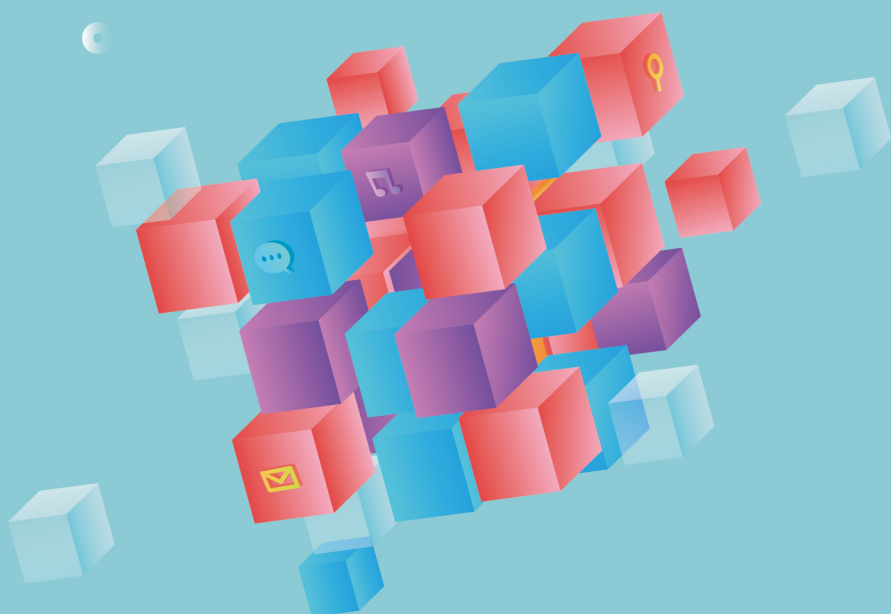


知识魔方

i 数学



主 编：马建明

本模块制作人：闫聪聪

本模块审核人：吕金琳

封面设计：林梦涵

教研团队：高中数学组

前言

学而思爱智康产品升级介绍

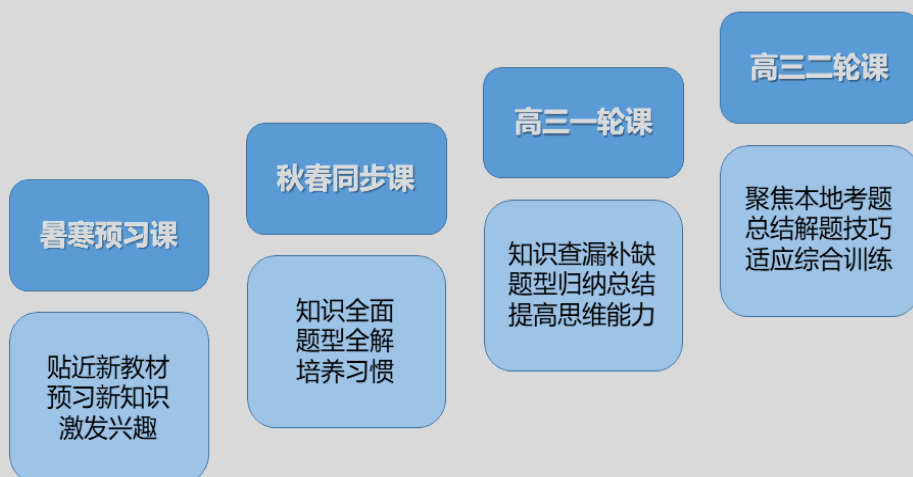
新教材改革已经如火如荼地展开，智康新产品助学助考的开发问题已成为家长和学子重点关注的焦点。应广大家长和学子的需求，我们带领最优质的高中理科教师团队制作出最新人教版教材的全模块切片产品。该系列产品能帮助学生掌握新的课程标准，让学生能够按照新教材理念科学高效的学习。该书以“三次课学懂一个模块”为宗旨，帮你轻松找到学习目标，助你走向成功。

这套产品在整体设计上有四个突出的特点：

- (1) 标准教学大纲变为专属大纲，并且可以随时调整
- (2) 讲义 + 习题册，形成测、讲、评、练学习闭环
- (3) 难度阶梯分明，在学科层次上由浅入深、给不同程度的学生都能带来持续的进步
- (4) 针对本地考卷进行大数据分析，精选例题，直击考点

如果你在使用的过程中发现有那里需要改正或者优化，希望优秀的你能够给予我更多的建议与意见，帮助我更好的提升自己。

高中理科产品课程体系



扫描右侧二维码
提出你的意见与建议吧



高二数学课程产品设计

考点占比：让同学们更加清楚本模块知识在高考中的地位。

考点分析：以大数据方式分析考试重点难点，紧扣考试热点，让同学们的复习更具针对性。

知识导图：梳理知识结构，帮助同学们形成网络状的知识图谱，更有助于对知识点的理解记忆。

典型例题：分析考试情况，精选最新的考题，让同学们清楚每一个知识点的考法。

巩固练习：匹配同类型题目，讲练结合，锻炼提升解题能力。

本模块介绍

三角函数是一类基本的、重要的函数，在数学、其他学科以及生产实践中都有广泛的应用，三角函数的学习是对函数概念的深化。

三角函数在高考中是必考内容，多以选择题的形式考三角函数的图像和性质以及图像变换。在2015年之前以解答题的形式和三角函数的概念、简单的三角恒等变换、解三角形联合考查三角函数的最值、单调区间、对称性等，属于基础题型。

