

03零点问题

一、函数零点

1. 零点概念

对于函数 $y = f(x) (x \in D)$ ，把使 $f(x) = 0$ 成立的实数 x 叫做函数 $y = f(x) (x \in D)$ 的零点。

2. 求解不含参函数零点个数

【题型特点】含有指对函数，不含参数。

【解题思路】

①分离成两个基本函数，研究交点个数（与切线位置比较）。【零点转交点思想，首选方法】

②直接研究单调性与极值。（在不能分离时使用）

【四条必记切线】

指数函数 e^x ：① $y = ex$ （过原点的切线）。② $y = x + 1$ 。（常用不等式）

对数函数 $\ln x$ ：① $y = \frac{x}{e}$ （过原点的切线）。② $y = x - 1$ 。（常用不等式）

🔗 例1（零点转交点，画图）

1. 判断下列函数的零点个数。

(1) $f(x) = e^x - x - 2$

🔗 例2（求导判断单调性，画图）

2. 函数 $f(x) = x^2 + x - (x + 1) \sin x$ 的零点的个数是（ ）。

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

3. 函数 $f(x) = \sqrt{x+2} - \ln x - 2$ 的零点个数为 _____。

🔗 练2

4. 函数 $f(x) = \ln x - \frac{1}{3}x^3 + 1$ 的零点个数为（ ）。

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

3. 含参函数零点求解办法

🔗 分离变量

【核心思想】：零点转交点

- ① 函数 $y = f(x)$ 有零点 $\Leftrightarrow f(x) = 0$ 有实数根 $\Leftrightarrow$ 函数 $y = f(x)$ 与 x 轴有交点 .
- ② $f(x) = k$ 有几个根 $\Leftrightarrow$ 函数 $y = f(x)$ 与 $y = k$ 图象有几个交点
 $\Leftrightarrow$ 函数 $g(x) = f(x) - k$ 图象与 x 轴有几个交点 .
- ③ 方程 $f(x) = g(x)$ 有几个根 $\Leftrightarrow$ 函数 $y = f(x)$ 与 函数 $y = g(x)$ 图象有几个交点
 $\Leftrightarrow$ 函数 $h(x) = f(x) - g(x)$ 的图象与 x 轴有几个交点 .

🔗 分类讨论

【核心思想】：画图

- ① 分类讨论，研究单调性 .
- ② 画图，判定极值的正负性，解不等式 .

二、根据零点信息，求解参数取值范围（常见不分参模型）

🔗 分类讨论的详细步骤

【详细步骤】

（1）求导：利用等价导函数得到单调性。得到等价导函数的常用技巧如下：

- ① 恒大于零的因式直接“忽略” .
- ② 一定不要轻易把导函数随便展开，多去观察有没有公因式 .
- ③ “清君侧”，把 $\ln x$ 的系数除掉 .

（2）研究比较复杂的等价导函数正负性。（如果等价导函数很简单，则跳过此步）

猜零点：最常见的零点 0 与 1 （猜测首选）。比较罕见的零点 e 或 $\frac{1}{e}$.

若猜出零点：那么证明该零点是唯一零点。（继续求导，利用二阶导的正负性，证明一阶导单调）

【特别说明】：如果题目比较复习可能需要多次求导，重复猜零点的过程，求导之前一定要确定有零点，换句话说，如果有零点，就可以一直导下去】

若猜不出零点：那么证明一阶导没有零点。即恒大于零或恒小于零。（继续求导，利用极值研究最值，可得一阶导的正负性）

（3）写出函数单调性，并计算端点值 .

单调性：如果出现定义域断点，单调性一定要分开写。（断点处是渐近线）

端点值：洛必达法则，算出每个单调性区间的端点极限值。

(4) 画出大致图像。(渐近线处一定要画的光滑)

【特别说明】

有一类题型，一阶导零点猜不出来，但是研究一阶导单调性发现，一阶导是有零点的，这类题型是隐零点问题，比较复杂，我们将在春季课程学习。

1. 一阶导零点可求

例1

5. 已知函数 $h(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1-a}{2}x^2 - ax - a (a > 0)$ 在区间 $(-2, 0)$ 内恰有两个零点，求 a 的取值范围。

