

03不等式证明（一）练习题

1. 已知 $f(x) = a(x - \ln x) + \frac{2x-1}{x^2}$, $a \in \mathbf{R}$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性.

(2) 当 $a = 1$ 时, 证明 $f(x) > f'(x) + \frac{3}{2}$ 对于任意的 $x \in [1, 2]$ 恒成立.

【答案】 (1) 当 $a \leq 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 内单调递减;

当 $0 < a < 2$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内单调递增, 在 $(1, \sqrt{\frac{2}{a}})$ 内单调递减, 在 $(\sqrt{\frac{2}{a}}, +\infty)$ 内单调递增;

当 $a = 2$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调递增;

当 $a > 2$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(0, \sqrt{\frac{2}{a}})$ 内单调递增, 函数 $f(x)$ 在 $(\sqrt{\frac{2}{a}}, 1)$ 内单调递减, 函数 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 内单调递增.

(2) 证明见解析.

【解析】 (1) $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$.

$$f'(x) = a - \frac{a}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3} = \frac{(ax^2 - 2)(x - 1)}{x^3}.$$

当 $a \leq 0$, $x \in (0, 1)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

$x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减.

$$\text{当 } a > 0 \text{ 时, } f'(x) = \frac{a(x-1)}{x^3} \left(x + \sqrt{\frac{2}{a}}\right) \left(x - \sqrt{\frac{2}{a}}\right).$$

① 当 $0 < a < 2$ 时, $\sqrt{\frac{2}{a}} > 1$.

当 $x \in (0, 1)$ 或 $(\sqrt{\frac{2}{a}}, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

当 $x \in (1, \sqrt{\frac{2}{a}})$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减.

② 当 $a = 2$ 时, $\sqrt{\frac{2}{a}} = 1$.

在 $x \in (0, +\infty)$ 内, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增.

③ 当 $a > 2$ 时, $0 < \sqrt{\frac{2}{a}} < 1$.

当 $x \in (0, \sqrt{\frac{2}{a}})$ 或 $(1, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

当 $x \in (\sqrt{\frac{2}{a}}, 1)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减.

综上所述,

当 $a \leq 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 内单调递减;

当 $0 < a < 2$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内单调递增, 在 $\left(1, \sqrt{\frac{2}{a}}\right)$ 内单调递减, 在 $\left(\sqrt{\frac{2}{a}}, +\infty\right)$ 内单调递增;

当 $a = 2$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调递增;

当 $a > 2$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $\left(0, \sqrt{\frac{2}{a}}\right)$ 内单调递增, 函数 $f(x)$ 在 $\left(\sqrt{\frac{2}{a}}, 1\right)$ 内单调递减, 函数 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 内单调递增.

$$(2) \text{ 由 (1) 知, } a = 1 \text{ 时, } f(x) - f'(x) = x - \ln x + \frac{2x-1}{x^2} - \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right)$$

$$= x - \ln x + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} - 1, \quad x \in [1, 2].$$

$$\text{令 } g(x) = x - \ln x, \quad h(x) = \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} - 1, \quad x \in [1, 2].$$

$$\text{则 } f(x) - f'(x) = g(x) + h(x).$$

$$\text{由 } g'(x) = \frac{x-1}{x} \geq 0 \text{ 可得 } g(x) \geq g(1) = 1, \text{ 当且仅当 } x = 1 \text{ 时等号成立.}$$

$$\text{又 } h'(x) = \frac{-3x^2 - 2x + 6}{x^4},$$

$$\text{设 } \varphi(x) = -3x^2 - 2x + 6, \text{ 则 } \varphi(x) \text{ 在 } [1, 2] \text{ 内单调递减.}$$

$$\text{因为 } \varphi(1) = 1, \quad \varphi(2) = -10,$$

$$\text{则在 } [1, 2] \text{ 上存在 } x_0 \text{ 使得 } x \in (1, x_0), \varphi(x) > 0, \quad x \in (x_0, 2) \text{ 时, } \varphi(x) < 0,$$

