PC}{CC_1} = \frac{1}{3}$, 求直线 A_1P 与平面 PBD 所成角的正弦值.

(3) (6分) 若二面角 $B - PD - C$ 的余弦值为 $\frac{2}{3}$, 求 PC 的长.





- 18 (15分) 如图, 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 经过点 $P\left(1, \frac{3}{2}\right)$ 离心率 $e = \frac{1}{2}$, 直线 l 的方程为 $x = 4$.



- (1) (5分) 求椭圆 C 的方程;
- (2) (10分) AB 是经过右焦点 F 的任一弦 (不经过点 P), 设直线 AB 与直线 l 相交于点 M , 记 PA, PB, PM 的斜率分别为 k_1, k_2, k_3 问: 是否存在常数 λ , 使得 $k_1 + k_2 = \lambda k_3$. 若存在求 λ 的值; 若不存在, 说明理由.

19 (15分) 已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_3 - a_2 = 10$, $a_1 a_2 a_3 = 125$.

(1) (5分) 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

(2) (10分) 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1 = 1$, 且 $b_1 + \frac{b_2}{2} + \frac{b_3}{3} + \cdots + \frac{b_n}{n} = b_{n+1} - 1$ ($n \in \mathbf{N}^*$).

① (4分) 求 $\{b_n\}$ 的通项公式.

② (6分) 求 $\sum_{i=1}^n a_i b_{2i-1}$.



20 (16分) 设函数 $f(x) = ax - 2 - \ln x (a \in \mathbf{R})$.

(1) (5分) 若 $f(x)$ 在点 $(e, f(e))$ 处的切线为 $x - ey + b = 0$, 求 a, b 的值.

(2) (5分) 求 $f(x)$ 的单调区间.

(3) (6分) 若 $g(x) = ax - e^x$, 求证: 在 $x > 0$ 时, $f(x) > g(x)$.