

03不等式证明（一）练习题

1. 已知 $f(x) = a(x - \ln x) + \frac{2x-1}{x^2}$, $a \in \mathbf{R}$.
 - (1) 讨论 $f(x)$ 的单调性.
 - (2) 当 $a = 1$ 时, 证明 $f(x) > f'(x) + \frac{3}{2}$ 对于任意的 $x \in [1, 2]$ 恒成立.
2. 已知函数 $f(x) = ax^2 - x$, $g(x) = b \ln x$, 且曲线 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x = 1$ 处有相同的切线.
 - (1) 求实数 a, b 的值.
 - (2) 求证: $f(x) \geq g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立.
 - (3) 当 $n \in [6, +\infty)$ 时, 求方程 $f(x) + x = ng(x)$ 在区间 $(1, e^n)$ 内实根的个数.
3. 已知函数 $f(x) = \frac{\ln x - 1}{x} - ax (a \in \mathbf{R})$.
 - (1) 若 $a = 0$, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程.
 - (2) 若 $a < -1$, 求函数 $f(x)$ 的单调区间.
 - (3) 若 $1 < a < 2$, 求证: $f(x) < -1$.