

随机变量及其分布练习题

一、条件概率

1. 从1, 2, 3, 4, 5中任取2个不同的数, 事件 A = “取到的2个数之和为偶数”, 事件 B = “取到的2个数均为偶数”, 则 $P(B|A) = ()$.
- A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{1}{2}$

【答案】 B

【解析】 $P(A) = \frac{C_3^2 + C_2^2}{C_5^2} = \frac{2}{5}$, $P(AB) = \frac{C_2^2}{C_5^2} = \frac{1}{10}$, $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{1}{4}$. 故答案为B.

【标注】 【知识点】 随机变量及其分布

2. 一个盒子中装有4只产品, 其中3只一等品, 1只二等品, 从中取产品两次, 每次任取1只, 做不放回抽样. 设事件 A 为“第一次取到的是一等品”, 事件 B 为“第二次取到的是一等品”, 则 $P(B|A) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{2}{3}$

【解析】 由题意可知 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}$.

【标注】 【知识点】 条件概率

3. 袋子里有大小相同的3个红球和4个黑球, 今从袋子里随机取球.
- (1) 若有放回地取3次, 每次取1个球, 求取出1个红球2个黑球的概率;
- (2) 若无放回地取3次, 每次取1个球.
- 求在前2次都取出红球的条件下, 第3次取出黑球的概率;

【答案】 (1) $\frac{144}{343}$;

(2) 在前2次都取出红球的条件下, 第3次取出黑球的概率是 $\frac{4}{5}$.

【解析】 (1) 记“取出1个红球2个黑球”为事件 A , 根据题意有

$$P(A) = C_3^1 \left(\frac{3}{7}\right) \times \left(\frac{4}{7}\right)^2 = \frac{144}{343};$$

所以取出1个红球2个黑球的概率是 $\frac{144}{343}$.

(2) 方法一：记“在前2次都取出红球”为事件 B ，“第3次取出黑球”为事件 C ，则

$$P(B) = \frac{3 \times 2}{7 \times 6} = \frac{1}{7}, P(BC) = \frac{3 \cdot 2 \cdot 4}{7 \cdot 6 \cdot 5} = \frac{4}{35}, \text{ 所以 } P(C|B) = \frac{P(BC)}{P(B)} = \frac{\frac{4}{35}}{\frac{1}{7}} = \frac{4}{5}.$$

$$\text{方法二：} P(C|B) = \frac{n(BC)}{n(B)} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 5} = \frac{4}{5}.$$

所以在前2次都取出红球的条件下，第3次取出黑球的概率是 $\frac{4}{5}$ 。

【标注】【知识点】离散型随机变量的数学期望

4. 某农民在一块耕地上种植一种作物，每年种植成本为800元，此作物的市场价格和这块地上的产量均具有随机性，且互不影响，其具体情况如下表：

作物产量(kg)	300	500
概率	0.5	0.5

作物市场价格(元/kg)	6	10
概率	0.6	0.4

- (1) 设 X 表示该农民在这块地上种植1年此作物的利润，求 X 的分布列；
 (2) 若在这块地上连续3年种植此作物，求这3年中第二年的利润少于第一年的概率。

【答案】 (1)

x	1000	2200	4200
P	0.3	0.5	0.2

(2) 0.31

【解析】 (1) 设 A 表示事件“作物产量为300kg”， B 表示事件“作物市场价格为6元/kg”，

由题意知 $P(A) = 0.5, P(B) = 0.6$.

