

03不等式证明（一）

一、不等式问题

题型概览：

证明 $f(x) < g(x), x \in (a, b)$ ，可以直接构造函数 $F(x) = f(x) - g(x)$ ，证明 $x \in (a, b)$ 时，有 $F(x) < 0$ ，即证明了 $f(x) < g(x)$ ，有时需对不等式等价变形后间接，若上述方法通过导数不便于讨论 $F(x)$ 的符号，分别研究 $f(x)g(x)$ 的单调性与最值情况，有时需对不等式进行等价转化。

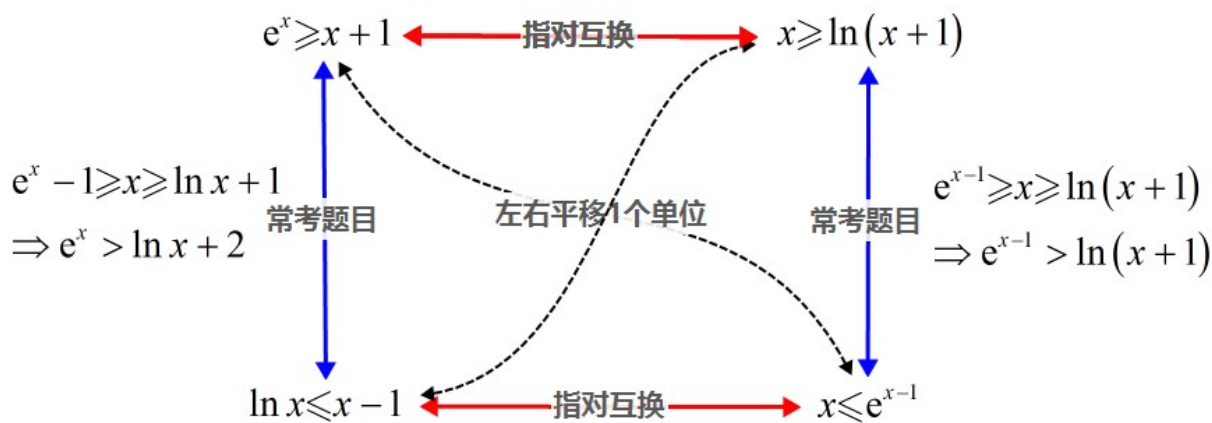
证明单元不等式 $\forall x \in I, f(x) \leq g(x)$ 恒成立；

方法1：构造新函数 $F(x) = f(x) - g(x)$ ，证明 $F(x) = f(x) - g(x)$ ，证明 $F(x) \leq 0, \forall x \in I$

方法2：证明一个更强不等式成立 $f(x)_{\max} \leq g(x)_{\min}$ ，从而 $f(x) \leq g(x)$ 恒成立；

其中：方法1考查较多，方法2考查较少

1. 常见不等式的证明



例1：证明指数不等式

1. 证明如下指数不等式：

- (1) $e^x \geq x + 1$ (当 $x = 0$ 时取等)
- (2) $e^x \geq ex$ (当 $x = 1$ 时取等)。

练1：同理推导如下指数不等式

指数不等式(I)：以 $-x$ 代替 $x \Rightarrow e^{-x} \geq 1 - x$ ，当 $x < 1$ 时有 $e^x \leq \frac{1}{1-x}$ (当 $x = 0$ 时取等)，这是为数不多的可以放大指数结构的不等式；

指数不等式 (II) : 当 $x \geq 0$ 时有 $e^x \geq ex \geq 2x$

例2 : 证明如下对数不等式

2. 证明如下对数不等式 :

(1) $\ln x \leq x - 1$ (当 $x = 1$ 时取等) ;

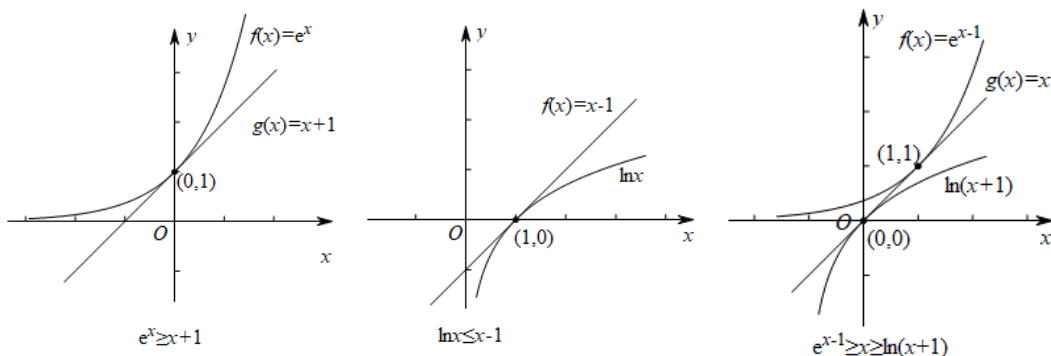
(2) $\ln x \leq \frac{x}{e}$ (当 $x = e$ 时取等) .

练2 : 同理推导如下指数不等式

对数不等式 (I) : 以 $\frac{1}{x}$ 代替 $x \Rightarrow \ln \frac{1}{x} \leq \frac{1}{x} - 1$, 整理得 : $\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}$ (当 $x = 1$ 时取等) ;

对数不等式 (II) : $\ln x \leq \frac{x}{e} < \frac{x}{2}$, 即 $\ln x^2 < x$, 以 $\sqrt{x}$ 代替 $x \Rightarrow \ln x < \sqrt{x}$.

