

04不等式证明(二)

一、同构函数

1. 直接构造新函数

例1

1. 设 $f(x) = a \ln x + bx - b$, $g(x) = \frac{ex}{e^x}$, 其中 $a, b \in \mathbf{R}$.

(1) 求 $g(x)$ 的极大值.

(2) 设 $b = 1$, $a > 0$, 若 $|f(x_2) - f(x_1)| < \left| \frac{1}{g(x_2)} - \frac{1}{g(x_1)} \right|$ 对任意的 $x_1, x_2 \in [3, 4] (x_1 \neq x_2)$ 恒成立, 求 a 的最大值.

【答案】(1) 1.

(2) $\frac{2}{3}e^2 - 3$.

【解析】(1) $g'(x) = \frac{e(1-x)}{e^x}$.

当 $x > 1$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 递减;

当 $x < 1$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 递增.

则 $g(x)$ 的极大值为 $g(1) = 1$.

(2) 当 $b = 1, a > 0$ 时, $f(x) = a \ln x + x - 1, x > 0$.

由 $f'(x) = \frac{a}{x} + 1 = \frac{a+x}{x} > 0$ 在 $[3, 4]$ 恒成立,

则 $f(x)$ 在 $[3, 4]$ 递增.

由 $h(x) = \frac{1}{g(x)} = \frac{e^x}{ex}$, $h'(x) = \frac{e^x(x-1)}{ex^2} > 0$ 在 $[3, 4]$ 恒成立,

则 $h(x)$ 在 $[3, 4]$ 递增.

设 $x_1 < x_2$,

原不等式等价于 $f(x_2) - f(x_1) < h(x_2) - h(x_1)$,

即 $f(x_2) - h(x_2) < f(x_1) - h(x_1)$,

设 $F(x) = f(x) - h(x)$,

则 $F(x)$ 在 $[3, 4]$ 递减.

又 $F(x) = a \ln x + x - 1 - \frac{e^x}{ex}$, $F'(x) = \frac{a}{x} + 1 - \frac{e^x(x-1)}{ex^2} \leq 0$ 在 $[3, 4]$ 恒成立,

即 $a \leq \frac{1}{e} \frac{e^x(x-1)}{x} - x$ 在 $[3, 4]$ 上恒成立,

令 $G(x) = \frac{1}{e} \frac{e^x(x-1)}{x} - x, 3 \leq x \leq 4$.

由 $G'(x) = \frac{1}{e} \frac{e^x \cdot (x^2 - x + 1)}{x^2} - 1 = e^{x-1} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + 1 \right) - 1$

$= e^{x-1} \left[\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \right] - 1 > \frac{3}{4}e^2 - 1 > 0$.

则 $G(x)$ 在 $[3, 4]$ 递增,

即有 $a \leq \frac{2}{3}e^2 - 3$,

$$\text{即 } a_{\max} = \frac{2}{3}e^2 - 3.$$

【标注】【知识点】 求解函数极值；利用导数求函数的最值；利用导数证明不等式恒成立问题；双变量问题；通过构造函数证明不等式

练1

2. 设 $f(x) = \ln x$, $g(x) = \frac{1}{2}x^2$.

(1) 令 $F(x) = xf(x) - g(x)$, 求 $F(x)$ 的单调区间.

(2) 若任意 $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$ 且 $x_1 > x_2$, 都有 $m[g(x_1) - g(x_2)] > x_1f(x_1) - x_2f(x_2)$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

【答案】 (1) 单调递减区间为 $(0, +\infty)$, 无单调递增区间.

(2) $[1, +\infty)$.

【解析】 (1) 由题意知 $F(x) = x \ln x - \frac{1}{2}x^2 (x > 0)$,

$$F'(x) = \ln x - x + 1, \text{ 令 } t(x) = F'(x) = \ln x - x + 1,$$

$$\text{则 } t'(x) = \frac{1}{x} - 1, \text{ 令 } t'(x) > 0, \text{ 解得 } 0 < x < 1,$$

$$\text{令 } t'(x) < 0, \text{ 解得 } x > 1,$$

故 $F'(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减,

$x = 1$, $F'(x)$ 取得极大值, 也是最大值为 $F'(1) = 0$,

故 $F'(x) \leq 0$, $F(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上递减,

所以 $F(x)$ 的单调递减区间为 $(0, +\infty)$, 无单调递增区间.

