

02恒成立能成立综合问题练习题

1. 已知函数 $f(x) = \frac{k}{2}(x^2 + 1) - \ln x$, 其中 $k \in \mathbf{R}$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性 .

(2) 若对 $\forall k \in [1, 3]$, $\forall x \in [1, 3]$, $f(x) \geq k^2 - mk$ 恒成立 , 求实数 m 的取值范围 .

【答案】 (1) $k \leq 0$ 时 , $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减 ;

$k > 0$ 时 , $f(x)$ 在 $(0, \frac{\sqrt{k}}{k})$ 上单调递减 , 在 $(\frac{\sqrt{k}}{k}, +\infty)$ 上单调递增 .

(2) $m \geq 2$

【解析】 (1) $x \in (0, +\infty)$, $f'(x) = kx - \frac{1}{x} = \frac{kx^2 - 1}{x}$,

1' : $k \leq 0$ 时 $f'(x) = \frac{kx^2 - 1}{x} < 0$ 恒成立 ,

$\therefore f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减 .

2' : $k > 0$ 时 , 令 $f'(x) < 0$ 得 $x \in (0, \sqrt{\frac{1}{k}})$,

令 $f'(x) > 0$ 得 $x \in (\sqrt{\frac{1}{k}}, +\infty)$,

$\therefore f(x)$ 在 $(0, \frac{\sqrt{k}}{k})$ 上单调递减 , 在 $(\frac{\sqrt{k}}{k}, +\infty)$ 上单调递增 ,

综上所述 $k \leq 0$ 时 , $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减 ,

$k > 0$ 时 , $f(x)$ 在 $(0, \frac{\sqrt{k}}{k})$ 上单调递减 , 在 $(\frac{\sqrt{k}}{k}, +\infty)$ 上单调递增 .

(2) $\because k \in [1, 3]$, $\therefore \frac{\sqrt{k}}{k} \in [\frac{\sqrt{3}}{3}, 1]$,

$\therefore$ 由 (1) 知 $f(x)$ 在 $[1, 3]$ 上单调递增 ,

$\therefore f(x)_{\min} = f(x) \geq k^2 > mk$, $k \in [1, 3]$,

$\therefore m \geq k - 1$ 恒成立 , $\therefore m \geq 2$

【标注】【知识点】求函数单调区间 (含参二次型导函数) ; 不等式中的恒成立与能成立问题

2. 已知函数 $f(x) = x \ln x + \frac{a}{x}$, $g(x) = x^3 - x^2 - 5$, 若对任意的 $x_1, x_2 \in [\frac{1}{2}, 2]$ 都有 $f(x_1) - 2 \geq g(x_2)$ 成立 , 求实数 a 的取值范围 .

【答案】 $[1, +\infty)$.

【解析】 由题意 , 若对任意的 $x_1, x_2 \in [\frac{1}{2}, 2]$ 都有 $f(x_1) - 2 \geq g(x_2)$ 成立 ,

求导易得 $g(x)$ 在 $x \in [\frac{1}{2}, 2]$ 的最大值为 $g(2) = -1$,

即对任意的 $x \in [\frac{1}{2}, 2]$, 都有 $f(x) \geq 1$ 恒成立 , 即 $x \ln x + \frac{a}{x} \geq 1$ 恒成立 ,

即 $a \geq x - x^2 \ln x$ 对任意的 $x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$ 恒成立, 所以 $a \geq (x - x^2 \ln x)_{\max}$
 设 $h(x) = x - x^2 \ln x$, $x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$, 则 $h'(x) = 1 - 2x \ln x - x$, $h'(x) = -2 \ln x - 3$,
 所以 $h'(x)$ 在 $x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$ 上单调递减, 则 $h'(x) \leq h'\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \ln 2 - 3 < 0$,
 所以 $h'(x) = 1 - 2x \ln x - x$ 在 $x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$ 上单调递减,
 又 $h'(1) = 0$, 所以当 $\frac{1}{2} \leq x < 1$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 单调递增,
 当 $1 < x \leq 2$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 单调递减,
 $\therefore h(x) = x - x^2 \ln x$ 在 $x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$ 上的最大值为 $h(1) = 1$,
 $\therefore a \geq 1$,
 所以 a 的取值范围是 $[1, +\infty)$.

【标注】【知识点】二阶导问题; 利用导数证明不等式恒成立问题

3. 已知函数 $f(x) = \frac{m}{x} + \ln x$ (其中 $m \in \mathbf{R}$), $g(x) = e^{x+1} - 6x + 1$ (其中 e 为自然对数的底数).
- (1) 若曲线 $y = f(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线与直线 $2x - 4y + 5 = 0$ 垂直, 求 $f(x)$ 的单调区间和极值.
- (2) 若对任意 $x_1 \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$, 总存在 $x_2 \in [2, 3]$ 使得 $f(x_1) - g(x_2) + e^3 - 12 \geq 0$ 成立, 求实数 m 的取值范围.

【答案】 (1) $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0, 3)$, 单调递增区间为 $(3, +\infty)$,

$f(x)$ 有极小值 $f(3) = 1 + \ln 3$, $f(x)$ 没有极大值.

(2) $[1, +\infty)$.

【解析】 (1) 函数 $f(x) = \frac{m}{x} + \ln x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = -\frac{m}{x^2} + \frac{1}{x}$,
 在 $x = 1$ 处的切线斜率为 $f'(1) = -m + 1$, 由 $(-m + 1) \cdot \frac{1}{2} = -1$,

$\therefore m = 3$,

$\therefore f(x) = \frac{3}{x} + \ln x$, $f'(x) = -\frac{3}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x-3}{x^2}$,

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = 3$, 当 $x \in (0, 3)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减,

当 $x \in (3, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

从而 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0, 3)$, 单调递增区间为 $(3, +\infty)$,

当 $x = 3$ 时, $f(x)$ 有极小值 $f(3) = 1 + \ln 3$, $f(x)$ 没有极大值.

(2) 由 $g(x) = e^{x+1} - 6x + 1$, $g'(x) = e^{x+1} - 6$, 当 $x \in [2, 3]$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增,

故 $g(x)$ 有最小值 $g(2) = e^3 - 11$,

因为对任意 $x_1 \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$, 总存在 $x_2 \in [2, 3]$ 使得 $f(x_1) - g(x_2) + e^3 - 12 \geq 0$,

即 $f(x_1) + e^3 - 12 \geq g(x_2)$ 成立, 所以对任意 $x_1 \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$,

都有 $f(x_1) + e^3 - 12 \geq e^3 - 11$,

即 $f(x_1) \geq 1$,

也即 $\frac{m}{x_1} + \ln x_1 > 1$ 成立 , 从而对任意 $x_1 \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$, 都有 $m \geq x_1 - x_1 \ln x_1$ 成立 ,

构造函数 $\phi(x) = x - x \ln x \left(x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]\right)$, 则 $\phi'(x) = -\ln x$, 令 $\phi'(x) = 0$, 得 $x = 1$,

当 $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 时 , $\phi'(x) > 0$, $\phi(x)$ 单调递增 ,

当 $x \in (1, 2)$ 时 , $\phi'(x) < 0$, $\phi(x)$ 单调递减 ,

$\therefore \phi(x)$ 的最大值为 $\phi(1) = 1$,

$\therefore m \geq 1$,

综上 , 实数 m 的取值范围为 $[1, +\infty)$.

【标注】【知识点】利用导数解决不等式恒成立与能成立综合问题