2. 常见指对函数的图象及切线



例3 : 利用切线方程放缩函数

3. 已知函数 $f(x) = e^x - x^2$.

(1) 求曲线 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线方程 .

(2) 求证 : 当 $x > 0$ 时 , $\frac{e^x + (2-e)x - 1}{x} \geq \ln x + 1$.

例4 : 利用已知确定不等式放缩函数

4. 函数 $f(x) = \ln x + \frac{1}{2}x^2 + ax (a \in \mathbf{R})$, $g(x) = e^x + \frac{3}{2}x^2$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的极值点的个数 .

(2) 若对于 $\forall x > 0$, 总有 $f(x) \leq g(x)$,

① 求实数 a 的范围 ;

② 求证 : 对于 $\forall x > 0$, 不等式 $e^x + x - (e+1) + \frac{e}{x} > 2$ 成立 .

练4

5. 已知函数 $f(x) = \ln x + ax^2 + (a+2)x + 1 (a \in \mathbf{R})$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性.

(2) 设 $a \in \mathbf{Z}$, 若对任意的 $x > 0$, $f(x) \leq 0$ 恒成立, 求整数 a 的最大值.

(3) 求证: 当 $x > 0$ 时, $e^x - x \ln x + 2x^3 - x^2 + x - 1 > 0$.

6. 已知函数 $f(x) = e^x - 1 - x - ax^2$.

(1) 当 $a = 0$ 时, 求证: $f(x) \geq 0$.

(2) 当 $x \geq 0$ 时, 若不等式 $f(x) \geq 0$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

(3) 若 $x > 0$, 证明 $(e^x - 1) \ln(x + 1) > x^2$.

例5: 清君侧+利用常用指数不等式进行放缩

7. 已知函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x-1}$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间.

(2) 证明: $f(x) > \frac{x+1}{e^x}$ (其中 e 是自然对数的底数, $e = 2.71828\cdots$).

二、高阶导问题

1. 隐零点问题 (运算代换、等价转化)

基本解题思路为:

形式上虚设; 运算上代换; 数值上估计; 策略上等价转化; 方法上分离函数(参数); 技巧上反客为主.

例1 (运算上代换)

8. 已知 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + ae^x - \ln x$.

(1) 设 $x = \frac{1}{2}$ 是 $f(x)$ 的极值点, 求实数 a 的值, 并求 $f(x)$ 的单调区间.

(2) 当 $a > 0$ 时, 求证: $f(x) > \frac{1}{2}$.

练1

9. 已知 $f(x) = xe^x$.

(1) 证明: $f(x) \geq \ln x + x + 1$.

2. 隐零点问题 (端点比较)

当 $f(x) > (<) 0$ 在某区间 (a, b) 上恒/能成立, 或者 $f(x) \geq (\leq) 0$ 在某区间 $[a, b]$ 上恒成立, 但 $f(a) = 0$ 或 $f(b) = 0$ 时. 此时它的端点值恰好贴着恒成立限制条件的边界, 因此会对原函数的端点处的导数符号有一

个限制条件 .

以下以 $f(x) > 0$ 在 (a, b) 上恒成立且 $f(a) = 0$ 为例 , 来看一下解题步骤

(1) 正常求导 , 求出导函数的零点

(2) 进行零点位置的分类讨论 :

① 当 $f(x)$ 在 (a, b) 上恒单调递增时 , 即 $f'(x) \geq 0$ 在 $[a, b]$ 上恒成立时 , 由于 $f(a) = 0$, 结论显然成立 ;

② 如果有个 x_0 使得 $f(x)$ 在 (a, x_0) 上单调递减时 , 根据单调性 , $f(x_0) < f(a) = 0$, 所以 **一定不成立 !**

这样 , 综上①②取值范围就求出来了 .

换言之 , $f(x_0)$ 是几 , 根本不用算 !!

只要极值点和端点位置一做比较 , 问题就能迎刃而解 , 这就是这类问题的优势所在 .

例2 (形式上虚设)

10. 已知函数 $f(x) = (ax^2 + x + a)e^{-x} (a \in \mathbf{R})$.

(1) 若 $a \geq 0$, 函数 $f(x)$ 的极大值为 $\frac{3}{e}$, 求实数 a 的值 .

(2) 若对任意的 $a \leq 0$, $f(x) \leq b \ln(x+1)$ 在 $x \in [0, +\infty)$ 上恒成立 , 求实数 b 的取值范围 .

练2

11. 已知函数 $f(x) = ax - b(x+1)\ln(x+1) + 1$, 曲线在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程为 $x - y + b = 0$.

(1) 求 a, b 的值 .

(2) 若当 $x \geq 0$ 时 , 关于 x 的不等式 $f(x) \geq kx^2 + x + 1$ 恒成立 , 求 k 的取值范围 .

3. 多次构造函数求导 , 进行端点分析

例3

12. 已知函数 $f(x) = e^{x-1} - 2\ln x + x$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间 .

(2) 证明 : $f(x) \geq (x-2)^3 - 3(x-2)$.