6. 已知函数 $f(x) = x - 1 + ae^x$ 。

(3) 当 $a = 1$ 时，曲线 $y = f(x)$ 与直线 $y = kx - 1$ 没有公共点，求 k 的取值范围。

练1

7. 若方程 $x^3 - 3ax + 2 = 0$ 有三个不同实根，则实数 a 的取值范围为 ()。

- A. $a > 0$ B. $a > 1$ C. $1 < a < 3$ D. $0 < a < 1$

2. 导数为高次型

三次函数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d (a > 0)$,

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, $\Delta = 4b^2 - 12ac$ 。

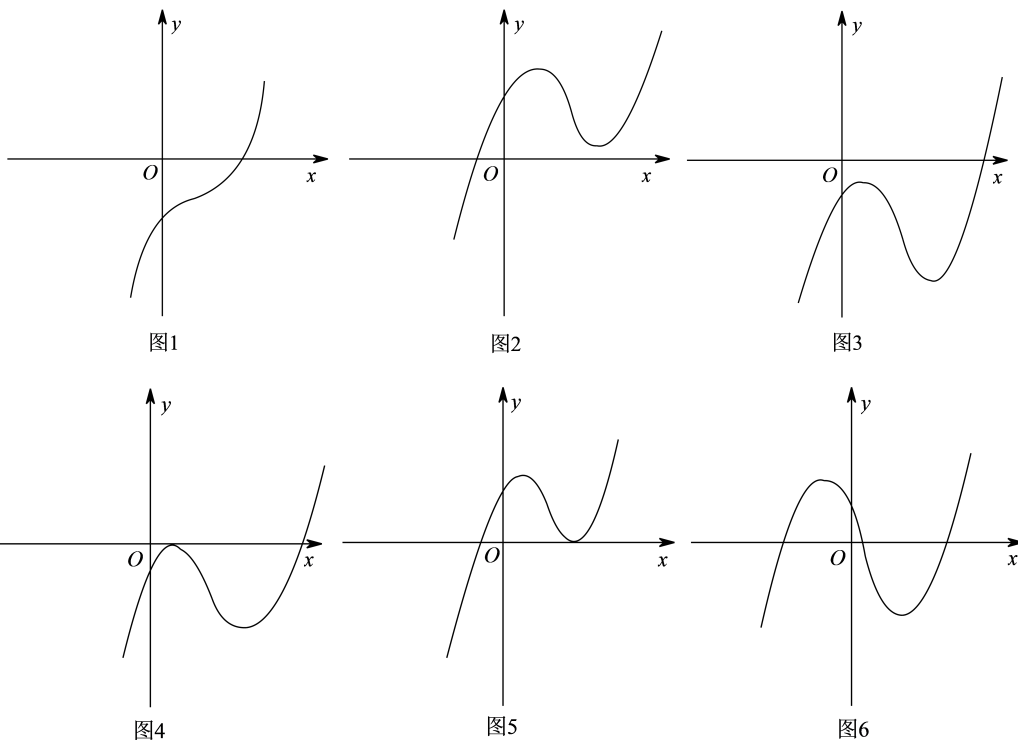
1, 当 $\Delta \leq 0$ 时, $f'(x)$ 且不恒为 0, $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 函数 $f(x)$ 有且仅有 1 个零点, 如下图 1。

2, 当 $\Delta > 0$ 时, $f(x)$ 有极大值和极小值;

① 当 $f(x)$ 的极大值小于 0 或 $f(x)$ 的极小值大于 0 时, $f(x)$ 有且仅有 1 个零点; 如图 2 和 3;

② 当 $f(x)$ 的极大值或 $f(x)$ 的极小值等于 0 时, $f(x)$ 有 2 个零点; 如图 4 和 5;

③ 当 $f(x)$ 的极大值大于 0 且 $f(x)$ 的极小值小于 0 时, $f(x)$ 有 3 个零点, 如图 6。



例2

8. 已知函数 $f(x) = a(x - 2\ln x) + \frac{x-1}{x^2}$, $a \in \mathbf{R}$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性.

(2) 若 $f(x)$ 有两个零点, 求实数 a 的取值范围.

三、根据零点信息, 求解参数取值范围 (分参型)

分离参数的详细步骤

【详细步骤】

①分离参数: 将含有参数的部分与不含参数的部分, 分到等号两侧, 得到 $f(x) \cdot a = g(x)$.

②研究渐近线: 研究 $f(x)$ 是否有零点.

③构造函数: 将 $f(x)$ 除过去, 得到 $a = \frac{g(x)}{f(x)}$. 转化为 $y = a$ 与 $y = \frac{g(x)}{f(x)}$ 交点问题.

④画图: 令 $h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$, 画出 $h(x)$ 的大致图像. (图画具体步骤在后面)

(若②没有零点, 则 $h(x)$ 连续. 若②在有零点 x_0 , 则 $h(x)$ 在 $x = x_0$ 处存在渐近线)

⑤交点个数 (零点个数): 找到 a 的范围.

