

02组合

一、组合相关概念

1. 组合的定义

一般地，从 n 个不同元素中，任意取出 $m(m \leq n)$ 个元素并成一组，叫做从 n 个不同元素中任取 m 个元素的一个组合。

小技巧

- (1) 具体来说，组合的要求是 n 个元素不同，被取出的 m 个元素也不同，而且取出方式不放回取出；
- (2) 组合取出的 m 个元素不讲求顺序，无序性是组合的本质。例如，从 $\{a, b, c\}$ 中取出两个元素形成两个序列 ab 与 ba ，它们属于两种排列，但却是一种组合。

2. 组合数

组合数：从 n 个不同元素中，任意取出 $m(m \leq n)$ 个元素的所有组合的个数，叫做从 n 个不同元素中，任意取出 m 个元素的**组合数**，用符号 C_n^m 表示。

3. 组合数公式

组合数公式：
$$C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}, m \in \mathbf{N}, n \in \mathbf{N}_+, \text{ 并且 } m \leq n;$$
特别地，当 $m=0$ 时，有 $C_n^0=1$ 。

【补充说明】

- (1) 具体来说，组合的要求是 n 个元素不同，被取出的 m 个元素也不同，而且取出方式不放回取出；
 - (2) 组合取出的 m 个元素没有顺序要求，无序性是组合的本质。
- 例如，从 $\{a, b, c\}$ 中取出两个元素形成两个序列 ab 与 ba ，它们属于两种排列，但却是一种组合。

例1

1. 填空。

- (1) $C_8^5 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
- (2) $C_{15}^3 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
- (3) $C_{100}^{98} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

$$(4) C_{10}^3 - C_9^2 = \underline{\hspace{2cm}} .$$

$$(5) 5C_5^3 + 4C_4^2 = \underline{\hspace{2cm}} .$$

$$(6) C_9^1 C_9^2 = \underline{\hspace{2cm}} .$$

$$(7) \frac{2C_{12}^7 C_5^3}{C_{12}^{12}} = \underline{\hspace{2cm}} .$$

$$(8) \frac{4C_{10}^5 - C_{10}^4}{C_9^5 - C_9^3} = \underline{\hspace{2cm}} .$$

【答案】 (1) 56

(2) 455

(3) 4950

(4) 84

(5) 74

(6) 324

(7) 15840

(8) 19

【解析】 (1) $C_8^5 = 56$.

(2) $C_{15}^3 = 455$.

(3) $C_{100}^{98} = 4950$.

(4) $C_{10}^3 - C_9^2 = 84$

(5) $5C_5^3 + 4C_4^2 = 74$.

(6) $C_9^1 C_9^2 = 324$.

(7) $\frac{2C_{12}^7 C_5^3}{C_{12}^{12}} = 15840$.

(8) $\frac{4C_{10}^5 - C_{10}^4}{C_9^5 - C_9^3} = 19$.

【标注】【知识点】组合

2. 与 C_{n+1}^m 相等的是 () .

A. $\frac{n+1}{m} C_n^m$

B. 800

C. $(n+1)C_n^m$

D. $\frac{n+1}{n+1-m} C_n^m$

【答案】 D

【解析】 由组合数的计算公式可得 $C_{n+1}^m = \frac{(n+1)!}{m!(n+1-m)!}$,

$$\text{而 } \frac{n+1}{n+1-m} C_n^m = \frac{n+1}{n+1-m} \cdot \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{(n+1)!}{m!(n+1-m)!},$$

$$\text{故 } C_{n+1}^m = \frac{n+1}{n+1-m} C_n^m.$$

故选D.

【标注】【知识点】组合

🔔 练1

3. 假设200件产品中有3件次品，现在从中任取5件，其中至少有2件次品的抽法有（ ）种.
- A. $C_3^2 C_{198}^3$ B. $C_3^2 C_{197}^3 + C_3^3 C_{197}^2$ C. $C_{200}^5 - C_{197}^4$ D. $C_{200}^5 - C_3^1 C_{197}^4$

【答案】B

【解析】根据题意，“至少有2件次品”可分为“有2件次品”与“有3件次品”两种情况，
 “有2件次品”的抽取方法有 $C_3^2 C_{197}^3$ 种，
 “有3件次品”的抽取方法有 $C_3^3 C_{197}^2$ 种.
 则共有 $C_3^2 C_{197}^3 + C_3^3 C_{197}^2$ 种不同的抽取方法.
 故选B.

