

03 零点问题练习题

一、确定函数零点个数

1. 判断下列函数的零点个数 .

(1) $f(x) = x^3 - x^2 - x - 1$.

【答案】 (1) 1个 .

【解析】 (1) $f(x) = x^3 - x^2 - x - 1$ $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = (3x+1)(x-1) = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$ 或 $x = 1$.

当 $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

当 $x \in \left(-\frac{1}{3}, 1\right)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减,

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

$x = -\frac{1}{3}$ 取得极大值 $f\left(-\frac{1}{3}\right) < 0$, $x = 1$ 取得极小值 .

$f(1) < 0$, $f(2) > 0$, $f(x)$ 存在唯一零点 .

故答案为 : 1个 .

【标注】 【知识点】 导数与极值

二、已知零点信息, 求参数取值范围

2. 函数 $f(x) = \ln x - ax^2 + x$ 有两个零点, 则实数 a 的取值范围是 ____ .

【答案】 (0, 1)

【标注】 【知识点】 利用导数求函数的单调性、单调区间; 导数与极值; 利用导数求函数的零点及个数

3. 函数 $f(x) = \ln x - \frac{a}{x}$ 有两个零点, 则实数 a 的取值范围为 ____ .

【答案】 $\left(-\frac{1}{e}, 0\right)$

【解析】 若 $f(x) = \ln x - \frac{a}{x}$ 有两个零点, 则 $a = x \ln x$ 有两个解,

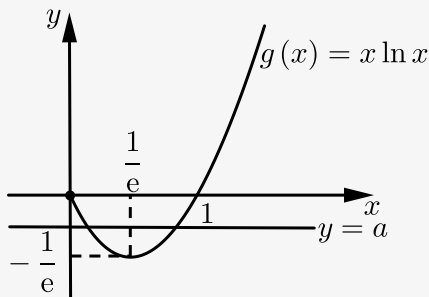
令 $g(x) = x \ln x$, 则 $g'(x) = \ln x + 1$,

当 $x \in (0, \frac{1}{e})$ 时 , $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减 , 当 $x \in (\frac{1}{e}, +\infty)$ 时 , $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增 ,

$$g(x)_{\min} = g\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \ln \frac{1}{e} = -\frac{1}{e} ,$$

又 $g(1) = 0$, 当 $x \in (0, 1)$ 时 , $g(x) < 0$, 当 $x \in (1, +\infty)$ 时 , $g(x) > 0$,

作出 $g(x) = x \ln x$ 的大致图象 , 如图所示 ,



若方程 $a = x \ln x$ 有两个解 , 则直线 $y = a$ 与 $g(x) = x \ln x$ 的图象恰有两个交点 , 由图知 , 实数 a 的取值范围为 $(-\frac{1}{e}, 0)$.

【标注】【知识点】已知零点或根情况求参数范围；函数零点的概念

4. 若函数 $f(x) = ax - \ln x$ 有两个不同的零点 , 则实数 a 的取值范围为 () .

A. $(-\infty, \frac{1}{e})$

B. $(-\infty, e)$

C. $(0, \frac{1}{e})$

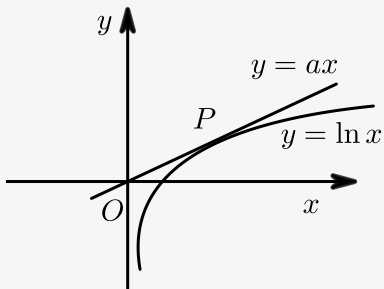
D. $(0, e)$

【答案】 C

【解析】 $\because f(x) = ax - \ln x$, 其中 $x > 0$.

$$\text{令 } f(x) = 0 , ax = \ln x ;$$

在同一坐标系内画出 $y = ax$ 和 $y = \ln x$ 的图象 , 如图所示 :



设曲线 $y = \ln x$ 上点 $P(x_0, y_0)$, 则 $y' = \frac{1}{x}$,

$$\therefore \text{过 } P \text{ 点的切线方程为 } y = y_0 = \frac{1}{x_0}(x - x_0) .$$

且该直线过原点 , $\therefore y_0 = 1$, $\ln x_0 = 1$,

$$\therefore x_0 = e .$$

过 P 点的切线斜率为 $\frac{1}{e}$.

∴所求实数 a 的取值范围是 $\left(0, \frac{1}{e}\right)$.

故选C.

【标注】【知识点】图象法；已知零点或根情况求参数范围；导数的几何意义；求过某点的切线方程；函数零点的概念

三、论证零点存在

5. 证明下面与零点相关命题：

- (1) 已知函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x} - a$ ，其中 $0 < a < \frac{1}{e}$ ，证明： $f(x)$ 在 $(e, +\infty)$ 有唯一零点.
- (2) 已知函数 $f(x) = \ln x + \frac{1}{x} - a$ ，其中 $a > 1$ ，证明： $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 有两个零点.

【答案】(1) 证明见解析.

(2) 证明见解析.