目 录

第 1 讲 三角函数定义与恒等变换..... 01

- 知 识 点 1 任意角与弧度制
- 知 识 点 2 三角函数定义
- 知 识 点 3 诱导公式
- 知 识 点 4 和差角公式

第 2 讲 单调性、极值与最值.....09

- 知 识 点 1 二倍角公式
- 知 识 点 2 辅助角公式
- 知 识 点 3 综合应用

第 3 讲 三角函数图像性质.....13

- 知 识 点 1 三角函数图像性质
- 知 识 点 2 三角函数图像变换
- 知 识 点 3 综合运用

第 4 讲 三角函数综合.....23

- 知 识 点 1 根据三角函数性质求参数范围问题
- 知 识 点 2 三角恒等变换与图像综合问题
- 知 识 点 3 综合运用



我们一起开始学习吧 o (*^_^*) o



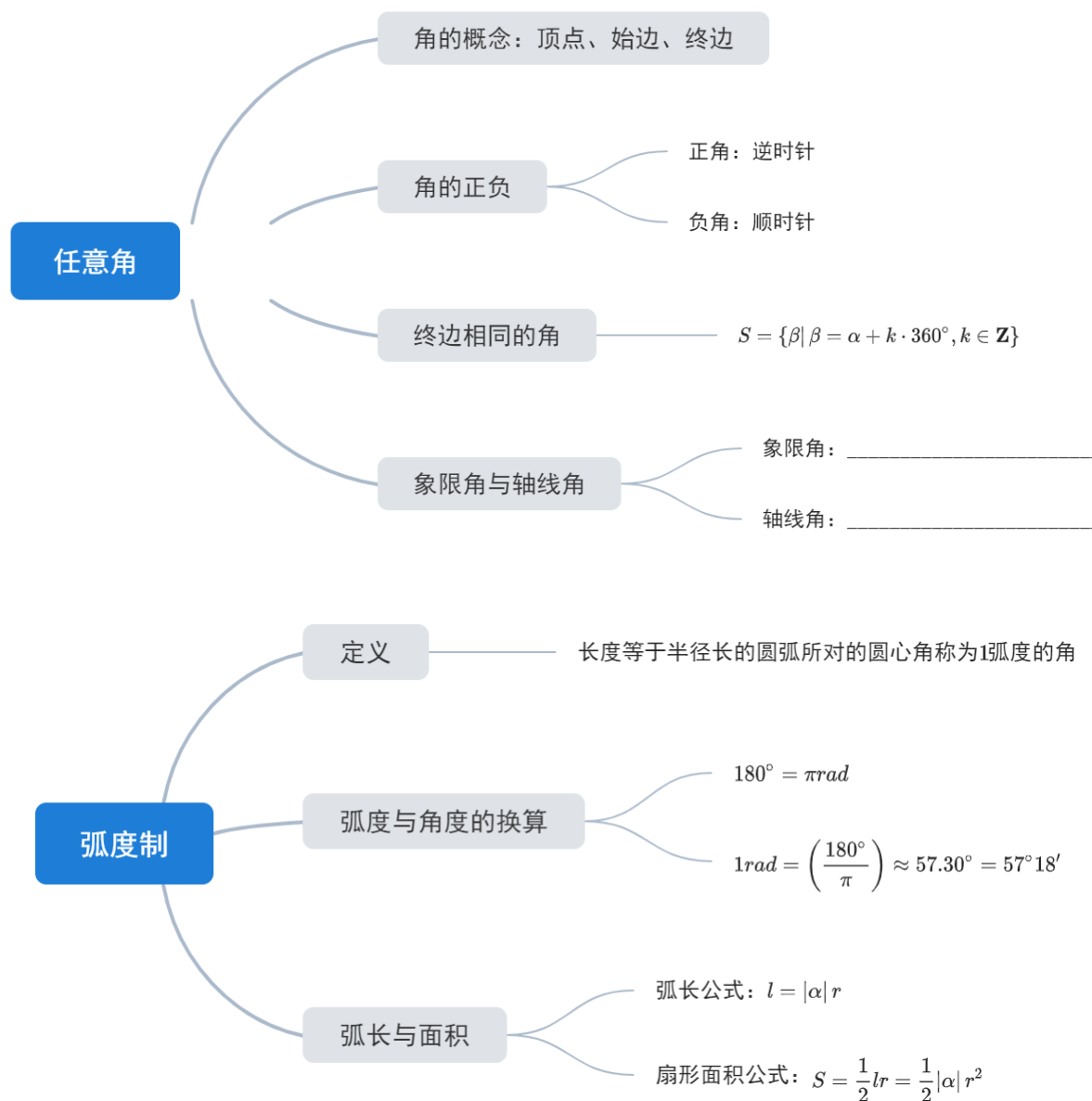
第 1 讲

三角函数定义与恒等变换





任意角与弧度制



1 圆心角为 120° 的扇形面积为 $\frac{4}{3}\pi$, 则该扇形的半径为 _____.

2 扇形的圆心角与半径相等, 面积为 4, 这个扇形的圆心角等于 ().

A. $\sqrt{4}$

B. 2

C. $\frac{\pi}{4}$

D. $\frac{\pi}{2}$

3 终边在 y 轴上的角的集合是 ().

A. $\{\alpha | \alpha = 90^\circ + k \cdot 180^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$

B. $\{\alpha | \alpha = 90^\circ + 2k \cdot 180^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$

C. $\{\alpha | \alpha = 270^\circ + 2k \cdot 180^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$

D. $\{\alpha | \alpha = 90^\circ + k \cdot 90^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$

4 设角 α 与角 β 的终边关于 x 轴对称, 则 α 与 β 的关系是 ().

A. $\alpha + \beta = 0$

B. $\alpha - \beta = 0$

C. $\alpha + \beta = 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$

D. $\alpha - \beta = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbf{Z})$

5 若扇形的圆心角 $\alpha = 120^\circ$, 弦长 $AB = 12\text{cm}$, 则弧长 $l = () \text{cm}$.