【标注】【知识点】简单的组合问题

4. 组合数的两个性质

🔔 性质一

$$C_n^m = C_n^{n-m}.$$

🔔 性质二

$$C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1}.$$

🔔 小技巧

- (1) 性质一反映了组合数的对称性：当 $m > \frac{n}{2}$ 时，不直接计算 C_n^m 而改为计算 C_n^{n-m} ，这样起到了简化运算的效果；
- (2) 要注意性质二的灵活运用：顺用可以将一个组合数拆成两个，在进行化简时此种手段可以产生抵消的效果；逆用可以将两个组合数合并为一个，求值时可以循环使用此种手段进行并项.

例2

4. $C_3^2 + C_4^2 + C_5^2 + C_6^2 = ()$.

A. 31

B. 32

C. 33

D. 34

【答案】 D

【解析】 $C_3^2 + C_4^2 + C_5^2 + C_6^2 = \frac{3 \times 2}{2 \times 1} + \frac{4 \times 3}{2 \times 1} + \frac{5 \times 4}{2 \times 1} + \frac{6 \times 5}{2 \times 1}$
 $= 3 + 6 + 10 + 15 = 34$.

故选D .

【标注】 【知识点】 组合

5. 已知 $C_{14}^{m-1} + C_{14}^m = C_{15}^{m-3}$, 则正整数 m 的值为 _____ .

【答案】 9

【解析】 $C_{14}^{m-1} + C_{14}^m = C_{15}^{m-3}$, 则 $C_{15}^m = C_{15}^{m-3}$, 则 $m = m - 3$ 或 $m + m - 3 = 15$,
解得 $m = 9$.

【标注】 【知识点】 组合数计算

练2

6. 若 $C_{m+1}^3 - C_m^3 = C_m^4$ (m 为正整数且 $m \geq 4$) , 则 $m =$ _____ .

【答案】 6

【解析】 $C_{m+1}^3 - C_m^3 = C_m^4$ (m 为正整数且 $m \geq 4$) ,
即为 $C_{m+1}^3 = C_m^3 + C_m^4 = C_{m+1}^4$,
即有 $m + 1 = 7$,
解得 $m = 6$,
故答案为 : 6 .

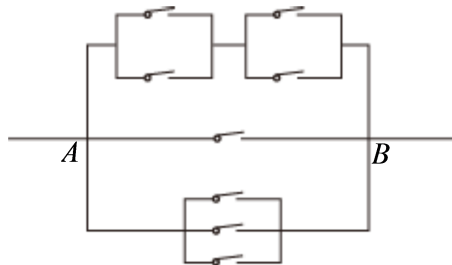
【标注】 【知识点】 组合数计算

二、 常见组合问题

1. 直接法

例1

7. 一电路图如图所示，从A到B共有 _____ 条不同的线路可通电。（用数字作答）



【答案】 8

【解析】 $C_2^1 C_2^1 + C_1^1 + C_3^1 = 8$.

【标注】 【知识点】 加法原理与乘法原理的综合运用

8. 在50件产品中有4件是次品，从中任意抽出5件，至少有三件是次品的抽法共有 _____ 种 .

【答案】 4186

【解析】 分两类，有4件次品的抽法为 $C_4^4 C_{46}^1$ 种；

有三件次品的抽法有 $C_4^3 C_{46}^2$ 种，

所以共有 $C_4^4 C_{46}^1 + C_4^3 C_{46}^2 = 4186$ （种）不同的抽法 .

【标注】 【知识点】 加法原理与乘法原理的综合运用

练1

9. 6名同学报考A，B，C三所院校，如果每一所院校至少有1人报考，则不同的报考方法共有（ ） .

A. 216种

B. 3240种

C. 729种

D. 540种

【答案】 D

【解析】 540种 .

【标注】 【知识点】 分组分配法

10. 有6名男医生，5名女医生，从中选出2名男医生，1名女医生组成一个医疗小组，则不同的选法共有（ ）.
- A. 60种 B. 70种 C. 75种 D. 150种

【答案】 C

【解析】 根据题意，先从6名男医生中选2人，有 $C_6^2 = 15$ 种选法，再从5名女医生中选出1人，有 $C_5^1 = 5$ 种选法，则不同的选法共有 $15 \times 5 = 75$ 种.
故选C.