(2) 已知可转化为 $x_1 > x_2 \geq 1$ 时,

$$mg(x_1) - x_1f(x_1) > mg(x_2) - x_2f(x_2) \text{ 恒成立},$$

$$\text{令 } h(x) = mg(x) - xf(x) = \frac{m}{2}x^2 - x \ln x (x > 0),$$

则 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为单调递增的函数,

$$\text{故 } h'(x) = mx - \ln x - 1 \geq 0 \text{ 恒成立, 即 } m \geq \frac{\ln x + 1}{x} \text{ 恒成立},$$

$$\text{令 } t(x) = \frac{\ln x + 1}{x}, \text{ 则 } t'(x) = -\frac{\ln x}{x^2},$$

$\therefore$ 当 $x \in [1, +\infty)$ 时, $t'(x) \leq 0$, $t(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递减,

$t(x) \leq t(1) = 1$, 即 $m \geq 1$, 故实数 m 的取值范围是 $[1, +\infty)$.

【标注】【知识点】 通过构造函数证明不等式；利用导数解决不等式恒成立问题；双变量问题；直接求函数的单调性（不含参）

3. 设函数 $f(x) = \ln x + \frac{m}{x}$, $m \in \mathbf{R}$.

(1) 当 $m = e$ (e 为自然对数的底数) 时, 求 $f(x)$ 的最小值.

(2) 讨论函数 $g(x) = f'(x) - \frac{x}{3}$ 零点的个数.

(3) 若对任意 $b > a > 0$, $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} < 1$ 恒成立, 求 m 的取值范围.

【答案】(1) 2.

(2) 见解析.

(3) $\left[\frac{1}{4}, +\infty\right)$.

【解析】(1) 由题设, 当 $m = e$ 时, $f(x) = \ln x + \frac{e}{x}$, 则 $f'(x) = \frac{x-e}{x^2}$,

$\therefore$ 当 $x \in (0, e)$, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调递减,

当 $x \in (e, +\infty)$, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(e, +\infty)$ 上单调递增,

$\therefore x = e$ 时, $f(x)$ 取得最小值 $f(e) = \ln e + \frac{e}{e} = 2$. $\therefore f(x)$ 的极小值为 2.

(2) 方法一: 由题设 $g(x) = f'(x) - \frac{x}{3} = \frac{1}{x} - \frac{m}{x^2} - \frac{x}{3} (x > 0)$,

令 $g(x) = 0$, 得 $m = -\frac{1}{3}x^3 + x (x > 0)$.

设 $\varphi(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x (x \geq 0)$,

则 $\varphi'(x) = -x^2 + 1 = -(x-1)(x+1)$,

当 $x \in (0, 1)$ 时, $\varphi'(x) > 0$, $\varphi(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增;

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $\varphi'(x) < 0$, $\varphi(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减.

$\therefore x = 1$ 是 $\varphi(x)$ 的唯一极值点, 且是极大值点,

因此 $x = 1$ 也是 $\varphi(x)$ 的最大值点,

$\therefore \varphi(x)$ 的最大值为 $\varphi(1) = \frac{2}{3}$.

又 $\varphi(0) = 0$,

当 $m > \frac{2}{3}$ 时, 函数 $g(x)$ 无零点;

当 $m = \frac{2}{3}$ 时, 函数 $g(x)$ 有且只有一个零点;

当 $0 < m < \frac{2}{3}$ 时, 函数 $g(x)$ 有两个零点;

当 $m \leq 0$ 时, 函数 $g(x)$ 有且只有一个零点

综上所述, 当 $m > \frac{2}{3}$ 时, 函数 $g(x)$ 无零点;

当 $m = \frac{2}{3}$ 或 $m \leq 0$ 时, 函数 $g(x)$ 有且只有一个零点;

当 $0 < m < \frac{2}{3}$ 时, 函数 $g(x)$ 有两个零点.