A. $\frac{4\sqrt{3}\pi}{3}$

B. $\frac{8\sqrt{3}\pi}{3}$

C. $\frac{4\pi}{3}$

D. $\frac{8\pi}{3}$



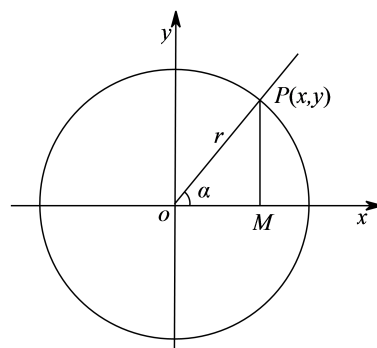
三角函数定义



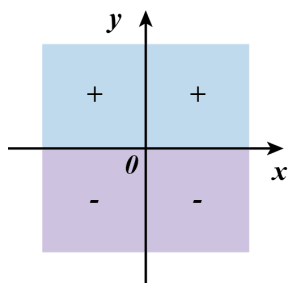
三角函数定义

在直角坐标系中, 设 α 是一个任意角, α 终边上任意一点 P (除了原点) 的坐标为 (x, y) , 它与原点的距离为 $r (r = \sqrt{|x|^2 + |y|^2} = \sqrt{x^2 + y^2} > 0)$, 那么:

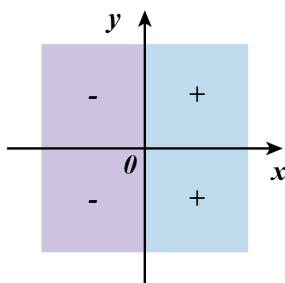
- ① 比值 $\frac{y}{r}$ 叫做 α 的正弦, 记作 $\sin \alpha$, 即 $\sin \alpha = \frac{y}{r}$;
- ② 比值 $\frac{x}{r}$ 叫做 α 的余弦, 记作 $\cos \alpha$, 即 $\cos \alpha = \frac{x}{r}$;
- ③ 比值 $\frac{y}{x}$ 叫做 α 的正切, 记作 $\tan \alpha$, 即 $\tan \alpha = \frac{y}{x} (x \neq 0)$.



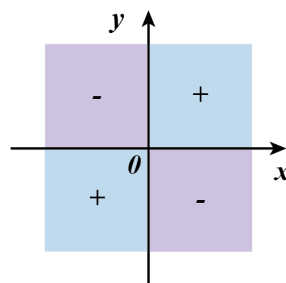
三角函数符号



$\sin \alpha$



$\cos \alpha$



$\tan \alpha$

记忆口诀: 一全正, 二正弦, 三正切, 四余弦.



同角三角函数基本关系

(1) 平方和关系: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$;

(2) 商的关系: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.



三角函数符号

- 6 若 $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{5}{4}$, 则终边过点 $(\sin \alpha, \tan \alpha)$ 的角是 ().
- A. 第一象限角 B. 第二象限角 C. 第三象限角 D. 第四象限角
- 7 已知 $\theta \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi\right)$, 那么点 $P(\cos \theta - \sin \theta, \cos \theta + \sin \theta)$ 所在的象限是 ().
- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限



同角三角函数基本关系

- 8 已知 $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{3}$, 则 $\sin \alpha \cos \alpha =$ ____.
- 9 已知 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 则 $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha$ 的值为 ().
- A. $-\frac{1}{5}$ B. $-\frac{3}{5}$ C. $\frac{1}{5}$ D. $\frac{3}{5}$



分式齐次式

- 10 已知 $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{3}$, 则 $\cos\left(\alpha + \frac{17\pi}{12}\right)$ 的值等于 ().
- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ C. $-\frac{1}{3}$ D. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$
- 11 已知 $\sin 2\alpha = \frac{1}{3}$, 则 $\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right) =$ ().
- A. $-\frac{1}{3}$ B. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ C. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ D. $\frac{1}{3}$
- 12 如果 $\cos(\pi + \alpha) = -\frac{1}{3}$, 那么 $\sin\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right)$ 等于 ().
- A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ B. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $-\frac{1}{3}$
- 13 已知 $\frac{\sin \alpha - 2 \cos \alpha}{3 \sin \alpha + 5 \cos \alpha} = 2$, 则 $\tan \alpha$ 的值为 ().
- A. $\frac{12}{5}$ B. $-\frac{12}{5}$ C. $\frac{5}{12}$ D. $-\frac{5}{12}$
- 14 已知 $\tan \theta = 2$, 则 $\sin^2 \theta + \sin \theta \cos \theta - 2 \cos^2 \theta$ 的值为 ____.

15 已知 $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = 2$, 计算下列各式的值.

(1) $\frac{3 \sin \alpha - \cos \alpha}{2 \sin \alpha + 3 \cos \alpha}$.

(2) $\sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha + 1$.



诱导公式

公式一	$\sin(\alpha + k \cdot 2\pi) = \sin \alpha, \cos(\alpha + k \cdot 2\pi) = \cos \alpha,$ $\tan(\alpha + k \cdot 2\pi) = \tan \alpha$ (其中 $k \in \mathbb{Z}$)
公式二	$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha, \cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha, \tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$
公式三	$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha, \cos(-\alpha) = \cos \alpha, \tan(-\alpha) = -\tan \alpha$
公式四	$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha, \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha, \tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$
公式五	$\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos \alpha, \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin \alpha$
公式六	$\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos \alpha, \cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin \alpha$

意义: $k \cdot \frac{\pi}{2} \pm \alpha$ ($k \in \mathbb{Z}$) 的三角函数值

记忆方法一: 奇变偶不变, 符号看象限.

记忆方法二: 无论 α 是多大的角, 都将 α 看成锐角.

16 已知 $\frac{\sin(\frac{3\pi}{2} - a) \cos(\frac{\pi}{2} + a)}{\cos(\pi - a) \sin(3\pi - a) \sin(-\pi - a)} = 3$.

(1) 求 $\sin a$ 的值.

(2) 当 a 为第三象限角时, 求 $\cos a, \tan a$ 的值.

17 已知角 α 终边上的一点 $P(7m, -3m) (m \neq 0)$.

(1) 求 $\frac{\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) \sin(-\pi - \alpha)}{\cos(\frac{11\pi}{2} - \alpha) \sin(\frac{9\pi}{2} + \alpha)}$ 的值.

(2) 求 $\sin \alpha \cos \alpha - \cos^2 \alpha$ 的值.

18 已知 α 是第三象限角, 且 $f(\alpha) = \frac{\sin(\alpha - \frac{\pi}{2}) \cos(\frac{3\pi}{2} + \alpha) \tan(\pi - \alpha)}{\tan(-\alpha - \pi) \cdot \sin(-\pi - \alpha)}$.