【解析】(1) $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ ， $x > e$ 时 $f'(x) < 0$ ， $f(x)$ 单调递减，最多一个零点，

$$f(e) = \frac{1}{e} - a > 0,$$

$$\text{令 } g(x) = \ln x - x, \quad g'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x},$$

$x > 0$ 时 $g'(x) < 0$ ， $g(x)$ 单调递减，

则 $x > e$ 时 $g(x) < g(e) < 0$ ，即 $\ln x < x$ ，

则 $x > e$ 时 $\ln \sqrt{x} < \sqrt{x}$ ，即 $\ln x < 2\sqrt{x}$ ，

$$\text{则 } f(x) < \frac{2\sqrt{x}}{x} - a = \frac{2}{\sqrt{x}} - a,$$

$$\text{则 } f\left(\frac{4}{a^2}\right) < 0, \text{ 由 } 0 < a < \frac{1}{e} \text{ 可得 } \frac{4}{a^2} > e,$$

则 $f(x)$ 在 $\left(e, \frac{4}{a^2}\right)$ 存在零点，则 $f(x)$ 在 $(e, +\infty)$ 有唯一零点.

$$(2) \quad f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2},$$

则 $x \in (0, 1)$ 时 $f'(x) < 0$ ， $f(x)$ 单调递减，

$x \in (1, +\infty)$ 时 $f'(x) > 0$ ， $f(x)$ 单调递增，

$$f(1) = 1 - a < 0,$$

$$x > 1 \text{ 时}, \quad \frac{1}{x} > 0, \quad f(x) > \ln x - a,$$

$$\text{则 } f(e^a) > 0, \text{ 由 } a > 1 \text{ 可得 } e^a > 1,$$

则 $f(x)$ 在 $(1, e)$ 存在零点，

$$\text{令 } g(x) = \ln x + \frac{1}{x}, \quad g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2},$$

$x \in (0, 1)$ 时 $g'(x) < 0$ ， $g(x)$ 单调递减，

则 $x \in (0, 1)$ 时 $g(x) > g(1) > 0$, 即 $\ln x > -\frac{1}{x}$,
 则 $x \in (0, 1)$ 时 $\ln \sqrt{x} > -\frac{1}{\sqrt{x}}$, 即 $\ln x > -\frac{2}{\sqrt{x}}$,
 则 $f(x) > \frac{1}{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} - a$
 $= \left(\frac{1}{2x} - \frac{2}{\sqrt{x}} \right) + \left(\frac{1}{2x} - a \right)$
 $= \frac{1-4\sqrt{x}}{2x} + \frac{1-2ax}{2x}$,
 令 $x_0 = \min \left\{ \frac{1}{16}, \frac{1}{2a} \right\}$,
 则 $1-4\sqrt{x} \geq 0$, $1-2ax \geq 0$,
 即 $f(x_0) > 0$,
 则 $f(x)$ 在 $(x_0, 1)$ 存在零点,
 综上, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 有两个零点.

【标注】【知识点】导数与最值

四、求解零点个数

6. 设 $n \in \mathbf{N}^*$, 函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x^n}$, 函数 $g(x) = \frac{e^x}{x^n}$, $x \in (0, +\infty)$.
 (1) 当 $n=1$ 时, 写出函数 $y = f(x) - 1$ 零点个数, 并说明理由;

【答案】 (1) 函数 $y = f(x) - 1$ 不存在零点

【解析】 (1) 结论: 函数 $y = f(x) - 1$ 不存在零点.

当 $n=1$ 时, $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, 求导得 $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$,

令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = e$.

当 x 变化时, $f'(x)$ 与 $f(x)$ 的变化如下表所示:

x	$(0, e)$	e	$(e, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$	极大值	$\searrow$

所以函数 $f(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增, 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减,

则当 $x = e$ 时, 函数 $f(x)$ 有最大值 $f(e) = \frac{1}{e}$.

所以函数 $y = f(x) - 1$ 的最大值为 $f(e) - 1 = \frac{1}{e} - 1 < 0$,

所以函数 $y = f(x) - 1$ 不存在零点.

【标注】【知识点】求函数最值 (含参指对型导函数); 直接求函数的零点 (不含参)

7. 已知函数 $f(x) = ax^3 - \frac{3}{2}(a+2)x^2 + 6x - 3$

(1) 当 $a > 2$ 时, 求函数 $f(x)$ 的极小值;

(2) 若 $a < 2$, 试讨论曲线 $y = f(x)$ 与 x 轴公共点的个数.

【答案】 (1) $f(1) = -\frac{a}{2}$.

(2) 三.

【解析】 (1) $f'(x) = 3ax^2 - 3(a+2)x + 6 = 3a\left(x - \frac{2}{a}\right)(x - 1)$, $f(x)$ 极小值为 $f(1) = -\frac{a}{2}$.

(2) ①若 $a = 0$, 则 $f(x) = -3(x-1)^2$, $\therefore f(x)$ 的图像与 x 轴只有一个交点;

②若 $a < 0$, 则 $f(x)$ 极大值为 $f(1) = -\frac{a}{2} > 0$,

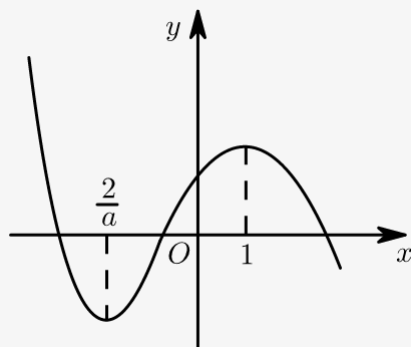
$\therefore f(x)$ 的极小值 $f\left(\frac{2}{a}\right) = \frac{6}{a} - \frac{4}{a^2} - 3 = \frac{-3(a-1)^2 - 1}{a^2} < 0$,

且 $x \rightarrow -\infty$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$; $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow -\infty$. $f(x)$ 图象大致如下

$\therefore f(x)$ 的图像与 x 轴有三个交点.

③若 $0 < a < 2$, 类似的, $f(x)$ 极大值为 $f(1) = -\frac{a}{2} < 0$, 极小值 $f\left(\frac{2}{a}\right) < 0$, $f(x)$ 的图像与 x 轴只有一个交点;

综上知, 若 $0 \leq a < 2$, $f(x)$ 的图像与 x 轴只有一个交点; 若 $a < 0$, $f(x)$ 的图像与 x 轴有三个交点.



【标注】【知识点】求函数零点 (含参二次型导函数); 含参导数的零点 (利用极限判断)