方法二: 由题设知, $g(x) = f'(x) - \frac{x}{3} = \frac{1}{x} - \frac{m}{x^2} - \frac{x}{3} (x > 0)$,

令 $g(x) = 0$, 得 $m = -\frac{1}{3}x^3 + x (x > 0)$.

设, $\varphi(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x (x > 0)$

则 $\varphi'(x) = -x^2 + 1 = -(x-1)(x+1)$,

当 $x \in (0, 1)$ 时, $\varphi'(x) > 0$, $\therefore \varphi(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增;

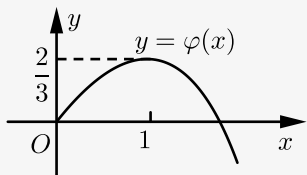
当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $\varphi'(x) < 0$, $\therefore \varphi(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减.

$\therefore x = 1$ 是 $\varphi(x)$ 的唯一极值点, 且是极大值点, 因此:

$x = 1$ 也是 $\varphi(x)$ 的最大值点.

$\therefore \varphi(x)$ 的最大值为 $\varphi(1) = \frac{2}{3}$.

又 $\varphi(0) = 0$, 结合 $y = \varphi(x)$ 的图象 (如图), 可知,



- ①当 $m > \frac{2}{3}$ 时, 函数 $g(x)$ 无零点;
 ②当 $m = \frac{2}{3}$ 时, 函数 $g(x)$ 有且只有一个零点;
 ③当 $0 < m < \frac{2}{3}$ 时, 函数 $g(x)$ 有两个零点;
 ④当 $m \leq 0$ 时, 函数 $g(x)$ 有且只有一个零点;

综上所述, 当 $m > \frac{2}{3}$ 时, 函数 $g(x)$ 无零点.

当 $m = \frac{2}{3}$ 或 $m \leq 0$ 时, 函数 $g(x)$ 有且只有一个零点;

当 $0 < m < \frac{2}{3}$ 时, 函数 $g(x)$ 有两个零点.

(3) 对任意的 $b > a > 0$, $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} < 1$ 恒成立, 等价于 $f(b) - b < f(a) - a$ 恒成立(*).

设 $h(x) = f(x) - x = \ln x + \frac{m}{x} - x (x > 0)$

$\therefore (*)$ 等价于 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减.

由 $h'(x) = \frac{1}{x} - \frac{m}{x^2} - 1 \leq 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立,

得 $m \geq -x^2 + x = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} (x > 0)$ 恒成立,

$\therefore m \geq \frac{1}{4}$ (对 $m = \frac{1}{4}$, $h'(x) = 0$ 仅在 $x = \frac{1}{2}$ 时成立),

$\therefore m$ 的取值范围是 $\left[\frac{1}{4}, +\infty\right)$.

【标注】【知识点】通过构造函数证明不等式; 区间上恒单调; 参变分离法求零点个数; 直接求函数的最值 (不含参)

4. 已知 $f(x) = a \ln x + \frac{1}{2}x^2 (a > 0)$, 若对任意两个不等的正实数 x_1, x_2 , 都有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 2$ 恒成立, 则 a 的取值范围是 ().

- A. $(0, 1]$ B. $(1, +\infty)$ C. $(0, 1)$ D. $[1, +\infty)$

【答案】 D

【解析】 不妨令 $x_1 > x_2$, 则原不等式可以等价转化为 $f(x_1) - 2x_1 > f(x_2) - 2x_2$, 则只需要保证

$g(x) = f(x) - 2x = a \ln x + \frac{1}{2}x^2 - 2x (a > 0)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以

$g'(x) = \frac{a}{x} + x - 2 = \frac{x^2 - 2x + a}{x} \geq 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立. 易求得 $a \geq (2x - x^2)_{\max} = 1$.

【标注】【素养】数学抽象; 数学运算

【知识点】 区间上恒单调

2. 指对同构

例2

5.

设实数 $m > 0$, 若对任意的 $x \geq e$ (其中 e 为自然数对数的底数) , 不等式 $x^2 \ln x - me^{\frac{m}{x}} \geq 0$ 恒成立 , 则 m 的最大值是 () .