(1) 化简 $f(\alpha)$.

(2) 若 $\cos(\alpha - \frac{3\pi}{2}) = \frac{1}{5}$, 求 $f(\alpha)$ 的值.



和差角公式

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$



三角函数的给值求值问题

19 若 $\tan \alpha = \frac{1}{3}$, $\tan(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}$, 则 $\tan \beta = (\quad)$.

A. $\frac{1}{7}$

B. $\frac{1}{6}$

C. $\frac{5}{7}$

D. $\frac{5}{6}$

20 已知 $\cos \alpha = \frac{1}{3}$, $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{1}{3}$, 且 $\alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$, 则 $\cos(\alpha - \beta)$ 的值等于 $(\quad)$.

A. $-\frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $-\frac{1}{3}$

D. $\frac{23}{27}$

21 已知 $\tan(\alpha + \beta) = \frac{2}{3}$, $\tan\left(\beta - \frac{\pi}{4}\right) = -1$, 则 $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) =$ _____.

22 设 α 与 β 均为锐角, 且 $\cos \alpha = \frac{1}{7}$, $\sin(\alpha + \beta) = \frac{5\sqrt{3}}{14}$, 则 $\cos \beta$ 的值为 ().

A. $\frac{71}{98}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{71}{98}$ 或 $\frac{1}{2}$ D. $\frac{71}{98}$ 或 $\frac{59}{98}$

23 若 $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = 3$, $\tan(\alpha - \beta) = 2$, 则 $\tan(\beta - 2\alpha) =$ _____.



三角函数的给值求角问题

24 已知 $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos\left(\beta + \frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\alpha, \beta \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$, 则 $\alpha + \beta =$ _____.

25 已知 $\alpha, \beta \in (0, \pi)$, 且 $\tan(\alpha - \beta) = \frac{1}{2}$, $\tan \beta = -\frac{1}{7}$, 则 $2\alpha - \beta =$ _____.

26 已知 $\cos \alpha = \frac{1}{7}$, $\cos(\alpha - \beta) = \frac{13}{14}$, 且 $0 < \beta < \alpha < \frac{\pi}{2}$. 求 β 的值.

27 已知 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos \beta = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 则 $\alpha + \beta$ 的值为 ().

A. $\frac{3\pi}{4}$ B. $\frac{\pi}{2}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{3\pi}{4}$

第 2 讲

三角恒等变换综合





二倍角公式

$$(1) \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha;$$

$$\text{变形形式 } \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha.$$

$$(2) \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1; \text{ 变形形式 } \cos^2 \alpha = \frac{\cos 2\alpha + 1}{2};$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}.$$

$$(3) \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}.$$



直接利用二倍角公式

1 已知 $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 则 $\tan 2\alpha =$ _____.

2 已知 $\tan \theta = 2$, 则 $\cos 2\theta =$ _____.

3 若 $\theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos 2\theta = -\frac{1}{8}$, 则 $\sin \theta =$ ().

A. $\frac{3}{5}$

B. $\frac{3}{4}$

C. $\frac{\sqrt{7}}{4}$

D. $\frac{4}{5}$

4 已知 $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$, α 为第二象限角, 则 $\tan \frac{\alpha}{2}$ 的值为 ().

A. $\sqrt{2}$

B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $-\sqrt{2}$

D. $2\sqrt{2}$

5 若 $\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \frac{4}{5}$, 则 $\cos\left(\frac{2\pi}{3} - 2x\right)$ 的值为 ().

A. $-\frac{24}{25}$

B. $\frac{24}{25}$

C. $\frac{7}{25}$

D. $-\frac{7}{25}$

6 设 α 为锐角, 若 $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{4}{5}$, 则 $\sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{12}\right)$ 的值为_____.

7 若 $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, 且 $3 \cos 2\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$, 则 $\sin 2\alpha$ 的值为 ().

A. $\frac{1}{18}$

B. $-\frac{1}{18}$

C. $\frac{17}{18}$

D. $-\frac{17}{18}$



二倍角公式与诱导公式结合

8 设 $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) = \frac{1}{3}$, 则 $\sin 2\theta =$ ().

A. $-\frac{7}{9}$

B. $-\frac{1}{9}$

C. $\frac{1}{9}$

D. $\frac{7}{9}$

- 9 若 $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{3}{5}$, 则 $\sin 2\alpha = (\quad)$.
 A. $\frac{7}{25}$ B. $-\frac{7}{25}$ C. $-\frac{1}{5}$ D. $\frac{1}{5}$
- 10 若 $\sin\left(\frac{\pi}{12} - \alpha\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 则 $\sin\left(2\alpha - \frac{2\pi}{3}\right) = (\quad)$.
 A. $\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
- 11 已知 α 满足 $\cos 2\alpha = \frac{7}{9}$, 则 $\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = (\quad)$.
 A. $\frac{7}{18}$ B. $\frac{25}{18}$ C. $-\frac{7}{18}$ D. $-\frac{25}{18}$
- 12 已知 θ 是第四象限角, 且 $\cos \theta = \frac{4}{5}$, 那么 $\frac{\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)}{\cos(2\theta - 6\pi)}$ 的值为 _____.
- 13 已知 $\sin 2\alpha = \frac{2}{3}$, 则 $\cos^2\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = (\quad)$.
 A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{2}{3}$



辅助角公式

$$y = a \sin \alpha + b \cos \alpha = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin \alpha + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \alpha \right) = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\alpha + \varphi),$$

其中 φ 所在的象限由 a 、 b 的符号确定, φ 角的值由 $\tan \varphi = \frac{b}{a}$ 确定.

