

04不等式证明（二）

一、同构函数

1. 直接构造新函数

例1

1. 设 $f(x) = a \ln x + bx - b$, $g(x) = \frac{ex}{e^x}$, 其中 $a, b \in \mathbf{R}$.

(1) 求 $g(x)$ 的极大值.

(2) 设 $b = 1$, $a > 0$, 若 $|f(x_2) - f(x_1)| < \left| \frac{1}{g(x_2)} - \frac{1}{g(x_1)} \right|$ 对任意的 $x_1, x_2 \in [3, 4] (x_1 \neq x_2)$ 恒成立, 求 a 的最大值.

练1

2. 设 $f(x) = \ln x$, $g(x) = \frac{1}{2}x^2$.

(1) 令 $F(x) = xf(x) - g(x)$, 求 $F(x)$ 的单调区间.

(2) 若任意 $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$ 且 $x_1 > x_2$, 都有 $m[g(x_1) - g(x_2)] > x_1 f(x_1) - x_2 f(x_2)$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

3. 设函数 $f(x) = \ln x + \frac{m}{x}$, $m \in \mathbf{R}$.

(1) 当 $m = e$ (e 为自然对数的底数) 时, 求 $f(x)$ 的最小值.

(2) 讨论函数 $g(x) = f'(x) - \frac{x}{3}$ 零点的个数.

(3) 若对任意 $b > a > 0$, $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} < 1$ 恒成立, 求 m 的取值范围.

4. 已知 $f(x) = a \ln x + \frac{1}{2}x^2 (a > 0)$, 若对任意两个不等的正实数 x_1, x_2 , 都有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 2$ 恒成立, 则 a 的取值范围是 ().

A. $(0, 1]$

B. $(1, +\infty)$

C. $(0, 1)$

D. $[1, +\infty)$

2. 指对同构

例2

5. 设示数 $m > 0$, 若对任意的 $x \geq e$ (其中 e 为自然数对数的底数), 不等式 $x^2 \ln x - me^{\frac{m}{x}} \geq 0$ 恒成立, 则 m 的最大值是 ().

A. $\frac{1}{e}$

B. $\frac{e}{3}$

C. $2e$

D. e

🔔 练2

6. 设函数 $f(x) = x - (x+1)\ln(x+1)$.
- (1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间 .
 - (2) 若方程 $f(x) = t$ 在 $[-\frac{1}{2}, 1]$ 上有两个实数解, 求实数 t 的取值范围 .
 - (3) 证明: 当 $m > n > 0$ 时, $(1+m)^n < (1+n)^m$.
7. 已知函数 $f(x) = ax \ln x - x + 1, a \in \mathbf{R}$.
- (1) 讨论 $f(x)$ 的单调区间 .
 - (2) 当 $p > q > 1$ 时, 证明 $q \ln p + \ln q < p \ln q + \ln p$.

二、双变量问题

寻找两个变量之间的关系, 常见的有韦达定理, 或者是利用换元法研究两个变量的大小比值——

①【韦达定理】将题目中的所求式子全部转化为韦达定理的表达, 然后构造一个新的函数来研究 .
(特别注意变量的取值范围)

②【换元法】先找到两个变量之间的关系, 然后将目标函数转化为两个变量表示的函数, 然后通过换元将其转化为关于单变量的函数, 注意新元的定义域。一般是将其中一个变量设为另一个变量的 t 倍, 之后利用一些等式将问题转化为研究 t 的问题

1. 韦达定理

🔔 例1

8. 已知函数 $f(x) = \ln \frac{1}{x} - ax^2 + x (a > 0)$.
- (1) 讨论 $f(x)$ 的单调性 .
 - (2) 若 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 , 证明: $f(x_1) + f(x_2) > 3 - 2 \ln 2$.

🔔 练1

9. 已知函数 $f(x) = a \ln x + \frac{1}{2}x^2 - ax$ (a 为常数) 有两个不同的极值点 .
- (1) 求实数 a 的取值范围 .
 - (2) 记 $f(x)$ 的两个不同的极值点分别为 x_1, x_2 , 若不等式 $f(x_1) + f(x_2) < \lambda(x_1 + x_2)$ 恒成立, 求实数 λ 的取值范围 .

2. 换元法

🔔 例2

10. 已知函数 $f(x) = \ln x + \frac{1}{4}ax^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$.

(1) 当 $a = -1$ 时 , 求 $f(x)$ 的单调区间 .

(2) 若 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$, 证明 : $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 2a - \frac{1}{4}$.

练2

11. 已知函数 $f(x) = (ax - x^2)e^x (a \geq 0)$.

(1) 若函数 $f(x)$ 在区间 $[2, +\infty)$ 上单调递减 , 求实数 a 的取值范围 .

(2) 设 $f(x)$ 的两个极值点为 $x_1, x_2 (x_2 > x_1)$, 证明 : 当 $a \geq \frac{2\sqrt{11}}{5}$ 时 , $f(x_1) + f(x_2) > 0$. (附注 :

$\ln 11 \approx 2.398$)