- A. $\frac{1}{e}$ B. $\frac{e}{3}$ C. $2e$ D. e

【答案】 D

【解析】 不等式 $x^2 \ln x - me^{\frac{m}{x}} \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \ln x \geq me^{\frac{m}{x}} \Leftrightarrow x \ln x \geq \frac{me^{\frac{m}{x}}}{x} \Leftrightarrow \ln x \cdot e^{\ln x} \geq \frac{m}{x} e^{\frac{m}{x}}$.

设 $f(x) = x \cdot e^x (x > 0)$, 则 $f'(x) = (x+1)e^x > 0$, 于是 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数 .

因为 $\frac{m}{x} > 0$, $\ln x > 0$, 所以 $\frac{m}{x} \leq \ln x$, 即 $m \leq x \ln x$ 对任意的 $x \geq e$ 恒成立 , 因此只需 $m \leq (x \ln x)_{\min}$.

设 $g(x) = x \ln x (x \geq e)$, $g'(x) = \ln x + 1 > 0 (x \geq e)$,

所以 $g(x)$ 在 $[e, +\infty)$ 上为增函数 ,

所以 $g(x)_{\min} = g(e) = e$,

所以 $m \leq e$, 即 m 的最大值是 e .

故选 D .

【标注】 【知识点】 通过构造函数证明不等式

练2

6. 设函数 $f(x) = x - (x+1) \ln(x+1)$.

- (1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间 .
 (2) 若方程 $f(x) = t$ 在 $[-\frac{1}{2}, 1]$ 上有两个实数解 , 求实数 t 的取值范围 .
 (3) 证明 : 当 $m > n > 0$ 时 , $(1+m)^n < (1+n)^m$.

【答案】 (1) $f(x)$ 单调递增区间为 $(-1, 0)$, 单调递减区间为 $(0, +\infty)$.

(2) $t \in \left[\frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2}, 0 \right)$.

(3) 证明见解析 .

【解析】 (1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1, +\infty)$, $f'(x) = -\ln(x+1)$,

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = 0$,

$\therefore x, f'(x), f(x)$ 的变化情况如下表 :

x	$(-1, 0)$	0	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	极大值	$\searrow$

$\therefore f(x)$ 单调递增区间为 $(-1, 0)$, 单调递减区间为 $(0, +\infty)$.

(2) 由第 (1) 问可知 , $f(x)$ 在 $[-\frac{1}{2}, 0]$ 上单调递增 , $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递减 ,

$\therefore f(x)_{\max} = f(0) = 0$, 且 $f(-\frac{1}{2}) = f(0) = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2}$, $f(1) = 1 - 2 \ln 2$,

$$\therefore f(x)_{\max} = 1, f(x)_{\min} = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2},$$

$$\therefore \text{当方程 } f(x) = t \text{ 在 } [-\frac{1}{2}, 1] \text{ 有两个实数解时, } t \in \left[\frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2}, 0 \right).$$

(3) 要证 $(1+m)^n < (1+n)^m$, 需证 $n \ln(1+m) < m \ln(1+n)$,

$$\text{只需证 } \frac{\ln(1+m)}{m} < \frac{\ln(1+n)}{n},$$

$$\text{设 } g(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} (x > 0),$$

$$g'(x) = \frac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{x - (1+x)\ln(1+x)}{(1+x)x^2} = \frac{f(x)}{(1+x)x^2},$$

由(II)知 $f(x) \leq 0$ 恒成立,

$\therefore g'(x) < 0$ 恒成立,

$\therefore g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,

$\therefore$ 当 $m > n > 0$ 时, $g(m) < g(n)$, 即 $\frac{\ln(1+m)}{m} < \frac{\ln(1+n)}{n}$,

$\therefore$ 当 $m > n > 0$ 时, $(1+m)^n < (1+n)^m$.

【标注】【知识点】通过构造函数证明不等式; 参变分离法求零点个数

7. 已知函数 $f(x) = ax \ln x - x + 1, a \in \mathbf{R}$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调区间.

(2) 当 $p > q > 1$ 时, 证明 $q \ln p + \ln q < p \ln q + \ln p$.