- 14 已知 $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) + \sin \alpha = \frac{4}{5}\sqrt{3}$, 则 $\sin\left(\alpha + \frac{7}{6}\pi\right)$ 的值是 $(\quad)$.
 A. $\frac{4}{5}$ B. $-\frac{4}{5}$ C. $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ D. $-\frac{2}{3}\sqrt{3}$
- 15 已知 $\sin \theta + \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = 1$, 则 $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = (\quad)$.
 A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- 16 若 $3 \cos \alpha - \sqrt{3} \sin \alpha = A \sin(\alpha + \varphi)$, 则 A, φ 的值分别为 $(\quad)$.
 A. $2\sqrt{3}, -\frac{\pi}{3}$ B. $-2\sqrt{3}, \frac{\pi}{6}$ C. $2\sqrt{3}, \frac{2\pi}{3}$ D. $2\sqrt{3}, -\frac{\pi}{6}$
- 17 计算: $\frac{1}{\sin 15^\circ} + \frac{1}{\cos 15^\circ} = \underline{\hspace{2cm}}$.



综合应用

18 若 $\frac{\cos 2\alpha}{\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, 则 $\sin \alpha + \cos \alpha =$ _____.

19 计算 $\frac{\sin 110^\circ \sin 20^\circ}{\cos^2 155^\circ - \sin^2 155^\circ}$ 的值为 _____.

20 已知 $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$, 且 $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$, 则 $\frac{2\sin^2 \alpha + \sin 2\alpha}{\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)} =$ _____.

21 已知 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 且 $2\sin^2 \alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha - 3\cos^2 \alpha = 0$, 则 $\frac{\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)}{\sin 2\alpha + \cos 2\alpha + 1} =$ _____.

22 已知 $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{1}{2}$, 则 $\frac{\sin(2\alpha + 2\pi) - \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{1 - \cos(\pi - 2\alpha) + \sin^2 \alpha}$ 的值为 _____.

第 3 讲

三角函数图像性质



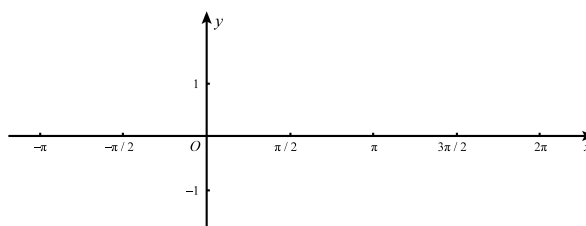


三角函数图像性质



正弦函数的图像与性质

(1) 图像:



(2) 定义域: ____.

(3) 值域: ____.

(4) 单调性: _____ 为增函数; _____ 为减函数.

(5) 奇偶性: ____.

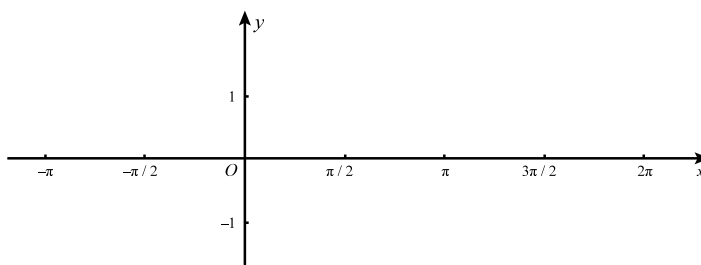
(6) 最小正周期: ____.

(7) 对称性: 对称轴 _____; 对称中心 _____.



余弦函数的图像与性质

(1) 图像



(2) 定义域: ____.

(3) 值域: ____.

(4) 单调性: _____ 为增函数; _____ 减函数.

(5) 奇偶性: ____.

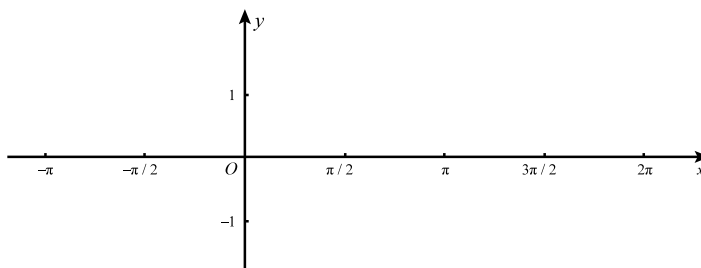
(6) 最小正周期: ____.

(7) 对称性: 对称轴 _____; 对称中心 _____.



正切函数的图像与性质

(1) 图像:



(2) 定义域: _____.

(3) 值域: _____.

(4) 单调性: 在 _____ 增函数.

(5) 奇偶性: _____.

(6) 最小正周期: _____.

(7) 对称性: 对称中心 _____.



单调性问题

1 下列四个函数中, 以 π 为最小正周期, 且在区间 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 上为减函数的是 ().

A. $y = \sin 2x$

B. $y = 2|\cos x|$

C. $y = \cos \frac{x}{2}$

D. $y = \tan(-x)$

2 $y = |\cos x|$ 的一个单调递增区间是 ().

A. $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

B. $[0, \pi]$

C. $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$

D. $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$

3 下列各式中正确的是 ().

A. $\tan \frac{3\pi}{5} > \tan \frac{\pi}{5}$

B. $\tan 2 > \tan 3$

C. $\cos\left(-\frac{17\pi}{4}\right) > \cos\left(-\frac{23\pi}{5}\right)$

D. $\sin\left(-\frac{\pi}{18}\right) < \sin\left(-\frac{\pi}{10}\right)$



值域问题

4 函数 $f(x) = \cos x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$ 的值域为 _____.

5 在 $x \in [0, 2\pi]$ 上满足 $\cos x \leq \frac{1}{2}$, x 的取值范围是 ().

A. $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$

B. $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$

C. $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$

D. $\left[\frac{5\pi}{3}, \pi\right]$



- 6 已知函数 $y = 2\cos x$ 的定义域为 $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$, 值域为 $[a, b]$, 则 $b - a$ 的值是 ().
- A. 2 B. 3 C. $\sqrt{3} - 2$ D. $2 - \sqrt{3}$



包罗万象 举一千从

- 7 关于函数 $f(x) = \sin|x| + |\sin x|$ 有下述四个结论:

- ① $f(x)$ 是偶函数
② $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 上单调递增
③ $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上有 4 个零点
④ $f(x)$ 的最大值为 2

其中所有正确结论的编号是 ()

- A. ①②④ B. ②④ C. ①④ D. ①③
- 8 对于函数 $f(x) = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x) - \frac{1}{2}|\sin x - \cos x|$, 有下列说法:

- ① $f(x)$ 的值域为 $[-1, 1]$;
② 当且仅当 $x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} (k \in \mathbf{Z})$ 时, 函数 $f(x)$ 取得最大值;
③ 函数 $f(x)$ 的最小正周期是 π ;
④ 当且仅当 $x \in \left(2k\pi, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) (k \in \mathbf{Z})$ 时, $f(x) > 0$.