【标注】 【知识点】 组合

11. 在手绘涂色本的某页上画有排成一列的6条未涂色的鱼，小明用红、蓝两种颜色给这些鱼涂色，每条鱼只能涂一种颜色，两条相邻的鱼不都涂成红色，涂色后，既有红色鱼又有蓝色鱼的涂色方法种数为（ ）.
- A. 14 B. 16 C. 18 D. 20

【答案】 D

【解析】 由题意得，红色鱼的条数不超过3条（否则必有2条相邻），
若红色有3条，则涂色方法为 $C_4^3 = 4$ 种，
若红色有2条，则涂色方法为 $C_5^2 = 10$ 种，
若红色有1条，则涂色方法为 $C_6^1 = 6$ 种，总计共20种.

【标注】 【知识点】 组合

2. 排除法

对于给定附加条件的问题，正面考虑情况较为复杂时，可以考察否定附加条件下问题的情况，然后从无附加条件中排除上述情况即可.

例2

12. 从5名男医生、4名女医生中选3名医生组成一个医疗小分队，要求其中男、女医生都有，则不同的组队方案共有（ ）
- A. 70种 B. 80种 C. 100种 D. 140种

【答案】A

【解析】方法一：当选择的3名医生都是男的或都是女的时候，共有 $C_5^3 + C_4^3 = 14$

种方法，

从9人中选择3人一共有 $C_9^3 = 84$ 种方法，

所以要求男女都有共有 $84 - 14 = 70$ 种组队方法．

方法二：当组队中有一名女医生时有 $C_4^1 + C_5^2 = 40$ 种组法，

当组队中有2名女医生时有 $C_4^2 + C_5^1 = 30$ 种组法，

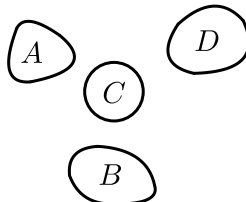
综上共有70种组队方法．

故选A．

【标注】【知识点】组合

练2

13. 如图，A、B、C、D为海上四个小岛，要建三座桥，将这四个小岛连接起来，则不同的建桥方案共有（ ）．



A. 8种

B. 12种

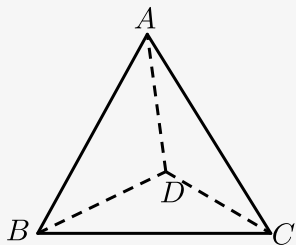
C. 16种

D. 20种

【答案】C

【解析】如图，构造三棱锥 $A - BCD$ ，四个顶点表示四个小岛，六条棱表示连接任意两岛的桥梁．由题意，只需求出从六条棱中任取三条不共面的棱的不同取法．从六条棱中任取三条棱的不同取法有 C_6^3 种，任取三条共面棱的不同取法为4种，所以从六条棱中任取三条不共面的棱的不同取法有 $C_6^3 - 4 = 16$ （种）．

故选C．



【标注】【知识点】排除法

14. A, B 之间有6条网线并联, 它们通过的最大信息量分别为1, 1, 2, 2, 3, 4, 现从中任取3条网线, 使这3条网线通过的最大信息量的和不小于6的取法共有()种.

A. 12

B. 13

C. 14

D. 15

【答案】D

【解析】信息量小于6的包括“1, 1, 2”, “1, 2, 2”, “1, 1, 3”共5种, 则信息量的和不小于6的取法有 $C_6^3 - 5 = 15$ 种.

【标注】【知识点】排除法

3. 分组分配法

分堆问题的特点是堆与堆之间的区别仅仅是元素个数, 而不强调元素本身, 因此若出现了若干组元素个数相同的情况, 在采取分步乘法计数原理处理问题之后还需要做除序处理.

(1) 不均匀分堆

【模型】 n 个不同元素分成 m 堆, 每堆元素数目均不相等, 求其分法种数.

【实例】10本书分成2, 3, 5三堆, 其分法种数为 $C_{10}^2 \cdot C_8^3 \cdot C_5^5 = 2520$.

(2) 均匀分堆

【模型】 n 个不同元素分成 m 堆, 每堆元素数目都相等, 求其分法种数.

【实例】9本书分成3, 3, 3三堆, 其分法种数为 $\frac{C_9^3 \cdot C_6^3 \cdot C_3^3}{A_3^3} = 280$.