【答案】(1) 当 $a = 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,

当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, e^{\frac{1-a}{a}})$ 上单调递减, 在 $(e^{\frac{1-a}{a}}, +\infty)$ 上单调递增,

当 $a < 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, e^{\frac{1-a}{a}})$ 上单调递增, 在 $(e^{\frac{1-a}{a}}, +\infty)$ 上单调递减.

(2) 证明见解析.

【解析】(1) $f(x) = ax \ln x - x + 1$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

$$\therefore f'(x) = a \ln x + a - 1,$$

当 $a = 0$ 时, $f'(x) = -1 < 0$, 此时 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,

当 $a > 0$ 时, 由 $f'(x) > 0$ 可得 $x > e^{\frac{1-a}{a}}$, 由 $f'(x) < 0$, 可得 $0 < x < e^{\frac{1-a}{a}}$,

$\therefore f(x)$ 在 $(0, e^{\frac{1-a}{a}})$ 上单调递减, 在 $(e^{\frac{1-a}{a}}, +\infty)$ 上单调递增,

当 $a < 0$ 时, 由 $f'(x) < 0$ 可得 $x > e^{\frac{1-a}{a}}$, 由 $f'(x) > 0$, 可得 $0 < x < e^{\frac{1-a}{a}}$,

$\therefore f(x)$ 在 $(0, e^{\frac{1-a}{a}})$ 上单调递增, 在 $(e^{\frac{1-a}{a}}, +\infty)$ 上单调递减.

$$(2) \text{ 设 } g(x) = \frac{\ln x}{x-1}, \text{ 则 } g'(x) = \frac{-(x \ln x - x + 1)}{x(x-1)^2},$$

由(1)可得 $f(x) = x \ln x - x + 1$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

$$\therefore f(1) = 0,$$

$\therefore$ 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f(x) > 0$,

$\therefore$ 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $g'(x) < 0$,

$\therefore g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减,

$\therefore$ 当 $p > q > 1$ 时, $g(p) < g(q)$,

$$\therefore \frac{\ln p}{p-1} < \frac{\ln q}{q-1},$$

$$\therefore q \ln p - \ln p < p \ln q - \ln q ,$$

$$\therefore q \ln p + \ln q < p \ln q + \ln p .$$

【标注】【知识点】通过构造函数证明不等式；求函数单调区间（含参指对型导函数）

二、双变量问题

寻找两个变量之间的关系，常见的有韦达定理，或者是利用换元法研究两个变量的大小比值——

①【韦达定理】将题目中的所求式子全部转化为韦达定理的表达，然后构造一个新的函数来研究。（特别注意变量的取值范围）

②【换元法】先找到两个变量之间的关系，然后将目标函数转化为两个变量表示的函数，然后通过换元将其转化为关于单变量的函数，注意新元的定义域。一般是将其中一个变量设为另一个变量的 t 倍，之后利用一些等式将问题转化为研究 t 的问题

1. 韦达定理

例1

8. 已知函数 $f(x) = \ln \frac{1}{x} - ax^2 + x (a > 0)$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性 .

(2) 若 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 , 证明 : $f(x_1) + f(x_2) > 3 - 2 \ln 2$.

【答案】(1) ①当 $a \geq \frac{1}{8}$ 时 ,

$f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减 .

②当 $0 < a < \frac{1}{8}$ 时 ,

$f(x)$ 单调递减区间为 $\left(0, \frac{1 - \sqrt{1 - 8a}}{4a}\right)$, $\left(\frac{1 + \sqrt{1 - 8a}}{4a}, +\infty\right)$,

单调递增区间为 $\left(\frac{1 - \sqrt{1 - 8a}}{4a}, \frac{1 + \sqrt{1 - 8a}}{4a}\right)$.

(2) 证明见解析 .

【解析】(1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$.

$$f'(x) = -\frac{1}{x} - 2ax + 1 = \frac{-2ax^2 + x - 1}{x} .$$

$a > 0$ 时 , 设 $g(x) = -2ax^2 + x - 1$, $\Delta = 1 - 8a$.