一阶导零点可求

1. 无渐近线

🧠 例1

9. 已知函数 $f(x) = \frac{2}{x} + a \ln x - 2 (a > 0)$.

(3) 记 $g(x) = f(x) + x - b (b \in \mathbf{R})$, 当 $a = 1$ 时 , 函数 $g(x)$ 在区间 $[e^{-1}, e]$ 上有两个零点 , 求实数 b 的取值范围 .

🧠 练1

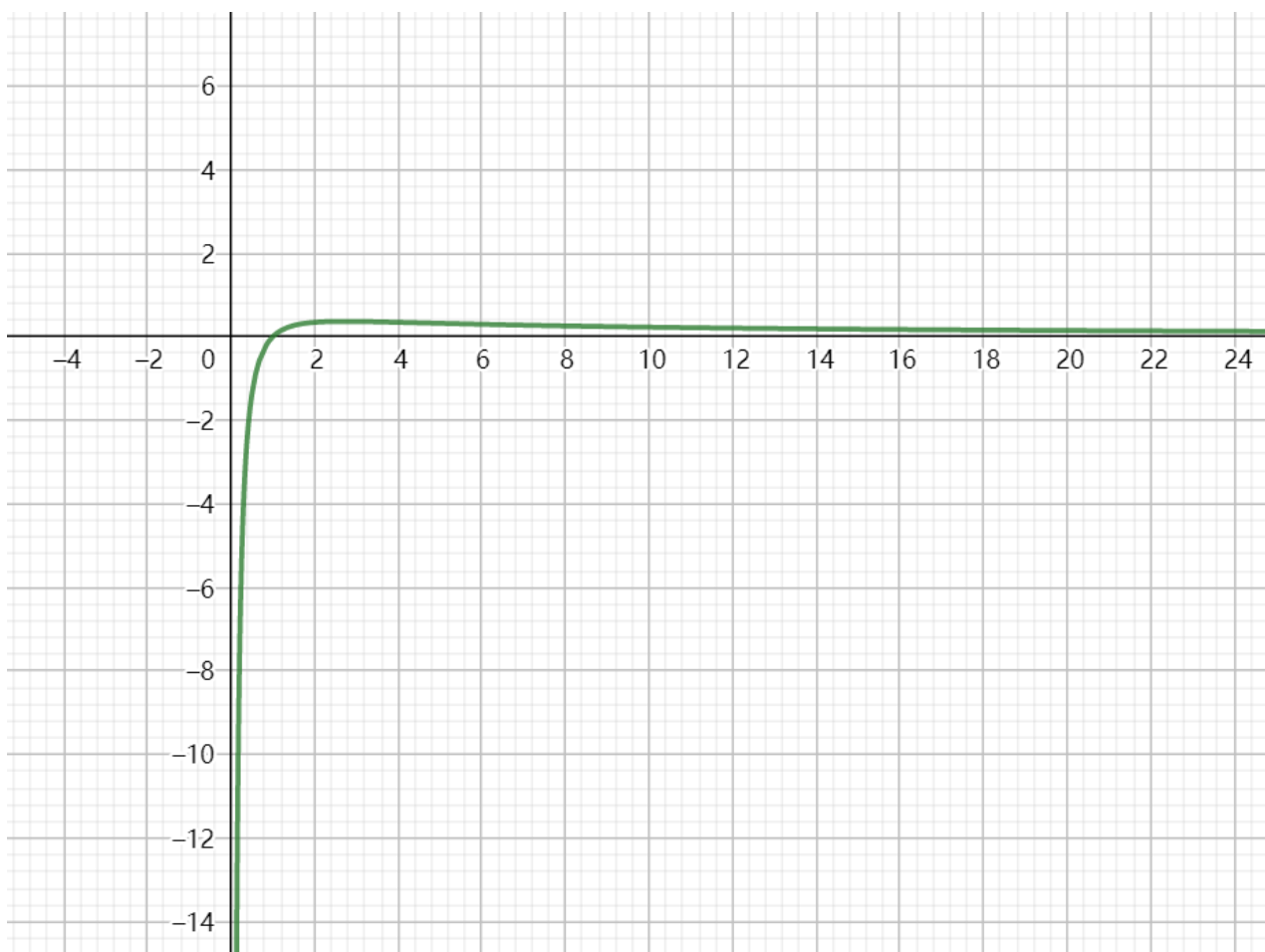
10. 设函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$.

