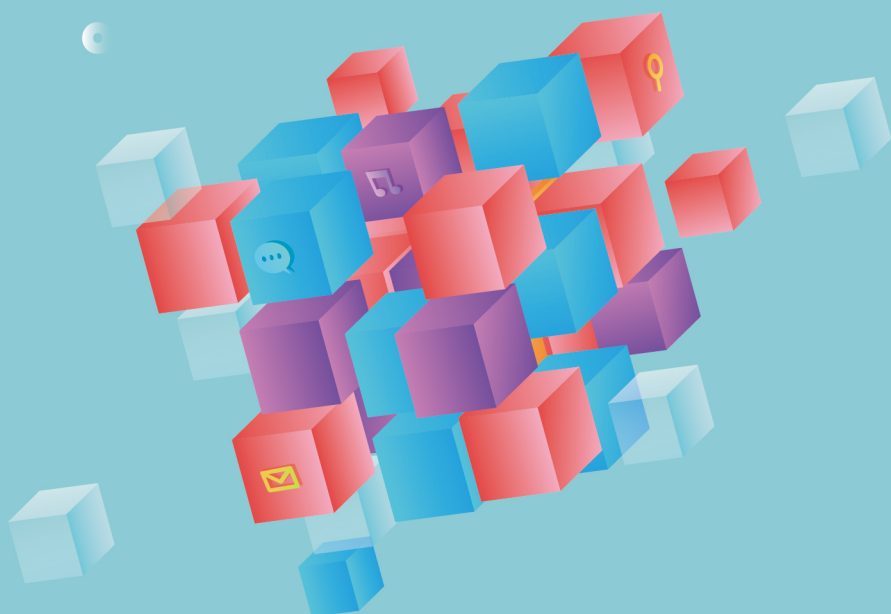
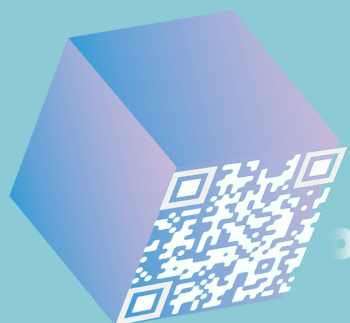


知识魔方

i 数学



主 编：马建明

本模块制作人：吕金琳

本模块审核人：闫聪聪

封面设计：林梦涵

教研团队：高中数学组

前言

学而思爱智康产品升级介绍

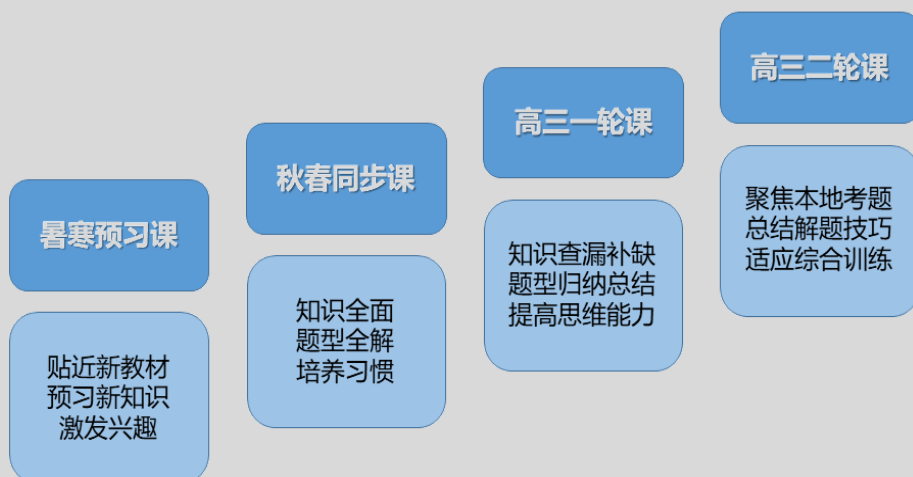
新教材改革已经如火如荼地展开，智康新产品助学助考的开发问题已成为家长和学子重点关注的焦点。应广大家长和学子的需求，我们带领最优质的高中理科教师团队制作出最新人教版教材的全模块切片产品。该系列产品能帮助学生掌握新的课程标准，让学生能够按照新教材理念科学高效的学习。该书以“三次课学懂一个模块”为宗旨，帮你轻松找到学习目标，助你走向成功。