①当 $a \geq \frac{1}{8}$ 时 , $\Delta \leq 0$, $g(x) \leq 0$, $\therefore f'(x) \leq 0$, 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减 .

②当 $0 < a < \frac{1}{8}$ 时 , $\Delta > 0$, 由 $f'(x) = 0$ 可得 $x_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 8a}}{4a}$, $x_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - 8a}}{4a}$.

x , $f(x)$, $f'(x)$ 的变化情况如下表 :

x	$(0, x_1)$	x_1	(x_1, x_2)	x_2	$(x_2, +\infty)$
$f(x)$	-	0	+	0	-
$f'(x)$	$\searrow$	极小值	$\nearrow$	极大值	$\searrow$

所以函数 $f(x)$ 单调递减区间为 $\left(0, \frac{1-\sqrt{1-8a}}{4a}\right), \left(\frac{1+\sqrt{1-8a}}{4a}, +\infty\right)$,
 单调递增区间为 $\left(\frac{1-\sqrt{1-8a}}{4a}, \frac{1+\sqrt{1-8a}}{4a}\right)$.

(2) 由(1)知, 当 $0 < a < \frac{1}{8}$ 时, 函数 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 , 且 $x_1 + x_2 = \frac{1}{2a}$, $x_1 x_2 = \frac{1}{2a}$.

$$f(x_1) + f(x_2) = -\ln x_1 - ax_1^2 + x_1 - \ln x_2 - ax_2^2 + x_2$$

$$= -\ln(x_1 x_2) - a(x_1^2 + x_2^2) + (x_1 + x_2)$$

$$= -\ln(x_1 x_2) - a(x_1 + x_2)^2 + 2ax_1 x_2 + (x_1 + x_2)$$

$$= -\ln \frac{1}{2a} - a \times \frac{1}{4a^2} + 2a \times \frac{1}{2a} + \frac{1}{2a}$$

$$= \ln(2a) + \frac{1}{4a} + 1 = \ln a + \frac{1}{4a} + \ln 2 + 1.$$

$$\text{设 } h(a) = \ln a + \frac{1}{4a} + \ln 2 + 1, h'(a) = \frac{1}{a} - \frac{1}{4a^2} = \frac{4a-1}{4a^2} < 0 \left(0 < a < \frac{1}{8}\right),$$

所以 $h(a)$ 在 $\left(0, \frac{1}{8}\right)$ 上单调递减,

$$\text{所以 } h(a) > h\left(\frac{1}{8}\right) = \ln \frac{1}{8} + \frac{1}{4 \times \frac{1}{8}} + \ln 2 + 1 = 3 - 2\ln 2,$$

$$\text{所以 } f(x_1) + f(x_2) > 3 - 2\ln 2.$$

【标注】【知识点】复合函数的求导法则；利用导数求函数的单调性、单调区间；通过构造函数证明不等式；双变量问题；导数与极值

练1

9. 已知函数 $f(x) = a \ln x + \frac{1}{2}x^2 - ax$ (a 为常数) 有两个不同的极值点.

(1) 求实数 a 的取值范围.

(2) 记 $f(x)$ 的两个不同的极值点分别为 x_1, x_2 , 若不等式 $f(x_1) + f(x_2) < \lambda(x_1 + x_2)$ 恒成立, 求实数 λ 的取值范围.

【答案】 (1) $a > 4$.

(2) $\lambda \geq \ln 4 - 3$.

【解析】 (1) $f'(x) = \frac{x^2 - ax + a}{x}$, ($x > 0$),

$f(x)$ 有 2 个不同的极值点,

即方程 $x^2 - ax + a = 0$ 有 2 个不相等的正根,

$$\text{故 } \begin{cases} a > 0 \\ a^2 - 4a > 0 \end{cases}, \text{ 解得: } a > 4.$$

(2) 由(1)得 $x_1 + x_2 = a$, $x_1 x_2 = a$, $a > 4$,

$$\begin{aligned} \therefore f(x_1) + f(x_2) &= a \ln x_1 + \frac{x_1^2}{2} - ax_1 + a \ln x_2 + \frac{x_2^2}{2} - ax_2 \\ &= a \ln(x_1 x_2) + \frac{(x_1 + x_2)^2}{2} - x_1 x_2 - a(x_1 + x_2) = a \left(\ln a - \frac{a}{2} - 1 \right), \end{aligned}$$