$$\text{则函数 } h(x) \text{ 在 } (1, x_0) \text{ 上单调递增, 在 } (x_0, 2) \text{ 上单调递减.}$$

$$\text{由于 } h(1) = 1, \quad h(2) = \frac{1}{2},$$

$$\text{则 } h(x) \geq h(2) = \frac{1}{2}, \text{ 当且仅当 } x = 2 \text{ 时等号成立.}$$

$$\text{故 } f(x) - f'(x) > g(1) + h(2) = \frac{3}{2},$$

$$\text{即 } f(x) > f'(x) + \frac{3}{2} \text{ 对任意的 } x \in [1, 2] \text{ 恒成立.}$$

【标注】【知识点】利用导数求函数的最值; 通过构造函数证明不等式; 利用导数求函数的单调性、单调区间

2. 已知函数 $f(x) = ax^2 - x$, $g(x) = b \ln x$, 且曲线 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x = 1$ 处有相同的切线.

(1) 求实数 a, b 的值.

(2) 求证: $f(x) \geq g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立.

(3) 当 $n \in [6, +\infty)$ 时, 求方程 $f(x) + x = ng(x)$ 在区间 $(1, e^n)$ 内实根的个数.

【答案】 (1) $a = 1, b = 1$.

(2) 证明见解析.

(3) 2.

【解析】 (1) $\because f(x) = b \ln x, g(x) = ax^2 - x (a \in \mathbf{R}),$

$$\therefore g'(x) = 2ax - 1,$$

$\therefore$ 曲线 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在公共点 $A(1, 0)$ 处有相同的切线,

$$\therefore f(1) = a - 1, g(1) = 0, f'(1) = g'(1),$$

$$\therefore a = 1,$$

$$\therefore f'(x) = 2ax - 1, g'(x) = \frac{b}{x},$$

$$\therefore f'(1) = 2a - 1, g'(1) = b,$$

$$\therefore f'(1) = g'(1),$$

$$\text{即 } 2a - 1 = b,$$

$$\therefore b = 1.$$

(2) 设 $u(x) = f(x) - g(x) = x^2 - x - \ln x, x > 0,$

$$\therefore u'(x) = 2x - 1 - \frac{1}{x} = \frac{(2x+1)(x-1)}{x},$$

令 $u'(x) = 0$, 则有 $x = 1$,

当 $u'(x) > 0$, 即 $x > 1$ 时, 函数 $u(x)$ 单调递增,

当 $u'(x) < 0$, 即 $0 < x < 1$ 时, 函数 $u(x)$ 单调递减,

$\therefore u(x) \geq u(1) = 0$, 即 $f(x) \geq g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立.

(3) 设 $h(x) = ng(x) - f(x) - x = n \ln x - x^2$, 其中 $x \in (1, e^n)$,

$$\therefore h'(x) = \frac{n}{x} - 2x = \frac{2\left(x + \frac{\sqrt{2n}}{2}\right)\left(x - \frac{\sqrt{2n}}{2}\right)}{x}.$$

$$\text{令 } h'(x) = 0, \text{ 则有 } x = \frac{\sqrt{2n}}{2},$$

当 $h'(x) > 0$, 解得 $1 < x < \frac{\sqrt{2n}}{2}$, 函数 $h(x)$ 的单调递增,

当 $h'(x) < 0$, 解得 $\frac{\sqrt{2n}}{2} < x < e^n$, 函数 $h(x)$ 的单调递减,

$$\therefore h(x) = h\left(\frac{\sqrt{2n}}{2}\right) = \frac{n}{2} \left(\ln \frac{n}{2} - 1\right) \geq 3(\ln 3 - 1) > 0,$$

$$\therefore h(e^n) = n^2 - e^{2n} = (n + e^n)(n - e^n),$$

设 $t(x) = x - e^x$, 其中 $x \in (6, +\infty)$, 则 $t'(x) = 1 - e^x < 0$,

$\therefore t(x)$ 在 $(6, +\infty)$ 内单调递减, $t(x) < t(6) < 0$,

$\therefore x < e^x$, 故 $h(e^n) < 0$, 而 $h(1) = -1$.