这套产品在整体设计上有四个突出的特点：

- (1) 标准教学大纲变为专属大纲，并且可以随时调整
- (2) 讲义 + 习题册，形成测、讲、评、练学习闭环
- (3) 难度阶梯分明，在学科层次上由浅入深、给不同程度的学生都能带来持续的进步
- (4) 针对本地考卷进行大数据分析，精选例题，直击考点

如果你在使用的过程中发现有那里需要改正或者优化，希望优秀的你能够给予我更多的建议与意见，帮助我更好的提升自己。

高中理科产品课程体系



扫描右侧二维码
提出你的意见与建议吧



高二数学课程产品设计

考点占比：让同学们更加清楚本模块知识在高考中的地位。

考点分析：以大数据方式分析考试重点难点，紧扣考试热点，让同学们的复习更具针对性。

知识导图：梳理知识结构，帮助同学们形成网络状的知识图谱，更有助于对知识点的理解记忆。

典型例题：分析考试情况，精选最新的考题，让同学们清楚每一个知识点的考法。

巩固练习：匹配同类型题目，讲练结合，锻炼提升解题能力。

本模块介绍

基本初等函数模块在必修 1 中出现，属于函数分支知识点。本章内容主要包括指数对数的运算、指数函数、对数函数、幂函数的图象与性质。

在之前我们已经初步复习了函数的单调性及奇偶性，而在此讲，结合我们学习的基本初等函数性质后，就是我们高考的考点之一了。

此讲内容一般会单独考察指对数比较大小，此类题偶尔和奇偶性单调性结合考察；其次是在函数与方程的零点问题内，结合图像分析求解；再者便是和导数结合进行相应考察。

学生可以通过本节模块课程的学习，掌握高考基本初等函数相关的重点题型。

目 录

第 1 讲 指数函数与对数函数..... 01

- 知 识 点 1 指数运算及指数函数
- 知 识 点 2 对数运算及对数函数
- 知 识 点 3 指对数的运算
- 知 识 点 4 判断函数图像
- 知 识 点 5 比较大小
- 知 识 点 6 求解不等式
- 知 识 点 7 单调性问题

第 2 讲 幂函数与函数零点初步.....07

- 知 识 点 1 幂函数的相关知识
- 知 识 点 2 幂函数典型题
- 知 识 点 3 零点的概念
- 知 识 点 4 不含参函数零点典型题
- 知 识 点 5 一元二次方程根的分布
- 知 识 点 6 三次函数零点分析

第 3 讲 函数零点综合问题（一）.....11

- 知 识 点 1 零点存在性定理
- 知 识 点 2 根据零点信息确定参数取值范围
- 知 识 点 3 函数零点的关系

第 4 讲 函数零点综合问题（二）.....15

- 知 识 点 1 分段函数的零点
- 知 识 点 2 复合函数的零点



我们一起开始学习吧 o(*^_^*)o



第 1 讲

指数函数与对数函数





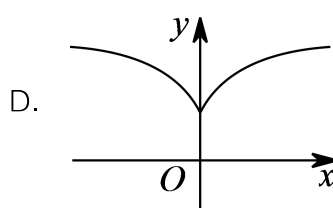
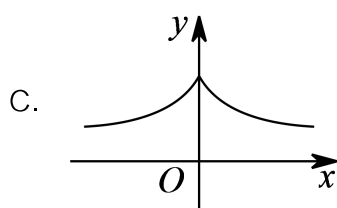
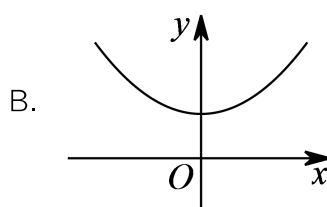
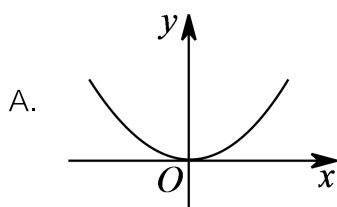
指对数的运算

- 1 函数 $y = a^{x-2} + 1$ ($a > 0, a \neq 1$) 的图象必经过点 _____.
- 2 已知函数 $f(x) = 4a^{x-1}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的图象恒过一个定点 P , 且点 P 在直线 $mx + ny - 1 = 0$ 上, 则 $2^m \times 16^n$ 的值是 _____.
- 3 函数 $f(x) = \log_a(2x - 3) + 1$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 的图象恒过定点 P , 则点 P 的坐标是 _____.