因为利润=产量×市场价格-成本

所以 X 的所有可能的取值为

$$300 \times 6 - 800 = 1000, 300 \times 10 - 800 = 2200,$$

$$500 \times 6 - 800 = 2200, 500 \times 10 - 800 = 4200.$$

$$P(X = 1000) = P(A)P(B) = 0.5 \times 0.6 = 0.3$$

$$P(X = 2200) = P(A) \cdot P(\bar{B}) + P(\bar{A}) \cdot P(B) = 0.5 \times 0.4 + 0.5 \times 0.6 = 0.5$$

$$P(X = 4200) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) = 0.5 \times 0.4 = 0.2$$

所以 X 的分布列为

x	1000	2200	4200
P	0.3	0.5	0.2

(2) 这3年中第二年的利润少于第一年的概率为

$$P(X = 2200) \cdot P(X = 1000) + P(X = 4200) \cdot P(X = 1000) + P(X = 4200) \cdot P(X = 2200) = 0.31.$$

【标注】【知识点】离散型随机变量的数学期望；离散型随机变量的分布列

二、 随机变量定义及其分布列

5. 设某项试验的成功率是失败率的2倍，用随机变量 X 去描述1次试验的成功次数，则 $P(X=0) = ($

) .
A. 0 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{2}{3}$

【答案】 C

【解析】 设失败率为 p ，则成功率为 $2p$.

$\therefore X$ 的分布列为：

X	0	1
P	p	$2p$

则“ $X=0$ ”表示试验失败，“ $X=1$ ”表示试验成功，

$\therefore$ 由 $p+2p=1$ ，得 $p=\frac{1}{3}$ ，即 $P(X=0)=\frac{1}{3}$.

故选C .

【标注】【知识点】离散型随机变量的分布列

6. 袋中有4只红球3只黑球，从袋中任取4只球，取到1只红球得1分，取到1只黑球得3分，设得分为随机变量 ξ ，则 $P(\xi \leq 6) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{13}{35}$

【解析】 取出的4只球中红球个数可能为4, 3, 2, 1个，

黑球相应个数为0, 1, 2, 3个，其分值为 $\xi=4, 6, 8,$

$$\text{则 } P(\xi \leq 6) = P(\xi=4) + P(\xi=6) = \frac{C_4^4 C_3^0}{C_7^4} + \frac{C_4^3 C_3^1}{C_7^4} = \frac{13}{35} .$$

【标注】【知识点】超几何分布；离散型随机变量的数学期望；离散型随机变量的分布列

7. 设随机变量 ξ 的分布列为 $P(\xi=i) = a\left(\frac{1}{3}\right)^i$ ， $i=1, 2, 3$ ，则实数 a 的值为() .

A. 1 B. $\frac{9}{13}$ C. $\frac{11}{13}$ D. $\frac{27}{13}$

【答案】 D

【解析】 $\therefore$ 随机变量 ξ 的分布列为 $P(\xi=i) = a\left(\frac{1}{3}\right)^i$ ， $i=1, 2, 3$ ，

$$\therefore a \left[\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3} \right)^2 + \left(\frac{1}{3} \right)^3 \right] = 1, \text{ 解得 } a = \frac{27}{13}.$$

故选D.

【标注】【知识点】离散型随机变量的分布列

三、两点分布

8. 设 X 是一个服从两点分布的离散型随机变量，其分布列为：

X	0	1
P	$\frac{3}{2}m$	$\frac{1}{2}$

则 m 的值为() .

A. $\frac{1}{3}$

B. 3

C. $\frac{1}{2}$

D. $-\frac{1}{3}$

【答案】 A

【解析】 $\frac{3}{2}m + \frac{1}{2} = 1,$

$$\therefore \frac{3}{2}m = \frac{1}{2},$$

$$\therefore m = \frac{1}{3}.$$

故选A.

【标注】【知识点】离散型随机变量的数学期望；离散型随机变量的分布列

9. 若离散型随机变量 X 的分布列为

X	0	1
P	$9c^2 - c$	$3 - 8c$

则常数 $c = \underline{\hspace{1cm}}$, $P(X=1) = \underline{\hspace{1cm}}$.