(3) 部分均匀分组

【模型】 n 个不同元素分成 m 组, 恰有 r 堆元素数目都相等, 求其分法种数.

【实例】10本书分成2, 4, 4三堆, 其分法种数为 $\frac{C_{10}^2 \cdot C_8^4 \cdot C_4^4}{A_2^2} = 1575$.

小技巧

不同元素的分堆问题, 有等分、不等分、部分等分之别, 一般地平均分成 n 堆, 必须除以 $n!$, 如果有 m 堆元素个数相等, 必须除以 $m!$.

例3

15. 有6本不同的书

(1) 甲、乙、丙3人每人2本, 有多少种不同的分法?

- (2) 分成3堆，每堆2本，有多少种不同的分堆方法？
- (3) 分成3堆，一堆1本，一堆2本，一堆3本，有多少种不同的分堆方法？
- (4) 分给甲、乙、丙3人，一人1本，一人2本，一人3本，有多少不同的分配方法？
- (5) 分给甲1本、乙1本、丙4本，有多少种不同的分配方法？
- (6) 分成3堆，有2堆各一本，另一堆4本，有多少种不同的分堆方法？
- (7) 摆在3层书架上，每层2本，有多少种不同的摆法？
- (8) 假设6本书相同，分给甲、乙、丙三人，每人至少一本，则有多少种不同的分法？

【答案】见解析。

【解析】(1) 在6本书中，先取2本给甲，再从剩下的4本书中取2本给乙，最后2本给丙，共有 $C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^2 = 90$ (种)。这是均匀编号分组问题

(2) 6本书平均分成3堆，用(1)中方法重复了 A_3^3 倍，故共有 $\frac{C_6^2 \cdot C_4^2}{A_3^3} = 15$ (种)。

这是均匀分组问题。

(3) 从6本书中，先取1本做1堆，再在剩下的5本中取2本做一堆，最后3本做一堆，共有 $C_6^1 \cdot C_5^2 \cdot C_3^3 = 60$ (种)。这是非均匀分组问题

(4) 在(3)的分堆中，甲、乙、丙3人任取一堆，故共有 $C_6^1 \cdot C_5^2 \cdot C_3^3 \cdot A_3^3 = 360$ (种)。

这是非均匀编号分组问题。

(5) 甲先取1本，乙在剩下的取1本，余下4本给丙，故共有 $C_6^1 C_5^1 = 30$ (种)。这是部分均匀编号分组问题。

(6) 平均分堆要除以堆数的全排列数，不平均分堆则不除，故共有 $\frac{C_6^1 \cdot C_5^1}{A_2^2} = 15$ (种)。

这是部分均匀分组问题。

(7) 本题即为6本书放在6个位置上，共有 $A_6^6 = 720$ (种)。

(8) 此为挡板问题，结果为 $C_5^2 = 10$ (种)。

【标注】【知识点】分组分配法

练3

16. 将4名学生分配到甲、乙、丙3个实验室准备实验，每个实验室至少分配1名学生的不同分配方案共有()。

A. 12种

B. 24种

C. 36种

D. 48种

【答案】C

【解析】因为4名学生分配到甲、乙、丙3个实验室准备实验，
每个实验室至少分配1名学生，
所以首先把4名学生分为3组，则有一个组有2人，共有 C_4^2 种分法，
再把分好的3组分到甲、乙、丙3个实验室，则有 A_3^3 种分法，
所以共有 $C_4^2 A_3^3 = 36$ 种分法。

【标注】【素养】数学运算

【知识点】排列

【知识点】分组分配法

17. 10个人参加义务劳动，分成4组，各组分别为2人、2人、2人、4人，则不同的分组方案共有 _____ 种。（用数字作答）

【答案】3150

【解析】由于分成2人、2人、2人、4人的四个组对应的种数分别为 C_{10}^2 、 C_8^2 、 C_6^2 、 C_4^4 种，由分步乘法计数原理以及每 A_3^3 中只能算一种不同的分组方法，可得不同的分组方案共有 $\frac{C_{10}^2 C_8^2 C_6^2 C_4^4}{A_3^3} = 3150$ （种），故填3150。

【标注】【知识点】分组分配法

18. 将8本不同的书分成4堆，每堆2本，有 _____ 种不同的分法。

【答案】105

【解析】 $\frac{C_8^2 C_6^2 C_4^2 C_2^2}{A_4^4} = \frac{28 \times 15 \times 6 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 105$ 。

【标注】【知识点】分组分配法

19. 9名会员分成三组讨论问题，每组3人，则不同的分组方法种数为（ ）。

A. $C_9^3 C_6^3$

B. $A_9^3 A_6^3$

C. $\frac{C_9^3 C_6^3}{A_3^3}$

D. $A_9^3 A_6^3 A_3^3$

【答案】C

【解析】（平均分组问题）要在分组后除以三组的排列数 A_3^3 .