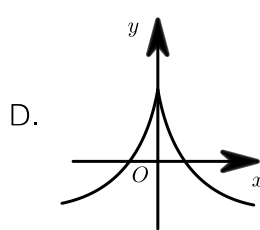
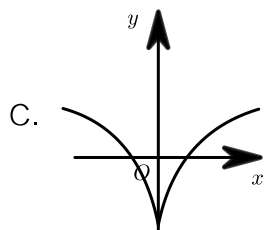
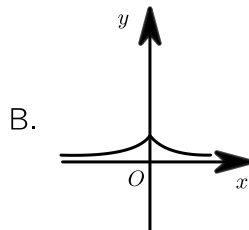
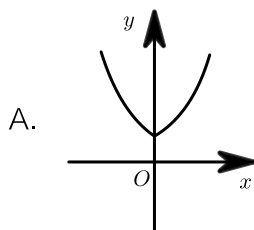


判断函数图像

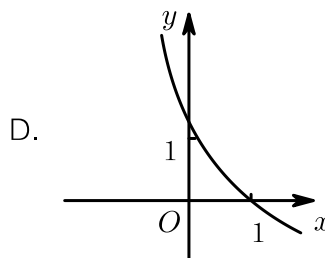
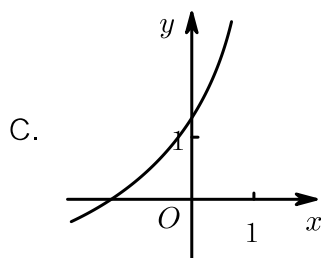
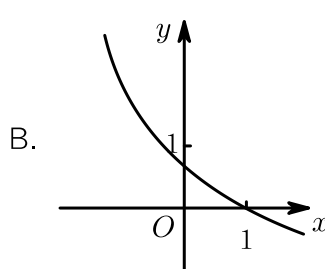
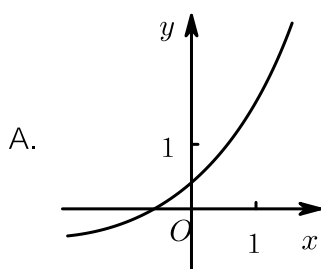
- 4 函数 $y = a^{|x|}$ ($0 < a < 1$) 的图象是 ().



- 5 函数 $y = \log_2|x|$ 的图象大致是 ().



- 6 函数 $y = a^x - \frac{1}{a}$ (其中 $a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的图象可能是 ().



比较大小



指对数比较大小

- 7 设 $a = \log_{0.7} 0.8$, $b = \log_{1.1} 0.9$, $c = 1.1^{0.9}$, 则 a, b, c 的大小顺序是 ().
 A. $a < b < c$ B. $b < c < a$ C. $b < a < c$ D. $c < a < b$
- 8 设 $a = \left(\frac{3}{4}\right)^{0.5}$, $b = \left(\frac{4}{3}\right)^{0.4}$, $c = \log_{\frac{3}{4}} (\log_3 4)$, 则 ().
 A. $a < b < c$ B. $a < c < b$ C. $c < a < b$ D. $c < b < a$
- 9 已知 $a = \log_2 7$, $b = \log_3 8$, $c = 0.3^{0.2}$, 则 a, b, c 的大小关系为 ().
 A. $c < b < a$ B. $a < b < c$ C. $b < c < a$ D. $c < a < b$
- 10 已知 $a = \log_3 \frac{7}{2}$, $b = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$, $c = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{5}$, 则 a, b, c 的大小关系为 ().
 A. $a > b > c$ B. $b > a > c$ C. $c > b > a$ D. $c > a > b$
- 11 若 $a = 2^{0.3}$, $b = 3^{1.2}$, $c = 0.6^{2.5}$, 则下列结论正确的是 ().
 A. $b < a < c$ B. $a < b < c$ C. $c < a < b$ D. $b < c < a$