(2) 设 $a = b = 4$, 若函数 $f(x)$ 有三个不同零点 , 求 c 的取值范围 ;

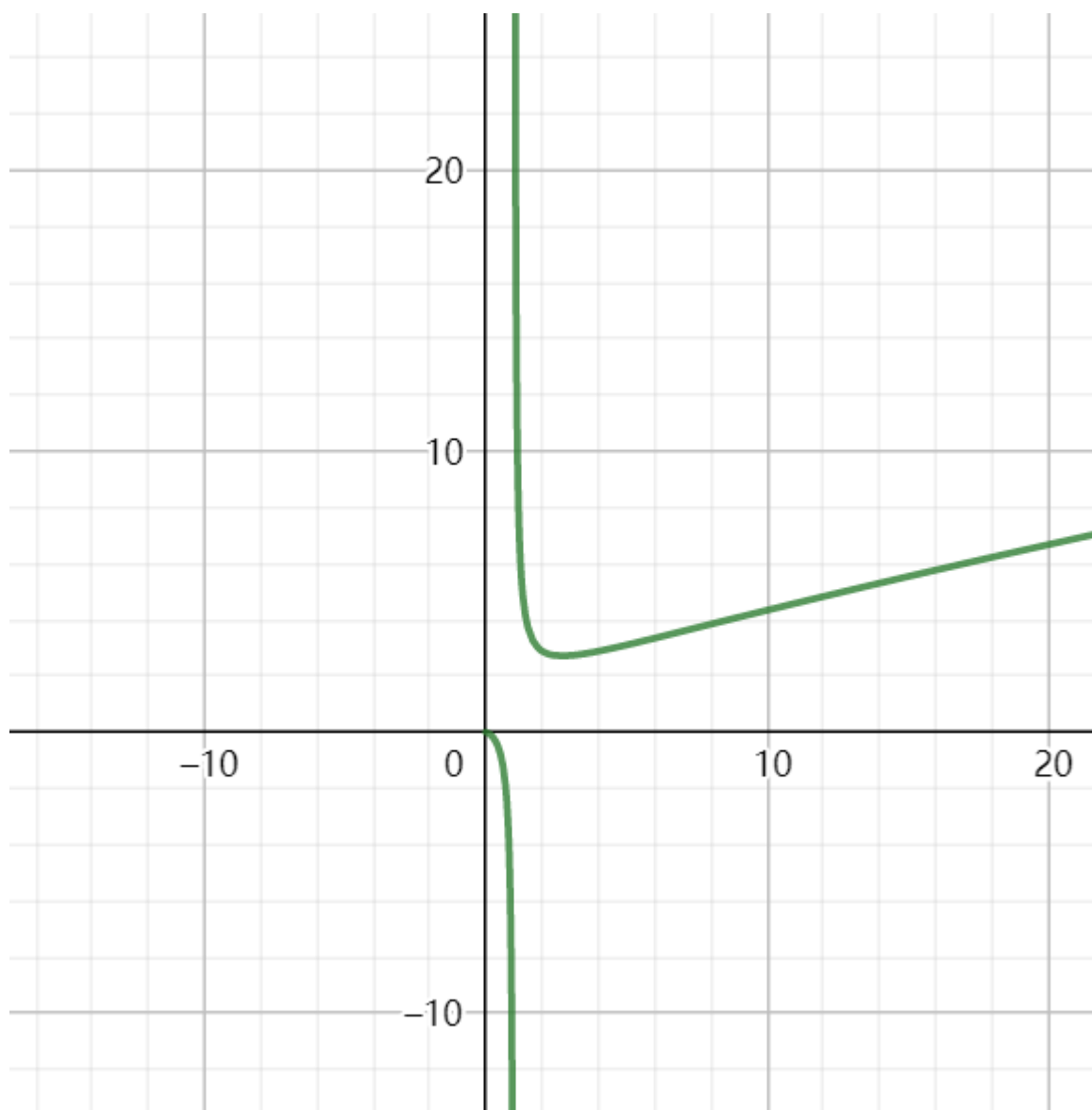
2. 有渐近线

▮ 常考察的渐近线图像