【答案】 $\frac{1}{3}; \frac{1}{3}$

【解析】 依分布列的性质知 $\begin{cases} 9c^2 - c \geq 0 \\ 3 - 8c \geq 0 \\ 9c^2 - c + 3 - 8c = 1 \end{cases}$, 解得 $c = \frac{1}{3}$,

$$\text{故 } P(X=1) = 3 - 8 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{1}{3}; \frac{1}{3}.$$

【标注】【知识点】离散型随机变量的分布列；两点分布；概率的基本性质

四、二项分布

10. 将一枚均匀硬币随机掷4次，恰好出现2次正面向上的概率为（ ）.

A. $\frac{1}{4}$

B. $\frac{3}{8}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{5}{8}$

【答案】B

【解析】∵每掷一次硬币，正面向上的概率为 $\frac{1}{2}$ ，

∴恰好出现2次正面向上的概率为： $C_4^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$.

故选B.

【标注】【知识点】n次独立重复试验与二项分布

11. 一袋中有5个白球，3个红球，现从袋中往外取球，每次任取一个记下颜色后放回，直到红球出现10次时停止，设停止时共取了X次球，则 $P(X=12)$ 等于（ ）.

A. $C_{12}^{10} \left(\frac{3}{8}\right)^{10} \left(\frac{5}{8}\right)^2$

B. $C_{12}^9 \left(\frac{3}{8}\right)^9 \left(\frac{5}{8}\right)^2 \frac{3}{8}$

C. $C_{11}^9 \left(\frac{5}{8}\right)^9 \left(\frac{3}{8}\right)^2$

D. $C_{11}^9 \left(\frac{3}{8}\right)^{10} \left(\frac{5}{8}\right)^2$

【答案】D

【解析】 $x=12$ 时，说明第12次是红球，

前面11次中有9次红球， $P(x=12) = C_{11}^9 \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^9 \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^2 \cdot \frac{3}{8} = C_{11}^9 \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^{10} \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^2$.

【标注】【素养】数学运算

【素养】数学抽象

【知识点】n次独立重复试验与二项分布

12. 将一枚均匀的硬币抛掷6次，则正面出现的次数比反面出现的次数多的概率为 ____ .

【答案】 $\frac{11}{32}$

【解析】正面出现的次数比反面出现的次数多，则正面可以出现4次，5次或6次，

所求概率 $P = C_6^4 \left(\frac{1}{2}\right)^6 + C_6^5 \left(\frac{1}{2}\right)^6 + C_6^6 \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{11}{32}$.

【标注】【知识点】n次独立重复试验与二项分布

13. 口袋中装有大小、轻重都无差别的5个红球和4个白球，每一次从袋中摸出2个球，若颜色不同，则为中奖，每次摸球后，都将摸出的球放回口袋中，则3次摸球恰有1次中奖的概率为（ ）.
- A. $\frac{80}{243}$ B. $\frac{100}{243}$ C. $\frac{80}{729}$ D. $\frac{100}{729}$

【答案】 A

【解析】 每次摸球中奖的概率为 $\frac{C_4^1 C_5^1}{C_9^2} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$ ，由于是有放回地摸球，

故3次摸球相当于3次独立重复实验，

所以3次摸球恰有1次中奖的概率 $P = C_3^1 \times \frac{5}{9} \times \left(1 - \frac{5}{9}\right)^2 = \frac{80}{243}$.

故选A.

【标注】 【知识点】 n次独立重复试验与二项分布；超几何分布

14. 已知袋中装有除颜色外完全相同的5个球，其中红球2个，白球3个，现从中任取1球，记下颜色后放回，连续摸取3次，设 ξ 为取得红球的次数，则 $P(\xi = 2) = ()$.
- A. $\frac{4}{25}$ B. $\frac{36}{125}$ C. $\frac{9}{25}$ D. $\frac{54}{125}$

【答案】 B

【解析】 每一次摸出红球的概率 $P_1 = \frac{2}{5}$ ，

$$\begin{aligned} \therefore P(\xi = 2) &= C_3^2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{2}{5}\right) \\ &= \frac{36}{125}. \end{aligned}$$

故选B.