结合函数 $h(x)$ 的图象, 可知 $h(x)$ 在区间 $(1, e^n)$ 内有两个零点,

$\therefore$ 方程 $f(x) + x = ng(x)$ 在区间 $(1, e^n)$ 内实根的个数为 2.

【标注】【知识点】利用导数解决不等式恒成立问题; 求函数零点 (含参二次型导函数)

3. 已知函数 $f(x) = \frac{\ln x - 1}{x} - ax (a \in \mathbf{R})$.

(1) 若 $a = 0$, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程.

(2) 若 $a < -1$, 求函数 $f(x)$ 的单调区间.

(3) 若 $1 < a < 2$, 求证: $f(x) < -1$.

【答案】 (1) $2x - y - 3 = 0$.

(2) $(0, +\infty)$.

(3) 证明见解析.

【解析】 (1) 若 $a = 0$, 则 $f(1) = -1$, $f'(x) = \frac{2 - \ln x}{x^2}$, $f'(1) = 2$,

所以 $f(x)$ 在点 $(1, -1)$ 处的切线方程为 $2x - y - 3 = 0$.

(2) $x \in (0, +\infty)$, $f'(x) = \frac{2 - ax^2 - \ln x}{x^2}$,
令 $g(x) = 2 - ax^2 - \ln x$, 则 $g'(x) = \frac{-2ax^2 - 1}{x}$.

令 $g'(x) = 0$, 得 $x = \pm \sqrt{-\frac{1}{2a}}$ (依题意 $-\frac{1}{2a} > 0$),

由 $g'(x) > 0$, 得 $x > \sqrt{-\frac{1}{2a}}$,

由 $g'(x) < 0$, 得 $0 < x < \sqrt{-\frac{1}{2a}}$.

所以, $g(x)$ 在区间 $(0, \sqrt{-\frac{1}{2a}})$ 上单调递减,

在区间 $(\sqrt{-\frac{1}{2a}}, +\infty)$ 上单调递增

所以, $g(x)_{\min} = g\left(\sqrt{-\frac{1}{2a}}\right) = \frac{5}{2} - \ln \sqrt{-\frac{1}{2a}}$,

因为 $a < -1$, 所以 $0 < -\frac{1}{2a} < \frac{1}{2}$, $\ln \sqrt{-\frac{1}{2a}} < 0$.

所以 $g(x) > 0$, 即 $f'(x) > 0$.

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, +\infty)$.

(3) 由 $x > 0$, $f(x) < -1$, 等价于 $\frac{\ln x - 1}{x} - ax < -1$,

等价于 $ax^2 - x + 1 - \ln x > 0$.

设 $h(x) = ax^2 - x + 1 - \ln x$, 只须证 $h(x) > 0$ 成立.

因为 $h'(x) = 2ax - 1 - \frac{1}{x} = \frac{2ax^2 - x - 1}{x}$, $1 < a < 2$,

由 $h'(x) = 0$, 得 $2ax^2 - x - 1 = 0$ 有异号两根.

令其正根为 x_0 , 则 $2ax_0^2 - x_0 - 1 = 0$.

在 $(0, x_0)$ 上 $h'(x) < 0$, 在 $(x_0, +\infty)$ 上 $h'(x) > 0$

则 $h(x)$ 的最小值为 $h(x_0) = ax_0^2 - x_0 + 1 - \ln x_0$

$$= \frac{1 + x_0}{2} - x_0 + 1 - \ln x_0$$

$$= \frac{3 - x_0}{2} - \ln x_0,$$

又 $h'(1) = 2a - 2 > 0$, $h'\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{a}{2} - \frac{3}{2}\right) = a - 3 < 0$,

所以 $\frac{1}{2} < x_0 < 1$, 则 $\frac{3 - x_0}{2} > 0$, $-\ln x_0 > 0$.

因此 $\frac{3-x_0}{2} - \ln x_0 > 0$, 即 $h(x_0) > 0$, 所以 $h(x) > 0$.

所以 $f(x) < -1$.

【标注】【知识点】求函数单调区间（含参二次型导函数）；通过构造函数证明不等式