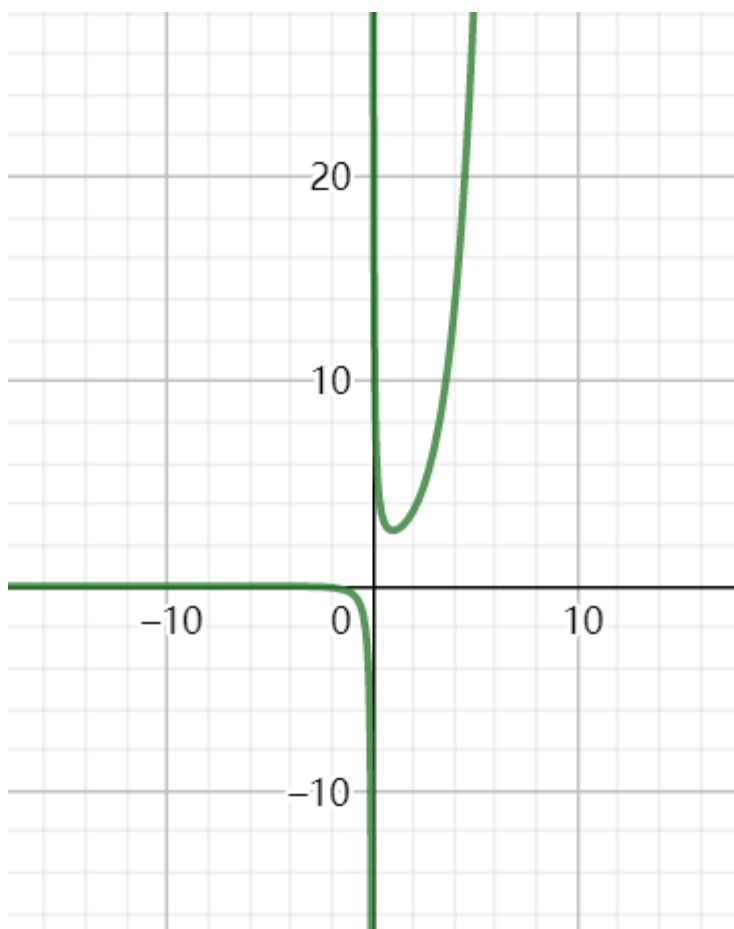
🧠 $y = \frac{\ln x}{x}$ 型



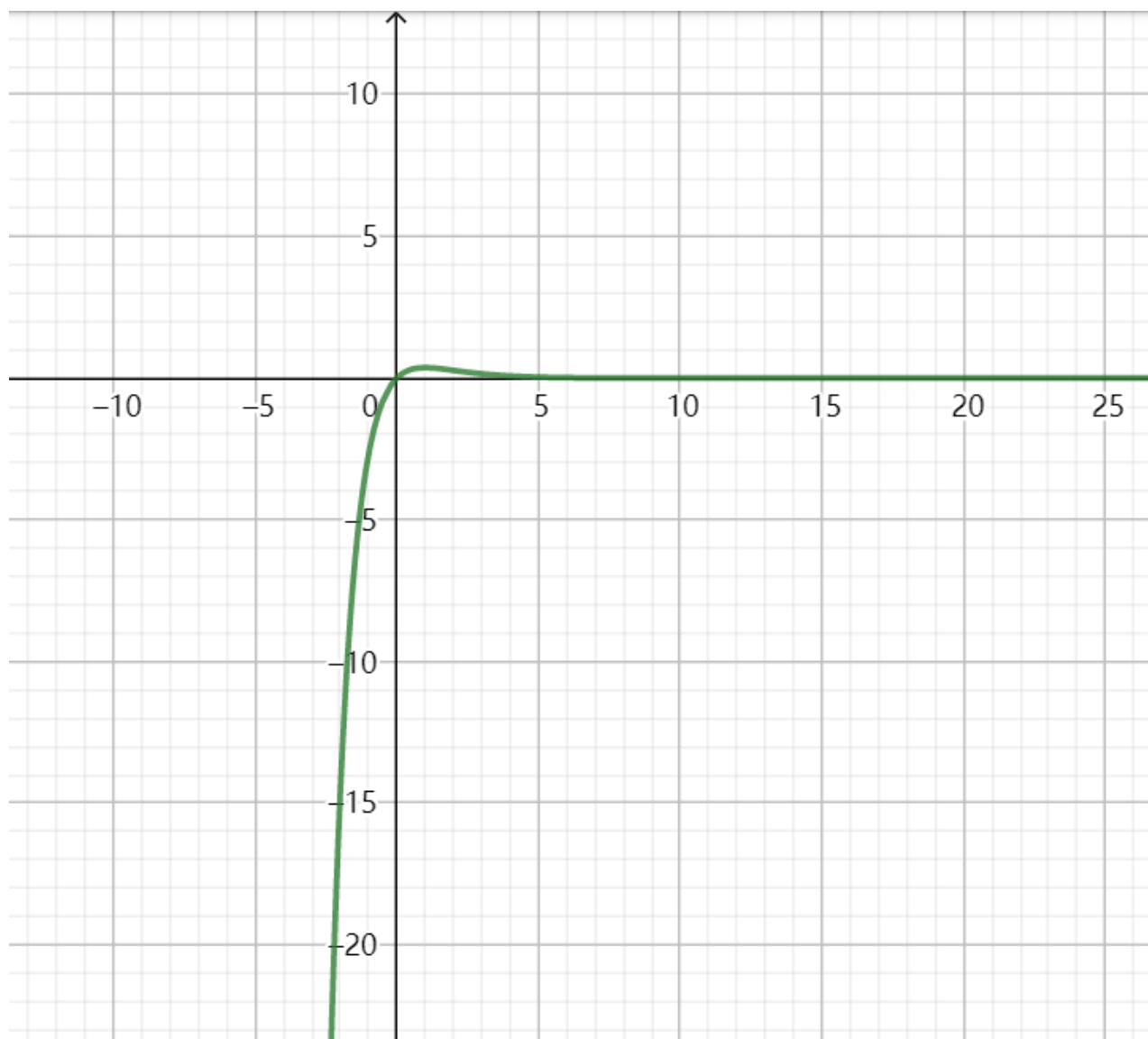