其中正确结论的个数是 ().

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4



三角函数图像变换

三角函数图像变换

平移变换

伸缩变换

振幅变换



正弦型函数的性质

- (1) 定义域: ____.
- (2) 值域: ____.
- (3) 最小正周期: ____.
- (4) 单调性: ① $A\omega > 0$, 增区间: _____;
减区间: _____.
- ② $A\omega < 0$, 增区间: _____;
减区间: _____.
- (5) 对称性: 对称轴 _____; 对称中心 _____.



图像变换问题

- 9 先将函数 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位, 再将所得的图象上所有点的横坐标变为原来的 2 倍 (纵坐标不变), 得到函数 $g(x)$ 的图象, 则函数 $g(x)$ 的解析式为 _____.
- 10 为了得到函数 $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象, 可以将函数 $y = \cos 2x$ 的图象 ().
- A. 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度 B. 向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度
- C. 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度 D. 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度

- 11 为了得到函数 $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象, 只需要把函数 $y = \cos x$ 的图象上 ().
- A. 各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍, 再向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位
 B. 各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍, 再向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位
 C. 各点的横坐标缩短到原来的 2 倍, 再向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位
 D. 各点的横坐标缩短到原来的 2 倍, 再向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位
- 12 已知函数 $f(x) = \sin x$, $g(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ 将 $f(x)$ 的图象经过下列哪种变换可以与 $g(x)$ 的图象重合 ().
- A. 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位, 再把各点的横坐标缩短到原来 $\frac{1}{2}$
 B. 向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位, 再把各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$
 C. 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位, 再把各点的横坐标伸长到原来的 2 倍
 D. 向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位, 再把各点的横坐标伸长到原来的 2 倍
- 13 已知函数 $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$, 函数 $g(x)$ 的图象由 $f(x)$ 图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度得到, 则下列关于函数 $g(x)$ 的说法正确的是 ().
- A. $g(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 对称
 B. $g(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$ 对称
 C. $g(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{24}, \frac{5\pi}{24}\right]$ 单调递增
 D. $g(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ 单调递减



图像性质问题

- 14 函数 $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 图象的对称轴方程可能是 ().
- A. $x = -\frac{\pi}{6}$ B. $x = -\frac{\pi}{12}$ C. $x = \frac{\pi}{6}$ D. $x = \frac{\pi}{12}$
- 15 函数 $y = \sin\left(2x + \frac{5\pi}{2}\right)$ 的一个对称中心是 ().
- A. $\left(\frac{\pi}{8}, 0\right)$ B. $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$ C. $\left(-\frac{\pi}{3}, 0\right)$ D. $\left(\frac{3\pi}{8}, 0\right)$
- 16 函数 $y = 2\sin\left(3x + \varphi\right)$ ($|\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的一条对称轴为 $x = \frac{\pi}{12}$, 则 $\varphi =$ ().
- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. $-\frac{\pi}{4}$
- 17 函数 $f(x) = \frac{1}{3}\tan\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{4}\right)$ 的单调递增区间为 ().
- A. $\left(2k - \frac{3}{2}, 2k + \frac{1}{2}\right), k \in \mathbf{Z}$ B. $\left(2k - \frac{1}{2}, 2k + \frac{1}{2}\right), k \in \mathbf{Z}$
 C. $\left(4k - \frac{1}{2}, 4k + \frac{1}{2}\right), k \in \mathbf{Z}$ D. $\left(4k - \frac{3}{2}, 4k + \frac{1}{2}\right), k \in \mathbf{Z}$

- 18 已知 $\omega > 0$, $0 < \varphi < \pi$, 直线 $x = \frac{\pi}{4}$ 和 $x = \frac{5\pi}{4}$ 是函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象的两条相邻的对称轴, 则 $\varphi =$ ().
- A. $\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{2}$ D. $\frac{3\pi}{4}$
- 19 将函数 $y = \sin(2x + \varphi)$ 的图象沿 x 轴向左平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位后, 得到一个偶函数的图象, 则 φ 的一个可能取值为 ().
- A. $\frac{3\pi}{4}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. 0 D. $-\frac{\pi}{4}$
- 20 将函数 $y = \sin(6x + \frac{\pi}{4})$ 图象上各点的横坐标伸长到原来的 3 倍, 再向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位, 得到的函数的一个对称中心是 ().
- A. $(\frac{\pi}{2}, 0)$ B. $(\frac{\pi}{4}, 0)$ C. $(\frac{\pi}{9}, 0)$ D. $(\frac{\pi}{16}, 0)$
- 21 若函数 $f(x) = \cos(2x + \varphi)$ 的图象关于点 $(\frac{4\pi}{3}, 0)$ 成中心对称, 且 $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$, 则函数 $y = f(x + \frac{\pi}{3})$ 为 ().
- A. 奇函数且在 $(0, \frac{\pi}{4})$ 内单调递增 B. 偶函数且在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内单调递增
- C. 偶函数且在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内单调递减 D. 奇函数且在 $(0, \frac{\pi}{4})$ 内单调递减

豪厘不伐 将用斧柯

- 22 函数 $f(x) = 3 \sin(\frac{2\pi}{3} - 2x)$ 的一个单调递增区间是 ().
- A. $[\frac{7\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}]$ B. $[\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}]$ C. $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ D. $[-\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$

包罗万象 举一干从

- 23 设函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ (A, ω, φ 是常数, $A > 0$, $\omega > 0$). $f(x)$ 在区间 $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$ 上具有单调性, $f(\frac{\pi}{2}) = f(\frac{2\pi}{3}) = -f(\frac{\pi}{6})$, 则 $f(x)$ 的最小正周期为_____.



