

04不等式证明（二）练习题

1. 若对于任意的 $0 < x_1 < x_2 < a$, 都有 $\frac{x_2 \ln x_1 - x_1 \ln x_2}{x_1 - x_2} > 1$, 则 a 的最大值为 () .
- A. $2e$ B. e C. 1 D. $\frac{1}{2}$

【答案】 C

【解析】 由题意可得：

$$x_2 \ln x_1 - x_1 \ln x_2 < x_1 - x_2 ,$$

$$\frac{\ln x_1}{x_1} - \frac{\ln x_2}{x_2} < \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} ,$$

$$\therefore \frac{\ln x_1 + 1}{x_1} < \frac{\ln x_2 + 1}{x_2} ,$$

据此可得函数 $f(x) = \frac{\ln x + 1}{x}$ 在定义域 $(0, a)$ 上单调递增 ,

$$\text{其导函数: } f'(x) = \frac{1 - (\ln x + 1)}{x^2} = -\frac{\ln x}{x^2} \geq 0 \text{ 在 } (0, a) \text{ 上恒成立 ,}$$

据此可得: $0 < x \leq 1$,

即实数 a 的最大值为 1 .

故选 C .

【标注】 【知识点】 已知单调性求参数的取值范围

2. 已知函数 $f(x) = \frac{a \ln x}{x}$ ($a \in \mathbf{R}$) , 对于 $\forall x_1, x_2 \in [e^2, e^4]$, 且 $x_1 \neq x_2$, $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < \frac{1}{x_1 x_2}$ 恒成立 , 则实数 a 的取值范围为 () .
- A. $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right]$ B. $(-\infty, 2]$ C. $[-1, +\infty)$ D. $\left[-\frac{1}{3}, +\infty\right)$

【答案】 D

【解析】 设 $x_1 > x_2$,

$$\text{则有 } f(x_1) - f(x_2) < \frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2} = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} ,$$

$$\text{即 } f(x_1) + \frac{1}{x_1} < f(x_2) + \frac{1}{x_2} ,$$

$$\text{令 } g(x) = f(x) + \frac{1}{x} = \frac{a \ln x + 1}{x} ,$$

由于当 $x_1 > x_2$ 时 , $g(x_1) < g(x_2)$,

所以可知 , $g(x)$ 在 $[e^2, e^4]$ 上单调递减 , 对 $g(x)$ 求导得 ,

$$g'(x) = \frac{a - a \ln x - 1}{x^2} ,$$

$$\text{则有 } \frac{a - a \ln x - 1}{x^2} \leq 0 , \text{ 即 } a \geq \frac{1}{1 - \ln x} ,$$

$$\text{令 } h(x) = \frac{1}{1 - \ln x} , \text{ 则 } a \geq h(x)_{\max} , \text{ 求导得 ,}$$

$$h'(x) = \frac{1}{x(1-\ln x)^2} > 0 \text{ 在 } [e^2, e^4] \text{ 上恒成立,}$$

$$\text{所以 } h(x)_{\max} = h(e^4) = -\frac{1}{3}, \text{ 则 } a \geq -\frac{1}{3},$$

$$\text{即实数 } a \text{ 的取值范围为 } \left[-\frac{1}{3}, +\infty\right),$$

故选D.

【标注】【知识点】区间上恒单调

3. 已知函数 $f(x) = \frac{x^2}{2} \left(\ln x - \frac{1}{2} \right)$, $g(x) = 2x^3 - 3x^2$.

(1) 求函数 $h(x) = \frac{2}{x}f(x) + \frac{x}{2}$ 在 $[t, t+1] (t > 0)$ 的最小值.

(2) 若任意 $b > a > 0$, 总有 $m[g(b) - g(a)] > f(b) - f(a)$ 成立, 求实数 m 的值.

【答案】(1) 当 $0 < t < \frac{1}{e}$ 时, $h(x)_{\min} = -\frac{1}{e}$;

当 $t \geq \frac{1}{e}$ 时, $h(x)_{\min} = t \ln t$.

(2) $\frac{1}{6}$.

【解析】(1) $\because h(x) = \frac{2}{x} \cdot \frac{x^2}{2} \left(\ln x - \frac{1}{2} \right) + \frac{x}{2} = x \ln x$,

定义域为 $(0, +\infty)$,

$\therefore h'(x) = \ln x + 1$, 且 $h'(x)$ 为单调递增函数,

$\therefore$ 令 $h'(x) = 0$, 则 $x = \frac{1}{e}$,

$\therefore$ 当 $x \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 单调递减,

当 $x \in \left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 单调递增,

①: 当 $0 < t < t+1 < \frac{1}{e}$ 时, 满足条件的 t 不存在;

②: 当 $0 < t < \frac{1}{e} < t+1$ 时, 即 $0 < t < \frac{1}{e}$ 时,

$h(x)_{\min} = h\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$;

③ 当 $\frac{1}{e} \leq t \leq t+1$, 即 $t \geq \frac{1}{e}$ 时,

$h(x)_{\min} = h(t) = t \ln t$.

故答案为: 当 $0 < t < \frac{1}{e}$ 时, $h(x)_{\min} = -\frac{1}{e}$;

当 $t \geq \frac{1}{e}$ 时, $h(x)_{\min} = t \ln t$.