$$y = \frac{x}{\ln x} \text{ 型}$$



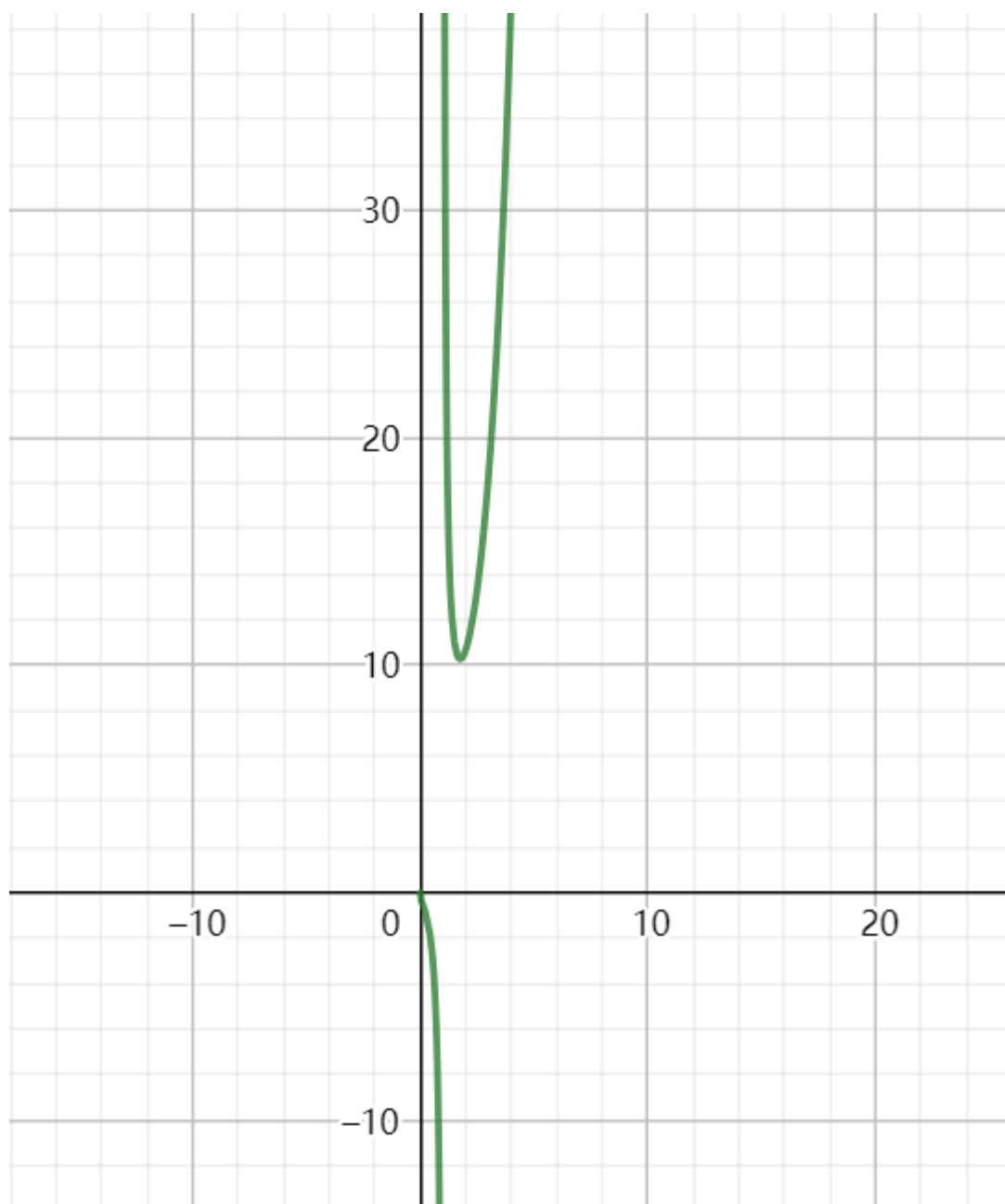
$$\text{🔗 } y = \frac{e^x}{x} \text{ 型}$$