综合运用



性质综合

- 24 已知函数 $f(x) = \sin(3x + \varphi)$ $\left(-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$ 图象关于直线 $x = \frac{\pi}{4}$ 对称, 则 ().
- A. 函数 $f\left(x + \frac{\pi}{12}\right)$ 为奇函数
- B. 函数 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{3}\right]$ 上单调递增
- C. 若 $|f(x_1) - f(x_2)| = 2$, 则 $|x_1 - x_2|$ 的最小值为 $\frac{\pi}{3}$
- D. 函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度得到函数 $y = -\cos 3x$ 的图象
- 25 已知函数 $f(x) = (a \sin x + \cos x) \cos x - \frac{1}{2}$ 的图象的一条对称轴为 $x = \frac{\pi}{6}$, 则下列结论中正确的是 ().
- A. $f(x)$ 是最小正周期为 π 的奇函数
- B. $\left(-\frac{7\pi}{12}, 0\right)$ 是 $f(x)$ 图象的一个对称中心
- C. $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$ 上单调递增
- D. 先将函数 $y = 2 \sin 2x$ 图象上各点的纵坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$, 然后把所得函数图象再向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度, 即可得到函数 $f(x)$ 的图象
- 26 已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ $\left(A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}\right)$, 函数的最大值是 2, 其图象相邻两条对称轴之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$, 且 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 对称, 则下列判断正确的是 ().
- A. 要得到函数 $f(x)$ 的图象, 只需将 $y = 2 \cos 2x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位
- B. $x \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$ 时, 函数 $f(x)$ 的最小值是 -2
- C. 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = -\frac{7\pi}{12}$ 对称
- D. 函数 $f(x)$ 在 $\left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$ 上单调递增



根据图像求解析式问题

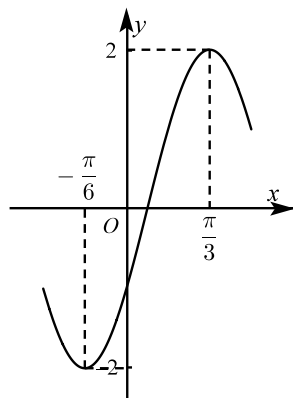
27 函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的部分图象如图所示, 则 ().

A. $y = 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$

B. $y = 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$

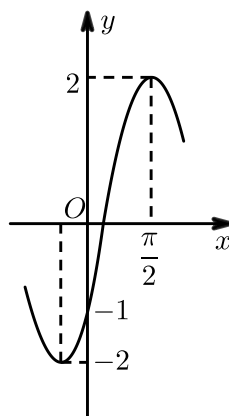
C. $y = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

D. $y = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$



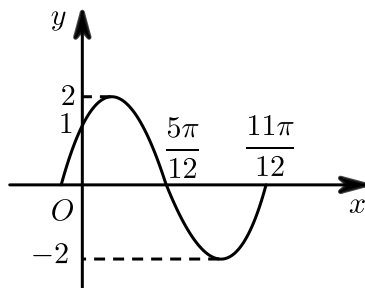
28 函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示, 则 $\varphi =$ _____ ,

$\omega =$ _____ .

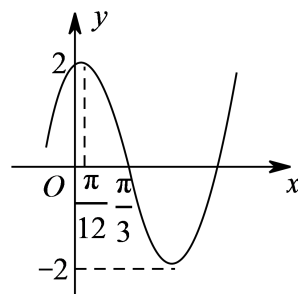


豪厘不伐 将用斧柯

29 已知函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的图象如下, 则 φ 的值为 _____ .

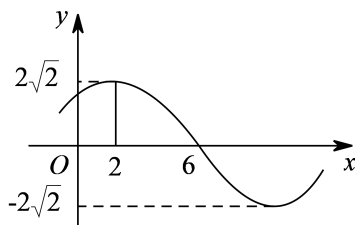


- 30 已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如右图所示, 则 $\varphi =$ ().



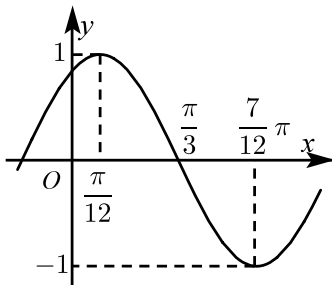
- A. $-\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{6}$ C. $-\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{3}$

- 31 函数 $y = 2\sqrt{2} \sin(\omega x + \varphi)$ (其中 $\omega > 0, 0 < \varphi < \pi$) 的图象的一部分如图所示, 则 ().



- A. $\omega = \frac{\pi}{8}, \varphi = \frac{3\pi}{4}$ B. $\omega = \frac{\pi}{8}, \varphi = \frac{\pi}{4}$ C. $\omega = \frac{\pi}{4}, \varphi = \frac{\pi}{2}$ D. $\omega = \frac{\pi}{4}, \varphi = \frac{3\pi}{4}$

- 32 如图, 函数 $f(x)$ 的图象是由正弦曲线或余弦曲线经过变换得到的, 则 $f(x)$ 的解析式可以是 ().



- A. $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ B. $f(x) = \sin\left(4x + \frac{\pi}{6}\right)$
C. $f(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ D. $f(x) = \cos\left(4x + \frac{\pi}{6}\right)$