【标注】【知识点】分组分配法

20. 数学活动小组由12名同学组成，现将这12名同学平均分成四组分别研究四个不同课题，且每组只研究一个课题，并要求每组选出一名组长，则不同的分配方案有（ ）种 .

- A. $\frac{C_{12}^3 C_9^3 C_6^3}{A_3^3} A_4^4$ B. $C_{12}^3 C_9^3 C_6^3 3^4$ C. $\frac{C_{12}^3 C_9^3 C_6^3}{A_4^4} 4^3$ D. $C_{12}^3 C_9^3 C_6^3 4^3$

【答案】B

【解析】将这12名同学平均分成四组分别研究四个不同课题，且每组只研究一个课题有 $C_{12}^3 C_9^3 C_6^3 C_3^3$ ，最后选一名组长各有3种，
故不同的分配方案为： $C_{12}^3 C_9^3 C_6^3 3^4$ ，
故选：B .

【标注】【知识点】分步乘法计数原理；分组分配法

4. 隔板法

n 个相同元素，分成 m ($m \leq n$)组，每组至少一个的分组问题——把 n 个元素排成一排，从 $n-1$ 个空中选 $m-1$ 个空，各插一个隔板，有 C_{n-1}^{m-1} 种方法 .

例4

21. 8个相同的球放入标号为1, 2, 3的三个盒子中，每个盒子中至少有一个，共有 _____ 种不同的放法 .

【答案】21

【解析】根据题意，先将8个球排成一排，可以形成7个空位，
在7个空位中插入2个隔板，可以将8个小球分成3组，分别对应标号为1, 2, 3的三个盒子，
则有 $C_7^2 = \frac{7 \times 6}{2} = 21$ 种放法，
故答案为：21 .

【标注】【知识点】隔板法

22. 将20个相同的球全部放入编号为1, 2, 3的盒子里, 使得放入每个盒子里的球的个数不小于该盒子的编号, 则不同的放球方法共有 _____ 种. (用数字作答)

【答案】 120

【解析】 根据题意, 先在20个球中取出1个球放到编号为2的盒子里, 再取出2个球放在编号为3的盒子里, 此时只需将剩下的17个球, 分为3组, 每组至少一个, 分别放到三个盒子里即可; 将17个球排成一列, 排好后, 有16个空位, 在16个空位中任取2个, 插入挡板, 有 $C_{16}^2 = 120$ 种方法, 即有120种将17个球分为3组的方法, 将分好的3组对应3个盒子, 即可满足盒内的球数不小于盒号数, 则盒内的球数不小于盒号数的放入方法有120种, 故答案为: 120.

【标注】【知识点】隔板法

23. 8个完全相同的球全部放入3个不同的盒子中, 有 _____ 种不同的分法.

【答案】 45

【解析】 假设先从每个盒子中借一个球, 则总共有11个球, 即把这11个球分成三部分, 有 $C_{10}^2 = 45$ 种.

【标注】【知识点】排列组合综合

练4

24. 某校准备组建一个由12人组成篮球队, 这12个人由8个班的学生组成, 每班至少一人, 名额分配方案共 _____ 种.

【答案】 330

【解析】 此例的实质是12个名额分配给8个班, 每班至少一个名额, 可在12个名额中的11个空档中插入7块挡板, 一种插法对应一种名额的分配方式, 故有 $C_{11}^7 = 330$ 种.