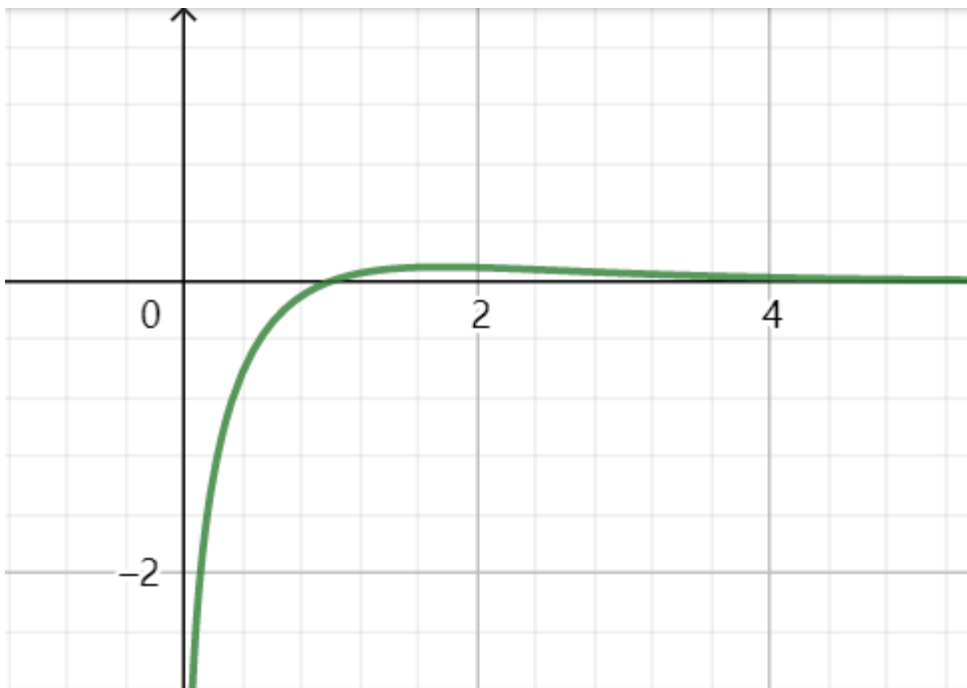
💡 $y = \frac{x}{e^x}$ 型



💡 $y = \frac{e^x}{\ln x}$ 型



💡 $y = \frac{\ln x}{e^x}$ 型



例2

11. 已知函数 $f(x) = 2\ln x - x \ln a$ 有两个零点，则 a 的取值范围为 () .

- A. $(0, 1)$ B. $(1, e)$ C. $(1, e^{\frac{2}{e}})$ D. $(e^{\frac{2}{e}}, e)$

12. 已知函数 $f(x) = \ln x - ax^2$ ，若 $f(x)$ 恰有两个不同的零点，则 a 的取值范围为 () .

- A. $(\frac{1}{2e}, +\infty)$ B. $[\frac{1}{2e}, +\infty)$ C. $(0, \frac{1}{2e})$ D. $(0, \frac{1}{2e}]$

练2

13. 若函数 $f(x) = \frac{k}{x} + \ln x$ 有 2 个零点，则实数 k 的取值范围是 () .

- A. $(0, \frac{1}{e})$ B. $[e, +\infty)$ C. $(0, \frac{1}{e}]$ D. $(e, +\infty)$

3. 二阶导问题

例3

14. 若函数 $f(x) = ax + \ln x - \frac{x^2}{x - \ln x}$ 有三个不同的零点，则实数 a 的取值范围是 () .