结合单调性、奇偶性比较大小

- 12 已知函数 $y = f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 当 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ 时, 都有 $(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] < 0$ 成立, 若 $a = \ln \frac{1}{\pi}$, $b = (\ln \pi)^2$, $c = \ln \sqrt{\pi}$, 则 ().
- A. $f(a) > f(b) > f(c)$ B. $f(c) > f(a) > f(b)$ C. $f(b) > f(a) > f(c)$ D. $f(c) > f(b) > f(a)$
- 13 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 且 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调递减, 则 ().
- A. $f(0) < f(\log_3 2) < f(-\log_2 3)$ B. $f(\log_3 2) < f(0) < f(-\log_2 3)$
C. $f(-\log_2 3) < f(\log_3 2) < f(0)$ D. $f(\log_3 2) < f(-\log_2 3) < f(0)$



利用对称性、单调性比较大小

- 14 已知函数 $y = f(x-2)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称, 在 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f(x)$ 单调递增. 若 $a = f(4^{\ln 3})$, $b = f(2^{-e})$, $c = f\left(\ln \frac{1}{\pi}\right)$ (其中 e 为自然对数的底数, π 为圆周率), 则 a, b, c 的大小关系为 ().
- A. $a > c > b$ B. $a > b > c$ C. $c > a > b$ D. $c > b > a$
- 15 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x-1)$ 的图象关于 $x=1$ 对称, 且当 $x > 0$ 时, $f(x)$ 单调递减, 若 $a = f(\log_{0.5} 3)$, $b = f(0.5^{-1.3})$, $c = f(0.7^6)$, 则 a, b, c 的大小关系是 ().
- A. $c > a > b$ B. $b > a > c$ C. $a > c > b$ D. $c > b > a$



求解不等式



基础求解

- 16 不等式 $2^{x^2+2x-4} \leq \frac{1}{2}$ 的解集为 ____.
- 17 已知 $f(x) = \begin{cases} 4^x, & x \leq 1 \\ \log_2 x, & x > 1 \end{cases}$, 若 $f(x) \geq 2$, 则 x 的取值范围为 ____.
- 18 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^{1-x}, & x \leq 1 \\ 1 - \log_2 x, & x > 1 \end{cases}$, 则 $f(f(-3))$ 为 ____; 不等式 $f(x) \leq 2$ 的解集是 ____.



利用单调性、奇偶性

- 19 已知偶函数 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 单调增加, 则满足 $f(x-1) < f\left(\frac{1}{3}\right)$ 的 x 取值范围 ().
 A. $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ B. $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$ C. $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$ D. $\left[\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right]$
- 20 已知奇函数 $f(x)$ 在 $(-2, 2)$ 上单调递增, 且 $f(t) + f(2t-1) > 0$, 则实数 t 的取值范围是 ().
 A. $\left(\frac{1}{3}, 2\right)$ B. $\left(\frac{1}{3}, \frac{3}{2}\right)$ C. $\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$ D. $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$
- 21 已知函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 在 $[0, +\infty)$ 上是增函数, 若 $f(\log_2 x) > f(1)$, 则 x 的取值范围是 ().
 A. $(2, +\infty)$ B. $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ C. $\left(0, \frac{1}{2}\right) \cup (2, +\infty)$ D. $(0, 1) \cup (2, +\infty)$
- 22 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 且在区间 $(-\infty, 0)$ 上单调递增. 若实数 a 满足 $f(2^{|a-1|}) > f(-\sqrt{2})$, 则 a 的取值范围是 _____.



函数定义域、值域典型问题

- 23 已知 $f(x) = \lg(ax^2 - 2x + 1)$, 若 $f(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$, 求 a 的取值范围 _____.
- 24 已知函数 $y = \log_2(x^2 - ax - a)$ 的值域为 $\mathbf{R}$, 则实数 a 的取值范围是 _____.