【标注】【知识点】隔板法

25. 某运输公司有7个车队，每个车队的车多于4辆，现从这7个车队中抽出10辆车，且每个车队至少抽1辆，组成一个运输队，则不同的抽法有（ ）种．
- A. 84 B. 120 C. 63 D. 301

【答案】 A

【解析】 此题若使用其它方法，则需要分类，都比较麻烦，若用“隔板法”，则就轻而易举了，首先将10辆车排好，这样形成9个空，从这9个空中选6个，插入隔板，即将这10辆车分成7份，每一种插法对应一种抽法，故共有 $C_9^6 = 84$ 种不同的抽法．

故选A．

【标注】 【素养】 逻辑推理

【知识点】 隔板法

26. 数学老师给小明布置了10道数学题，要求小明按照序号从小到大的顺序，每天至少完成一道，如果时间允许，也可以多做，甚至在一天全部做完，则小明不同的完成方法种数为（ ）．
- A. 55 B. 90 C. 425 D. 512

【答案】 D

【解析】 利用插板法，

如果一天完成，则有1种可能；

如果两天完成，则有 C_9^1 种可能；

如果三天完成，则有 C_9^2 中可能；

以此类推，

共有 $1 + C_9^1 + C_9^2 + \cdots + C_9^8 + 1 = 2^9 = 512$ 中可能．

故选D．

【标注】 【知识点】 隔板法

27. 6个相同的小球放入4个编号为1，2，3，4的盒子，求下列方法的种数．
- （1）每个盒子都不空．
- （2）恰有一个空盒字．
- （3）恰有两个空盒子．

【答案】(1) 10种 .

(2) 40种 .

(3) 30种 .

【解析】(1) 先把6个相同的小球排成一行，在首尾两球外侧各放置一块隔板，然后在小球之间的5个空隙中任选3个空隙各插一块隔板，有 $C_5^3 = 10$ 种方法 .

(2) 恰有一个空盒子，插板分两步进行 . 先在首尾两球外侧各放置一块隔板，并在5个空隙中任选2个空隙各插一块隔板，如 $| \bigcirc | \bigcirc \bigcirc \bigcirc | \bigcirc \bigcirc |$ ，有 C_5^2 种插法，然后将剩下的一块隔板与已放置的隔板中任意一块并放形成空盒，如 $| \bigcirc | \bigcirc \bigcirc \bigcirc || \bigcirc \bigcirc |$ ，有 C_4^1 种插法，故共有 $C_5^2 \cdot C_4^1 = 40$ 种方法 .

(3) 恰有两个空盒子，插板分两步进行 . 先在首尾两球外侧各放置一块隔板，并在5个空隙中任选1个空隙插一块隔板，有 C_5^1 种插法，如 $|||$ ，然后将剩下的两块隔板插入形成空盒 .

①这两块板与前面三块板形成不相邻的两个盒子，如 $|||||$ ，有 C_3^2 种插法 .

②将两块板与前面三块板之一并放，如 $|||||$ ，有 C_3^1 种插法 .

故共有 $C_5^1 \cdot (C_3^2 + C_3^1) = 30$ 种方法 .

【标注】【知识点】隔板法

5. 综合问题

28. 现有16张不同的卡片，其中红色、黄色、蓝色、绿色卡片各4张 . 从中任取3张，要求这3张卡片不能是同一种颜色，且红色卡片至多1张，不同取法的种数为 () .

A. 232

B. 252

C. 472

D. 484

【答案】C

【解析】方法一：若没有红色卡片，则需要从黄、蓝绿三色卡片中选3张，

若都不同色则有 $C_4^1 \times C_4^1 \times C_4^1 = 64$ 种，若2张同色，则有 $C_3^2 \times C_2^1 \times C_4^2 \times C_4^1 = 144$ 种；

若红色卡片有1张，剩余2张不同色，则有 $C_4^1 \times C_3^2 \times C_4^1 \times C_4^1 = 192$ 种，

剩余2张同色，则有 $C_4^1 \times C_3^1 \times C_4^2 = 72$ 种，

所以共有 $64 + 144 + 192 + 72 = 472$ 种不同的取法 .

方法二：按照无红色和1张红色分为两类， $C_{12}^3 - 3C_4^3 + C_4^1 C_{12}^2 = 472$.