不等式 $f(x_1) + f(x_2) < \lambda(x_1 + x_2)$ 恒成立, 即

$$\lambda > \frac{a \left(\ln a - \frac{a}{2} - 1 \right)}{a} = \ln a - \frac{a}{2} - 1 \text{ 恒成立,}$$

$$\text{记 } h(a) = \ln a - \frac{a}{2} - 1, (a > 4),$$

$$\text{则 } h'(a) = \frac{1}{a} - \frac{1}{2} < 0, \text{ 则 } h(a) \text{ 在 } (4, +\infty) \text{ 递减,}$$

$$\text{故 } h(a) < h(4) = \ln 4 - 3,$$

即 $\lambda \geq \ln 4 - 3$.

【标注】【知识点】利用导数解决不等式恒成立问题

2. 换元法

例2

10. 已知函数 $f(x) = \ln x + \frac{1}{4}ax^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$.

(1) 当 $a = -1$ 时, 求 $f(x)$ 的单调区间.

(2) 若 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$, 证明: $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 2a - \frac{1}{4}$.

【答案】(1) $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减.

(2) 证明见解析.

【解析】(1) 当 $a = -1$ 时, $f(x) = \ln x - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$, $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = -\frac{x^2 + x - 2}{2x} = -\frac{(x+2)(x-1)}{2x},$$

当 $x \geq 1$ 时, $f'(x) \leq 0$;

当 $0 < x < 1$ 时, $f'(x) > 0$,

$\therefore f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减.

(2) $\because f(x) = \ln x + \frac{1}{4}ax^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$,

$$\therefore f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2}ax - \frac{1}{2} = \frac{ax^2 - x + 2}{2x},$$

$\because f(x)$ 存在两个极值点,

$\therefore ax^2 - x + 2 = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 有两根,

$$\therefore \begin{cases} a > 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} a > 0 \\ 1 - 8a > 0 \end{cases},$$

$$\therefore 0 < a < \frac{1}{8}, \text{ 且 } x_1 + x_2 = \frac{1}{a}, x_1 x_2 = \frac{2}{a},$$

$$\therefore \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(\ln x_1 - \ln x_2) + \frac{1}{4}a(x_1^2 - x_2^2) - \frac{1}{2}(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2} - \frac{1}{4},$$

$$\text{要证 } \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 2a - \frac{1}{4},$$

$$\text{只需证 } \frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2} > 2a = \frac{2}{x_1 + x_2},$$

$$\text{即证 } \ln \frac{x_1}{x_2} > \frac{2\left(\frac{x_1}{x_2} - 1\right)}{\frac{x_1}{x_2} + 1},$$

$$\text{令 } \frac{x_1}{x_2} = t \in (0, 1), \text{ 只需证 } \ln t > \frac{2(t-1)}{t+1},$$

$$\text{令 } g(t) = \ln t - \frac{2(t-1)}{t+1}, g(1) = 0,$$

$$\therefore g'(t) = \frac{1}{t} - \frac{4}{(t+1)^2} = \frac{(t-1)^2}{t(t+1)} \geq 0,$$

$\therefore g(t)$ 在 $(0, 1)$ 单调递增,

$$\therefore g(t) \geq g(1),$$

$$\text{即 } \ln t - \frac{2(t-1)}{t+1} \geq 0,$$

$$\therefore \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 2a - \frac{1}{4}.$$

【标注】【知识点】通过构造函数证明不等式；利用韦达定理解决双变量问题

● 练2

11. 已知函数 $f(x) = (ax - x^2)e^x (a \geq 0)$.

(1) 若函数 $f(x)$ 在区间 $[2, +\infty)$ 上单调递减, 求实数 a 的取值范围.

(2) 设 $f(x)$ 的两个极值点为 $x_1, x_2 (x_2 > x_1)$, 证明: 当 $a \geq \frac{2\sqrt{11}}{5}$ 时, $f(x_1) + f(x_2) > 0$. (附注: $\ln 11 \approx 2.398$)

【答案】(1) $\left[0, \frac{8}{3}\right]$.