第 4 讲

三角函数综合





根据三角函数性质求参数范围问题

- 1 将函数 $f(x) = \sin \omega x$ ($\omega > 0$) 的图像向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度, 所得图像经过点 $(\frac{3\pi}{4}, 0)$, 则 ω 的最小值是 ().
 A. $\frac{1}{3}$ B. 1 C. $\frac{5}{3}$ D. 2
- 2 若将函数 $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{6})$ ($\omega > 0$) 的图象沿 x 轴向右平移 $\frac{2\pi}{3}$ 个单位长度所得图象过点 $(\frac{\pi}{2}, 0)$, 则 ω 的最小值是 ().
 A. 19 B. 13 C. 7 D. 1
- 3 已知函数 $f(x) = 2 \sin(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{5})$. 若对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 都有 $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ 成立, 则 $|x_1 - x_2|$ 的最小值是 ____.
- 4 已知函数 $f(x) = \sin 2\pi x - \sqrt{3} \cos 2\pi x$, 若存在实数 x_1, x_2 对任意实数 x 总有 $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ 成立, 则 $|x_1 - x_2|$ 的最小值为 ____.
- 5 已知函数 $f(x) = \sin x - \sqrt{3} \cos x$, $f(x_1) + f(x_2) = 0$, 且函数 $f(x)$ 在 (x_1, x_2) 上具有单调性, 则 $|x_1 + x_2|$ 的最小值为 ().
 A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{4\pi}{3}$
- 6 已知函数 $f(x) = 2 \sin(\omega x + \frac{\pi}{4})$ ($\omega > 0$) 的图象在区间 $[0, 1]$ 上恰有 3 个最高点, 则 ω 的取值范围为 ().
 A. $[\frac{19\pi}{4}, \frac{27\pi}{4})$ B. $[\frac{9\pi}{2}, \frac{13\pi}{2})$ C. $[\frac{17\pi}{4}, \frac{25\pi}{4})$ D. $[4\pi, 6\pi)$
- 7 已知函数 $f(x) = \cos(\omega x - \frac{\pi}{3})$ ($\omega > 0$) 且 $f(\frac{2\pi}{3}) = f(\frac{5\pi}{6})$, 若 $f(x)$ 在区间 $(\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6})$ 上有最大值, 无最小值, 则 ω 的最大值为 ().
 A. $\frac{4}{9}$ B. $\frac{28}{9}$ C. $\frac{52}{9}$ D. $\frac{100}{9}$
- 8 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| \leq \frac{\pi}{2}$), $x = -\frac{\pi}{4}$ 为 $f(x)$ 的零点, $x = \frac{\pi}{4}$ 为 $y = f(x)$ 图象的对称轴, 且 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{36})$ 单调, 则 ω 的最大值为 ().
 A. 11 B. 9 C. 7 D. 5

精进不休 日新月异

- 9 已知函数 $f(x) = \cos^2 \frac{\omega x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \omega x - \frac{1}{2}$, ($\omega > 0, x \in \mathbf{R}$), 若 $f(x)$ 在区间 $(\pi, 2\pi)$ 内没有零点, 则 ω 的取值范围是 ().

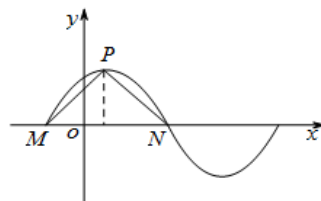
A. $(0, \frac{5}{12}]$ B. $(0, \frac{5}{12}] \cup [\frac{5}{6}, \frac{11}{12})$
C. $(0, \frac{5}{6}]$ D. $(0, \frac{5}{12}] \cup [\frac{5}{6}, \frac{11}{12}]$

- 10 若函数 $f(x) = \left| \sin\left(\omega x - \frac{\pi}{4}\right) \right|$ ($\omega > 1$) 在区间 $\left[\pi, \frac{5\pi}{4}\right]$ 上单调递减, 则实数 ω 的取值范围是 _____.

包罗万象 举一反三

- 11 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| \leq \frac{\pi}{2}$), $x = -\frac{\pi}{8}$ 为 $f(x)$ 的零点, 满足 $f\left(\frac{\pi}{8} - x\right) = f\left(\frac{\pi}{8} + x\right)$, 且 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{24}\right)$ 单调, 则 ω 的最大值为 ().
- A. 6 B. 9 C. 10 D. 12

- 12 如图所示, 点 P 是函数 $y = 2 \sin(\omega x + \varphi)$ ($x \in \mathbf{R}, \omega > 0$) 图像的最高点, M, N 是图像与 x 轴的交点, 若 $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN} = 0$, 则 ω 等于 ().



A. 8 B. $\frac{\pi}{8}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{2}$



三角恒等变换与图像综合问题



单调性问题

13 已知函数 $f(x) = 2 \sin(\pi - x) \cdot \cos x + \sin^2 x - \cos^2 x$, $x \in \mathbf{R}$.

- (1) 求 $f(\frac{\pi}{2})$ 的值及函数 $f(x)$ 的最小正周期;
- (2) 求函数 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上的单调减区间.

14 已知函数 $f(x) = \cos^2 \frac{\omega x}{2} + \sqrt{3} \sin \frac{\omega x}{2} \cos \frac{\omega x}{2} - \frac{1}{2}$ ($\omega > 0$) 的最小正周期为 π .

- (1) 求 ω 的值及函数 $f(x)$ 的最大值和最小值;
- (2) 求函数 $f(x)$ 的单调递增区间.



值域问题

15 已知函数 $f(x) = 2 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x$.

- (1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期;
- (2) 当 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 时, 求函数 $f(x)$ 的最大值及取得最大值时的 x 值.

16 已知函数 $f(x) = 2\sqrt{3}\sin(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})\cos(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}) - \sin(x + \pi)$.

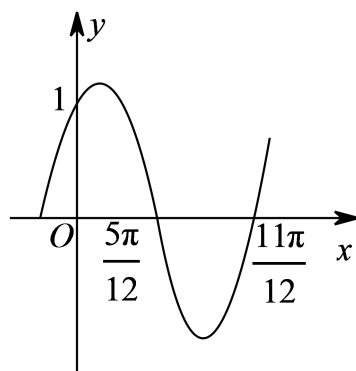
(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期;

(2) 若将 $f(x)$ 的图像向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位, 得到函数 $g(x)$ 的图像, 求函数 $g(x)$ 在区间 $[0, \pi]$ 上的最大值和最小值.

17 已知函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($x \in \mathbf{R}, \omega > 0, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示.

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式.

(2) 求函数 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ 上的最大值与最小值.



包罗万象 举一反三

18 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, 0 \leq \varphi \leq \pi$) 为偶函数, 其图像上相邻的两个最高点之间的距离为 2π .

(1) 求 $f(x)$ 的解析式.

(2) 若 $\alpha \in (-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$, $f(\alpha + \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{3}$ 求 $\sin(2\alpha + \frac{5\pi}{3})$ 的值.