【标注】【知识点】组合

29. 编号为1、2、3、4、5、6、7的七盏路灯，晚上用时只亮三盏灯，且任意两盏亮灯不相邻，则不同的开灯方案有（ ）。

- A. 60种 B. 20种 C. 10种 D. 8种

【答案】 C

【解析】（插空法）在四盏熄灭的灯产生的5个空当中放入3盏亮灯，即有 $C_5^3 = 10$ （种）不同的开灯方案。

【标注】【知识点】插空法

30. 某城市新修建的一条道路上有12盏路灯，为了节省用电，而不影响照明，可以熄灭其中的3盏灯，但两端的灯不能熄灭也不能熄灭相邻的两盏灯，则熄灭的方法有（ ）。

- A. C_8^3 种 B. A_8^3 种 C. C_9^3 种 D. C_{11}^3 种

【答案】 A

【解析】插空法：未熄灭的灯放好后，除两端外还有8个空，
3盏熄灭的灯可放入8个空中，
有 C_8^3 种方法。
故选A。

【标注】【素养】数学运算

【知识点】插空法

31. 3个人坐在一排6个座位上，问：

- （1）3个人都相邻的坐法有多少种？
（2）空位都不相邻的坐法有多少种？
（3）空位至少有2个相邻的坐法有多少种？

【答案】（1）24

（2）24

（3）96

【解析】（1）3个人排有 $A_3^3 = 6$ 种，3人排好后包含两端共有4个“间隔”可以插入空位。
若从第一个位置开始相邻坐下，有 A_3^3 种坐法；

若从第二个位置开始相邻坐下，有 A_3^3 种坐法；

同理，综上所述，共有 $4 \cdot A_3^3 = 24$ 种坐法。

(2) 空位都不相邻相当于将3个空位安插在4个“间隔”中，有 C_4^3 种，
故有 $A_3^3 \cdot C_4^3 = 24$ 种。

(3) 3个空位至少有2个相邻的情况有两类：

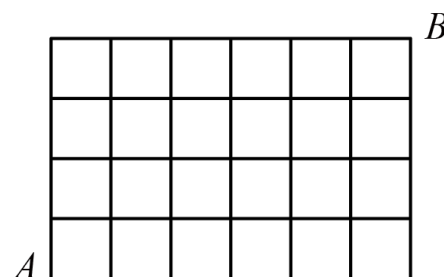
① 3个空位恰有2个相邻，另有1个不相邻有 $A_3^3 \cdot A_4^2 = 72$ 种；

② 3个空位都相邻，有 $A_3^3 \cdot A_4^1 = 24$ 种。

综上所述，有 $72 + 24 = 96$ 种坐法。

【标注】【知识点】插空法；捆绑法

32. 某城市有7条南北向街道，5条东西向街道（如下图）：



(1) 图中共有多少个矩形？

(2) 从A点走到B点的最短路线的走法有多少种？

【答案】 (1) 210

(2) 210

【解析】 (1) 在7条纵线中任选2条，在5条横线中任选2条，这样的4条线可以组成一个矩形，故可组成矩形有 $C_7^2 \cdot C_5^2 = 210$ 个；

(2) 从A到B最短路线的走法无论怎样走，一定包括10段，其中6段方向向东，4段方向向北。每种走法，即是从10段中选出6段，这6段是走东西方向的（剩下4段是走南北方向的），共有 $C_{10}^6 = C_{10}^4 = 210$ 种走法。

【标注】【知识点】简单的组合问题；分步乘法计数原理

33. 完成下列各题。

(1) 将1, 2, 3三个数字填在 3×3 的方格中，使得横格与竖格没有重复的数字，有多少种不同的填法_____。

(2)

甲、乙、丙、丁四名同学和1名老师站成一排合影留念，老师站在中间，甲同学不和老师站在一起的不同站法种数为（ ）.

- A. 120种 B. 24种 C. 16种 D. 12种

(3) 如图，小明从街道的 E 处出发，先到 F 处与小红会合，再一起到位于 G 处的老年公寓参加志愿者活动，则小明到老年公寓可以选择的最短路径条数为（ ）.



- A. 24 B. 18 C. 12 D. 9

(4) 有两条平行线，第一条直线上取4个点，第二条直线上取6个点，以其中3个点为顶点作三角形，一共可以作出 _____ 个.

【答案】 (1) 12

(2) D

(3) B

(4) 96

【解析】 (1) 略.

(2) 略.

(3) $E \rightarrow F$ 有6种走法， $F \rightarrow G$ 有3种走法，由乘法原理知，共 $6 \times 3 = 18$ 种走法.

(4) 在第一条直线上取两点： $C_4^2 \cdot C_6^1 + C_6^2 \cdot C_4^1 = 96$.

【标注】 【知识点】计数原理综合