单调性问题

- 25 函数 $y = 5^{2x^2-3x+1}$ 的单调递增区间为 ().
 A. $(1, +\infty)$ B. $\left(-\infty, \frac{3}{4}\right]$ C. $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ D. $\left[\frac{3}{4}, +\infty\right)$
- 26 函数 $f(x) = \ln(x^2 - 2x - 8)$ 的单调递增区间是 ().
 A. $(-\infty, -2)$ B. $(-\infty, -1)$ C. $(1, +\infty)$ D. $(4, +\infty)$
- 27 函数 $f(x) = \ln(4 + 3x - x^2)$ 的单调递减区间是 ().
 A. $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right]$ B. $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$ C. $\left(-1, \frac{3}{2}\right]$ D. $\left[\frac{3}{2}, 4\right)$



含参

- 28 函数 $f(x) = \log_a(6 - ax)$ 在 $(0, 3]$ 上为减函数, 则 a 的取值范围是 ().
 A. $(0, 1)$ B. $(1, 2)$ C. $(1, 2]$ D. $[2, +\infty)$

第 2 讲

幂函数与函数零点初步



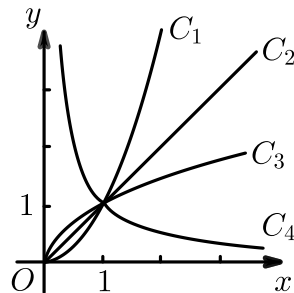


幂函数典型题



图像及定义问题

- 1 已知幂函数 $y = x^a$ 在第一象限内的图象如图所示，且 a 分别取 $-1, 1, \frac{1}{2}, 2$ ，则相应于曲线 C_1, C_2, C_3, C_4 的 a 的值依次为 ()。



- A. $\frac{1}{2}, 1, 2, -1$ B. $2, 1, \frac{1}{2}, -1$ C. $\frac{1}{2}, -1, 2, 1$ D. $2, -1, \frac{1}{2}, 1$



利用定义判断函数单调性、奇偶性问题

- 2 下列函数中，在区间 $(0, +\infty)$ 内单调递增的是 ()。
- A. $y = 2^{-x}$ B. $y = x^{\frac{1}{2}}$ C. $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ D. $y = \frac{1}{x}$
- 3 已知幂函数 $f(x) = (m^2 - m - 1)x^{m^2}$ 为偶函数则 m 的值为 _____。
- 4 下列函数中，是偶函数且在区间 $(0, +\infty)$ 上为增函数是 ()。
- A. $y = \log_{0.5} x$ B. $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}$ C. $y = -x^{-2}$ D. $y = x^{\frac{1}{3}}$
- 5 “ $a = 3$ ” 是 “ $f(x) = x^a$ ” 在 $(0, +\infty)$ 内单调递增” 的 ()。
- A. 充要条件 B. 充分不必要条件
C. 必要不充分条件 D. 既不充分也不必要条件



比较大小

- 6 若 $\frac{1}{5} < \left(\frac{1}{5}\right)^b < \left(\frac{1}{5}\right)^a < 1$ ，则 ()。
- A. $a^a < a^b < b^a$ B. $a^a < b^a < a^b$ C. $a^b < b^a < a^a$ D. $a^b < a^a < b^a$
- 7 已知 $f(x) = x^3 + 3x$ ， $a = 2^{0.3}$ ， $b = 0.3^2$ ， $c = \log_2 0.3$ ，则 ()。
- A. $f(a) < f(b) < f(c)$ B. $f(b) < f(c) < f(a)$
C. $f(c) < f(b) < f(a)$ D. $f(b) < f(a) < f(c)$
- 8 已知 $0 < a < b < 1$ ， e 是自然对数的底数，则正确的是 ()。
- A. $\left(\frac{1}{e}\right)^a < \left(\frac{1}{e}\right)^b$ B. $3^b < 3^a$ C. $(\lg a)^2 < (\lg b)^2$ D. $\log_a 3 > \log_b 3$