- A. $[\frac{1}{e} - \frac{e}{e-1}, -1]$ B. $[1, \frac{e}{e-1} - \frac{1}{e}]$ C. $(\frac{1}{e} - \frac{e}{e-1}, -1)$ D. $(1, \frac{e}{e-1} - \frac{1}{e})$

四、论证零点存在性

(1) 函数零点存在性定理：一般地，如果函数 $y = f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的图象是连续不断的一条曲

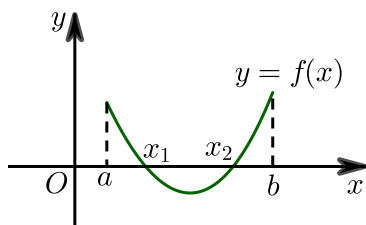
线, 并且有 $f(a) \cdot f(b) < 0$, 那么, 函数 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 内有零点, 即存在 $c \in (a, b)$, 使得 $f(c) = 0$, 这个 c 也就是方程 $f(x) = 0$ 的根.

(2) 对于函数零点存在性定理的理解, 应注意以下四点:

① 定理中函数 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 内有零点必须同时满足: 函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的图象是一条连续不断的曲线, $f(a) \cdot f(b) < 0$, 这两个条件缺一不可. 可由函数 $y = \frac{1}{x}$ 来理解, 易知 $f(-1) \cdot f(1) = -1 \times 1 < 0$, 但显然 $y = \frac{1}{x}$ 在 $[-1, 1]$ 内没有零点, 这是因为 $y = \frac{1}{x}$ 在 $[-1, 1]$ 上的图象不连续.

② 符合该定理的条件能确定 $f(x)$ 在 (a, b) 内至少有一个变号零点, 也可能有其他的变号或不变号零点, 即定理只说明零点存在, 但零点不一定唯一.

③ 并不是所有的零点都可以用该定理来确定, 若不满足该定理的条件, 并不能说明函数在 (a, b) 内没有零点如图, $f(a) \cdot f(b) > 0$, 但 $f(x)$ 在 (a, b) 内有零点 x_1, x_2 .



④ 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的图象是连续不断的, 且是单调函数, $f(a) \cdot f(b) < 0$, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 上有唯一的零点.

例1

15. 证明下列函数零点相关问题:

- (1) 已知函数 $f(x) = \ln x + x^2 + a$, 其中 $a > 0$, 证明: $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 有唯一零点.
- (2) 已知函数 $f(x) = \ln x + \frac{1}{x^2} - a$, 其中 $a > 0$, 证明: $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 有唯一零点.
- (3) 已知函数 $f(x) = \ln x + \frac{1}{x} - a$, 其中 $a > 0$, 证明: $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 有唯一零点.
- (4) 已知函数 $f(x) = x \ln x + a$, 其中 $0 < a < \frac{1}{e}$, 证明: $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{e})$ 有唯一零点.

练1

16. 证明下面与零点相关命题:

- (1) 已知函数 $f(x) = \ln x - 4\sqrt{x} + a$, 其中 $a > 4$, 证明: $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 有唯一零点.

例2

17. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - a(x^2 + x + 1)$.

- (2) 证明: $f(x)$ 只有一个零点.

练2

18. 已知函数 $f(x) = 2e^x - ax^2 - 2x - 2$.

(2) 当 $a \leq 0$ 时, 求证: 函数 $f(x)$ 有且只有一个零点.

五、求零点个数

1. 静态取点

例1

19. 已知函数 $f(x) = e^{mx} - 1 - x (m > 0)$.

(2) 探讨 $f(x)$ 的零点个数.

练1

20. 已知函数 $f(x) = (x+a)e^x$, $a < 1$, 试确定函数 $g(x) = f(x-a) - x^2$ 的零点个数, 并说明理由.

21. 已知函数 $f(x) = x + \frac{a}{x} + \ln x$, $a \in \mathbf{R}$.

(3) 讨论函数 $g(x) = f'(x) - x$ 的零点个数.

22. 讨论函数 $f(x) = x + a \ln x$ 零点的个数.

2. 动态取点

例2

23. 已知函数 $f(x) = a \ln x + \frac{1}{x} (a \in \mathbf{R})$.

(3) 当 $a > 0$ 时, 讨论函数 $y = f(x)$ 零点的个数.

练2

24. 已知函数 $f(x) = a \ln x + \frac{x^2}{2} - (a+1)x$, $a \in \mathbf{R}$.

(2) 当 $a \leq 1$ 时, 讨论函数 $f(x)$ 的零点个数.