(2) $\because m[g(b) - g(a)] > f(b) - f(a)$,

等价于 $mg(b) - f(b) > mg(a) - f(a)$,

$\therefore$ 构造函数 $\phi(x) = mg(x) - f(x)$

$= 2mx^3 - 3mx^2 - \frac{x^2}{2} \ln x + \frac{x^2}{4}$,

$\because b > a > 0$, 总使 $mg(b) - f(b) > mg(a) - f(a)$ 成立,

$\therefore \phi(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

$\therefore$ 原问题转化为 $\phi'(x) = 6mx^2 - 6mx - x \ln x \geq 0$,
 对 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立 ,
 $\therefore \phi'(x) = x(6mx - 6m - \ln x)$,
 $\therefore$ 原问题转化为 : $r(x) = 6mx - 6m - \ln x \geq 0$ 对 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立 ,
 $\therefore$ 若 $m \leq 0$,
 $\therefore r(e) = 6m(e-1) - 1 < 0$,
 $\therefore$ 不满足题意 ,
 若 $m > 0$,
 $\therefore r'(x) = 6m - \frac{1}{x} = \frac{6mx - 1}{x}$,
 $\therefore$ 当 $x \in (0, \frac{1}{6m})$ 时 , $r'(x) < 0$, $r(x)$ 在 $(0, \frac{1}{6m})$ 上单调递减 ,
 当 $x \in (\frac{1}{6m}, +\infty)$ 时 , $r'(x) > 0$, $r(x)$ 在 $(\frac{1}{6m}, +\infty)$ 上单调递增 ,
 $\therefore r(x)$ 在 $x = \frac{1}{6m}$ 处取得极小值也是最小值 ,
 即 $x = \frac{1}{6m}$ 是 $r(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的最小值点 ,
 $\therefore r(1) = 0$,
 $\therefore$ 当且仅当 $\frac{1}{6m} = 1$ 是 , $r(x) \geq 0$,
 $\therefore m = \frac{1}{6}$.
 故答案为 : $\frac{1}{6}$.

【标注】【知识点】二阶导问题；通过构造函数证明不等式；求函数最值（含参一次型导函数）；
 区间上恒单调

4. 已知函数 $f(x) = x + x \ln x$.

- (1) 求函数 $f(x)$ 的图象在点(1,1)处的切线方程 .
- (2) 若 $k \in \mathbf{Z}$, 且 $k(x-1) < f(x)$ 对任意 $x > 1$ 恒成立 , 求 k 的最大值 .
- (3) 当 $n > m \geq 4$ 时 , 证明 : $(mn^n)^m > (nm^m)^n$.

【答案】 (1) $y = 2x - 1$.

(2) k 的最大值为3 .

(3) 证明见解析 .

【解析】 (1) $\therefore f(x) = x + x \ln x$,

$$\therefore f'(x) = 1 + \ln x + 1 ,$$

$\therefore$ 函数 $f(x) = x + x \ln x$ 的图象在点 $x = 1$ 处的切线斜率为2 ,

$$\therefore f'(1) = 2 ,$$

∴函数 $f(x)$ 的图象在点 $(1,1)$ 处的切线方程：

$$y-1=2(x-1),$$

$$\text{即 } y=2x-1.$$

(2) 由(1)知, $f(x)=x+x\ln x$,

$$\therefore k < \frac{f(x)}{x-1} \text{ 对任意 } x > 1 \text{ 恒成立,}$$

$$\text{即 } k < \frac{x+x\ln x}{x-1} \text{ 对任意 } x > 1 \text{ 恒成立,}$$

$$\text{令 } g(x) = \frac{x+x\ln x}{x-1},$$

$$\text{则 } g'(x) = \frac{x-\ln x-2}{(x-1)^2},$$

$$\text{令 } h(x) = x - \ln x - 2, (x > 1),$$

$$\text{则 } h'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x} > 0,$$

所以函数 $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

$$\text{因为 } h(3) = 1 - \ln 3 < 0,$$

$$h(4) = 2 - \ln 2 > 0,$$

所以方程 $h(x)=0$ 在 $(1, +\infty)$ 上存在唯一实根 x_0 , 且满足 $x_0 \in (3, 4)$,

当 $1 < x < x_0$ 时, $h(x) < 0$, 即 $g'(x) < 0$,

当 $x > x_0$ 时, $h(x) > 0$, 即 $g'(x) > 0$,

所以函数 $g(x) = \frac{x+x\ln x}{x-1}$ 在 $(1, x_0)$ 上单调递减, 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递增,

$$\therefore [g(x)]_{\min} = g(x_0) = \frac{x_0(1+\ln x_0)}{x_0-1}$$

$$= \frac{x_0(1+x_0-2)}{x_0-1}$$

$$= x_0 \in (3, 4),$$

$$\therefore k < [g(x)]_{\min} = x_0 \in (3, 4),$$

故整数 k 的最大值为3.

(3) 由(2)知, $g(x) = \frac{x+x\ln x}{x-1}$ 是 $[4, +\infty)$ 上的增函数,

∴当 $n > m \geq 4$ 时,

$$\frac{n+n\ln n}{n-1} > \frac{m+m\ln m}{m-1},$$

$$\text{即 } n(m-1)(1+\ln n) > m(n-1)(1+\ln m),$$

整理得:

$$mn\ln n + m\ln m > mn\ln m + n\ln n + (n-m),$$

$$\therefore n > m,$$

$$\therefore mn\ln n + m\ln m > mn\ln m + n\ln n,$$

$$\text{即 } \ln n^{mn} + \ln m^m > \ln m^{mn} + \ln n^n,$$

$$\text{即 } \ln(n^{mn}m^m) > \ln(m^{mn}n^n),$$

$$\therefore (mn^n)^m > (nm^m)^n.$$

【标注】【知识点】利用导数解决不等式恒成立问题；二阶导问题；双变量问题；隐零点问题