第 3 讲

函数零点综合问题（一）





零点存在性定理

- 1 函数 $f(x) = \ln x + 2x - 6$ 的零点一定位于区间 ().
A. (1, 2) B. (2, 3) C. (3, 4) D. (4, 5)
- 2 函数 $f(x) = e^x + 2x - 4$ 的零点所在的区间是 ().
A. $(0, \frac{1}{2})$ B. $(\frac{1}{2}, 1)$ C. (1, 2) D. $(1, \frac{3}{2})$
- 3 函数 $f(x) = \frac{1}{x} - \log_2 x$ 的零点所在区间是 ().
A. $(0, \frac{1}{2})$ B. $(\frac{1}{2}, 1)$ C. (1, 2) D. (2, 3)
- 4 函数 $f(x) = x^3 - x - 3$ 的零点所在区间为 ().
A. [2, 3] B. [1, 2] C. (0, 1) D. [-1, 0]
- 5 若 x_0 是方程 $(\frac{1}{2})^x = x^{\frac{1}{3}}$ 的解, 则 x_0 属于区间 ().
A. $(\frac{2}{3}, 1)$ B. $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$ C. $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ D. $(0, \frac{1}{3})$
- 6 已知函数 $f(x) = 2 \ln x$, $g(x) = x^2 - 4x + 5$, 则方程 $f(x) = g(x)$ 的根的个数为 ().
A. 0 B. 1 C. 2 D. 3
- 7 函数 $y = 2^{-x} + x^2 - 3$ 的零点个数为 _____.
- 8 已知函数 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数, 且满足 $f(x-2) = f(x+2)$, 当 $x \in (0, 2)$ 时, $f(x) = \ln(x^2 - x + 1)$, 则方程 $f(x) = 0$ 在区间 $[0, 8]$ 上的解的个数是 ().
A. 3 B. 5 C. 7 D. 9



根据零点信息确定参数取值范围

- 9 已知函数 $f(x) = |x - 2| + 1$, $g(x) = kx$, 若方程 $f(x) = g(x)$ 有两个不等实数根, 则实数 k 的取值范围是 _____.
- 10 已知函数 $y = \frac{|x^2 - 1|}{x - 1}$ 的图像与函数 $y = kx$ 的图像恰有两个交点, 则实数 k 的取值范围是 _____.

- 11 函数 $f(x) = 2^x - mx (m \in \mathbf{R})$ 在 $(1, 4)$ 内有唯一零点, 则 m 的取值范围是 ().
 A. $(-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$ B. $(2, 4)$ C. $(1, 2)$ D. $(1, 4)$
- 12 已知函数 $f(x) = 3^{-x} + a$ 的图像经过第二、三、四象限, $g(a) = f(a) - f(a+1)$, 则 $g(a)$ 的取值范围是 _____.
- 13 已知函数 $f(x) = |x - 2| + 1$, $g(x) = kx$. 若方程 $f(x) = g(x)$ 有两个不相等的实根, 则实数 k 的取值范围是 ().
 A. $(0, \frac{1}{2})$ B. $(\frac{1}{2}, 1)$ C. $(1, 2)$ D. $(2, +\infty)$
- 14 关于 x 的方程 $\ln x = kx$ 有解, 则 k 的取值范围是 _____.
- 15 若关于 x 的方程 $x^2 + 2ax - 5 = 0$ 的两个实数根 x_1, x_2 满足 $x_1 < 1 < x_2$, 则实数 a 的取值范围是 ().
 A. $(-2, 2)$ B. $(-\infty, 2)$ C. $(-\infty, 2]$ D. $(2, +\infty)$

第 4 讲

函数零点综合问题（二）





分段函数的零点个数

- 1 函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x - 1, & x \leq 0 \\ \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$ 零点的个数为 ().
 A. 0 B. 1 C. 2 D. 3
- 2 设定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x) = \begin{cases} |\lg x|, & x > 0 \\ -x^2 - 2x, & x \leq 0 \end{cases}$, 则关于 x 的函数 $y = f(x) - 1$ 的零点的个数为 ().
 A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
- 3 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$, 则函数 $y = f(x) - 2^{|x|}$ 的零点个数是 ().
 A. 0 B. 1 C. 2 D. 3