【标注】 【知识点】 n次独立重复试验与二项分布

15. 甲、乙两人各射击1次，击中目标的概率分别是 $\frac{2}{3}$ 和 $\frac{3}{4}$ ，假设两人射击目标是否击中相互之间没有影响，每人各次射击是否击中目标也没有影响. 则两人各射击4次，甲恰好有2次击中目标且乙恰好有3次击中目标的概率为 ____.

【答案】 $\frac{1}{8}$

【解析】 甲恰好有两次击中2次目标得概率为 $C_4^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{27}$ ，

乙恰好有两次击中3次目标的概率为 $C_4^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{27}{64}$ ，

故甲恰好有2次击中目标且乙恰好有3次击中目标的概率为 $\frac{8}{27} \times \frac{27}{64} = \frac{1}{8}$.

【标注】【知识点】n次独立重复试验与二项分布

16. 在一次抗洪抢险中，用射击方法引爆从上游漂流而下一巨大汽油罐．已知只有5发子弹备用，且首次命中只能使汽油流出，再次命中才能引爆成功．每次射击命中概率都是 $\frac{2}{3}$ ，每次命中与否互相独立，则油罐被引爆的概率为（ ）．

A. $\frac{232}{243}$ B. $\frac{230}{243}$ C. $\frac{211}{232}$ D. $\frac{211}{243}$

【答案】A

【解析】∵每次射击命中的概率都是 $\frac{2}{3}$ ，
∴每次射击不命中的概率都是 $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ ，
若油罐未被引爆，则表示5发子弹未命中或命中一次，
由每次命中与否互相独立可得：
故5发子弹未命中的概率为： $\left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1}{243}$
5发子弹命中1发的概率为： $C_5^1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \frac{2}{3} = \frac{10}{243}$ ，
故油罐被引爆的概率 $P = 1 - \frac{1}{243} - \frac{10}{243} = \frac{232}{243}$ ．
故选A．

【标注】【知识点】相互独立事件的概率乘法公式；n次独立重复试验与二项分布

17. 3名志愿者在10月1号至10月5号期间参加社区服务工作．

- (1) 若每名志愿者在这5天中任选一天参加社区服务工作，且各志愿者的选择互不影响，求3名志愿者恰好连续3天参加社区服务工作的概率；
(2) 若每名志愿者在这5天中任选两天参加社区服务工作，且各志愿者的选择互不影响，记 ξ 表示这3名志愿者在10月1号参加社区服务工作的人数，求随机变量 ξ 的分布列．

【答案】(1) $\frac{18}{125}$ ．

(2) 随机变量 ξ 的分布列为

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{27}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{8}{125}$

【解析】(1) 3名志愿者每人任选一天参加社区服务，共有 5^3 种不同的结果，这些结果出现的可能性都相等．设“3名志愿者恰好连续3天参加社区服务工作”为事件A，

则该事件共包括 $3A_3^3$ 种不同的结果. 所以 $P(A) = \frac{3A_3^3}{5^3} = \frac{18}{125}$.

答: 3名志愿者恰好连续3天参加社区服务的工作的概率为 $\frac{18}{125}$.

(2) 每名志愿者在10月1日参加社区服务的概率均为 $P = \frac{C_4^1}{C_5^2} = \frac{2}{5}$.

则三名志愿者在10月1日参加社区服务的人数 $\xi \sim B\left(3, \frac{2}{5}\right)$.

$P(\xi = i) = C_3^i \left(\frac{2}{5}\right)^i \left(\frac{3}{5}\right)^{3-i}$, $i = 0, 1, 2, 3$. 随机变量 ξ 的分布列为:

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{27}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{8}{125}$

【标注】【知识点】n次独立重复试验与二项分布

五、超几何分布

18. 有10件产品, 其中3件是次品, 从中任取两件, 若 X 表示取得次品的个数, 则 $P(X < 2)$ 等于().