(2) 证明见解析.

【解析】(1) 由 $f(x) = (ax - x^2)e^x$ 求导数得 $f'(x) = (a - 2x)e^x + (ax - x^2)e^x$,

$$\therefore f'(x) = -[x^2 - (a-2)x - a]e^x, \Delta = (a-2)^2 - 4(-a) = a^2 + 4 > 0,$$

$\therefore x^2 - (a-2)x - a = 0$, 有两个不同的实根 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$,

$$x_1 = \frac{a-2-\sqrt{a^2+4}}{2}, x_2 = \frac{a-2+\sqrt{a^2+4}}{2},$$

函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, x_1]$ 上单减, 在 (x_1, x_2) 上单增,

在 $[x_2, +\infty)$ 上单减,

$\therefore$ 要 $f(x)$ 在 $[2, +\infty)$ 上单减, 只需要 $x_2 \leq 2$,

$$\therefore \frac{a-2+\sqrt{a^2+4}}{2} \leq 2, \text{ 即 } \sqrt{a^2+4} \leq 6-a,$$

$$\therefore \begin{cases} a^2+4 \leq (6-a)^2, \\ 6-a > 0 \end{cases}, \text{ 从而 } a \leq \frac{8}{3},$$

$\therefore$ 随求 a 的范围为 $\left[0, \frac{8}{3}\right]$.

(2) $f'(x) = [-x^2 + (a-2)x + a]e^x$,

$\therefore x_1, x_2$ 是 $f(x)$ 极值点 ($x_1 < x_2$),

$\therefore x_1, x_2$ 是关于 x 方程 $x^2 - (a-2)x - a = 0$ 两个实根,

$$\therefore x_1 + x_2 = a-2, x_1 \cdot x_2 = -a,$$

$$\text{又 } f(x_1) + f(x_2) = (ax_1 - x_1^2)e^{x_1} + (ax_2 - x_2^2)e^{x_2},$$

$$x_1^2 - (a-2)x_1 - a = 0$$

$$\Rightarrow ax_1 - x_1^2 = 2x_1 - a = 2x_1 - (x_1 + x_2 + 2) = x_1 - x_2 - 2,$$

$$x_2^2 - (a-2)x_2 - a = 0$$

$$\Rightarrow ax_2 - x_2^2 = 2x_2 - a - (x_1 + x_2 + 2) = x_2 - x_1 - 2,$$

$$\therefore f(x_1) + f(x_2) = (x_1 - x_2 - 2)e^{x_1} + (x_2 - x_1 - 2)e^{x_2}$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2 - 2) + (x_2 - x_1 - 2)e^{x_2 - x_1} > 0,$$

$$\text{令 } t = x_2 - x_1, \text{ 则 } t = x_2 - x_1 = \sqrt{(x_2 + x_1)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{a^2 + 4} \geq \frac{12}{5},$$

从而, 只需 $-(t+2) + (t-2)e^t > 0$, 对 $t \geq \frac{12}{5}$ 恒成立,

$$\text{又令 } h(t) = -(t+2) + (t-2)e^t,$$

而 $h'(t) = -1 + (t-1)e^t$ 在 $\left[\frac{12}{5}, +\infty\right)$ 上单调递增,

$$\therefore h'(t) > h'\left(\frac{12}{5}\right) = -1 + \frac{7}{5}e^{\frac{12}{5}} > 0,$$

$$\begin{aligned}
 \therefore h(t) &\geq h\left(\frac{12}{5}\right) = -\frac{22}{5} + \frac{2}{5}e^{\frac{12}{5}} \\
 &= \frac{2}{5}(e^{\frac{12}{5}} - 11), \\
 \text{又 } \ln 11 &= 2.398 < 2.4 = \frac{12}{5}, \\
 \therefore 11 &< e^{\frac{12}{5}}, \\
 \therefore h(t) &> 0.
 \end{aligned}$$

【标注】【知识点】区间上恒单调；双变量问题；通过构造函数证明不等式