利用零点个数求解参数取值范围

- 4 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 3^{x+1} - 1, & x \leq 0 \\ \ln x, & x > 0 \end{cases}$, 若函数 $g(x) = f(x) - m$ 有两个零点, 则实数 m 的取值范围为 ().
 A. $(-\infty, 2]$ B. $(-\infty, 2)$ C. $(-1, 2]$ D. $(-1, 2)$
- 5 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 1, & x \geq 0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}, & x < 0 \end{cases}$, 若 $g(x) = f(x) - a$ 恰好有 3 个零点, 则 a 的取值范围为 ().
 A. $[0, 1)$ B. $(0, 1)$ C. $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$ D. $\left(\frac{1}{2}, 1\right]$
- 6 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x}, & x \geq 2 \\ (x-1)^3, & x < 2 \end{cases}$, 若关于 x 的方程 $f(x) + k = 0$ 有两个不同的实根, 则实数 k 的取值范围是 ().
 A. $(0, 1)$ B. $[0, 1]$ C. $(-1, 0)$ D. $[-1, 0]$
- 7 设 $f(x) = \begin{cases} 3^{-x}, & x \leq 0 \\ f(x-1), & x > 0 \end{cases}$, 若 $f(x) = x + a$ 有且仅有三个解, 则实数 a 的取值范围是 ().
 A. $(-\infty, 2)$ B. $(-\infty, 1)$ C. $[1, 2]$ D. $[1, +\infty)$
- 8 已知函数 $f(x) = \begin{cases} a + 2^x, & x \leq 1 \\ \frac{1}{2}x + a, & x > 1 \end{cases}$, 其中 $a \in \mathbf{R}$. 如果函数 $f(x)$ 恰有两个零点, 那么 a 的取值范围是 ____.

- 9 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x}, x > 1, \\ 9x(1-x)^2, x \leq 1. \end{cases}$ 若函数 $g(x) = f(x) - k$ 仅有一个零点, 则 k 的取值范围是 ().
- A. $(\frac{4}{3}, 2]$ B. $(-\infty, 0) \cup (\frac{4}{3}, +\infty)$
C. $(-\infty, 0)$ D. $(-\infty, 0) \cup (\frac{4}{3}, 2)$
- 10 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2, x \leq 1 \\ |\ln(x-1)|, x > 1 \end{cases}$ 若关于 x 的方程 $f(x) = kx - 2$ 有且只有一个实数根, 则实数 k 的取值范围是 _____.



复合函数的零点个数

- 11 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x^2 + 3, x < 2 \\ -4(x^2 - 5x + 6), x \geq 2 \end{cases}$, 则函数 $f(f(x))$ 的零点个数为 ().
- A. 6 B. 7 C. 8 D. 9



利用零点个数求解参数取值范围

- 12 已知函数 $f(x) = -x^2 - 2x$, $g(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{4x}, x > 0 \\ x + 1, x \leq 0 \end{cases}$, 若方程 $g[f(x)] - a = 0$ 的实数根的个数有 4 个, 则 a 的取值范围是 _____.
- 13 函数 $f(x) = \begin{cases} x + 1, (x \leq 0) \\ |\log_2 x|, (x > 0) \end{cases}$, 则函数 $y = f[f(x)] - 1$ 的零点个数是 _____.
- 14 设函数 $f(x) = 1 - |2x - 1|$, $x \in [0, 1]$. 函数 $g(x) = f(f(x)) - ax$ 有 4 个零点. 则实数 a 的取值范围是 _____.
- 15 函数 $f(x) = (x^2 - 3)e^x$, 关于 x 的方程 $f^2(x) - mf(x) + 1 = 0$ 恰有四个不同的实数解, 则正数 m 的取值范围为 _____.
- 16 已知函数 $f(x) = \begin{cases} kx + 4, x \geq 0 \\ 2^{-x}, x < 0 \end{cases}$, 若方程 $f(f(x)) - 2 = 0$ 恰有三个实数根, 则实数 k 的取值范围是 _____.
- 17 设函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x, x \leq 0 \\ \log_2 x, x > 0 \end{cases}$, 若关于 x 的方程 $[f(x)]^2 - af(x) = 0$ 恰有三个不同的实数解, 则实数 a 的取值范围为 ().
- A. $(0, 1]$ B. $(0, 1)$ C. $[1, +\infty)$ D. $(-\infty, 1)$
- 18 设函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, 关于 x 的方程 $[f(x)]^2 + mf(x) - 1 = 0$ 有三个不同的实数解, 则实数 m 的取值范围是 ().
- A. $(0, e)$ B. $(1, e)$ C. $(-\infty, e - \frac{1}{e})$ D. $(e - \frac{1}{e}, +\infty)$