A. $\frac{7}{15}$

B. $\frac{8}{15}$

C. $\frac{14}{15}$

D. 1

【答案】C

【解析】 $P(x < 2)$

$$= P(x = 0) + P(x = 1)$$

$$= \frac{C_7^2}{C_{10}^2} + \frac{C_7^1 \cdot C_3^1}{C_{10}^2}$$

$$= \frac{7}{15} + \frac{7}{15}$$

$$= \frac{14}{15}$$

故选: C.

【标注】【知识点】超几何分布

19. 已知在10件产品中可能存在次品, 从中抽取2件检查, 其次品数为 ξ , 已知 $P(\xi = 1) = \frac{16}{45}$, 且该产品的次品率不超过40%, 则这10件产品的次品率为().

A. 10%

B. 20%

C. 30%

D. 40%

【答案】B

【解析】 设10件产品中存在 n 件次品, 从中抽取2件, 其次品数为 ξ ,

$$\text{由 } P(\xi=1) = \frac{16}{45} \text{ 得, } \frac{C_n^1 \cdot C_{10-n}^1}{C_{10}^2} = \frac{16}{45},$$

化简得 $n^2 - 10n + 16 = 0$, 解得 $n = 2$ 或 $n = 8$;

又该产品的次品率不超过40%,

$\therefore n \leq 4$, 应取 $n = 2$,

$\therefore$ 这10件产品的次品率为 $\frac{2}{10} = 20\%$.

故选B.

【标注】【知识点】超几何分布

20. 某人参加一次英语口语考试, 已知在备选的10道试题中, 能答对其中的6道题, 规定每次考试都从备选题中随机抽出3道题进行测试, 求答对试题数 ξ 的概率分布.

【答案】

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{1}{30}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

【解析】 答对试题数 ξ 的可能取值为: 0, 1, 2, 3四种情况:

$$P(\xi=0) = \frac{C_4^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{30};$$

$$P(\xi=1) = \frac{C_6^1 C_4^2}{C_{10}^3} = \frac{3}{10};$$

$$P(\xi=2) = \frac{C_6^2 C_4^1}{C_{10}^3} = \frac{1}{2};$$

$$P(\xi=3) = \frac{C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{6}.$$

所以答对试题数 ξ 的概率分布列为:

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{1}{30}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

【标注】【知识点】超几何分布; 离散型随机变量的分布列

21. 某小组共10人, 利用假期参加义工活动, 已知参加义工活动次数为1, 2, 3的人数分别为3, 3, 4.

现从这10人中随机选出2人作为该组代表参加座谈会.

(1) 设A为事件“选出的2人参加义工活动次数之和为4”, 求事件A发生的概率.

(2) 设X为选出的2人参加义工活动次数之差的绝对值, 求随机变量X的分布列.

【答案】 (1) $\frac{1}{3}$.

(2) 随机变量 X 的分布列为：

X	0	1	2
P	$\frac{4}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{4}{15}$

【解析】(1) 设“选2人参加义工活动，次数之和为4”为事件 A ，

$$P(A) = \frac{C_3^1 C_4^1 + C_3^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{3} .$$

(2) 随机变量 X 可能取值 0, 1, 2,

$$P(X=0) = \frac{C_3^2 + C_3^2 + C_4^2}{C_{10}^2} = \frac{4}{15} ,$$

$$P(X=1) = \frac{C_3^1 C_3^1 + C_3^1 C_4^1}{C_{10}^2} = \frac{7}{15} ,$$

$$P(X=2) = \frac{C_3^1 C_4^1}{C_{10}^2} = \frac{4}{15} .$$

随机变量 X 的分布列为：

X	0	1	2
P	$\frac{4}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{4}{15}$

【标注】【知识点】古典概型；离散型随机变量的分布列

【题型】离散型随机变量的分布列与数字特征问题；古典概型的概率计算公式