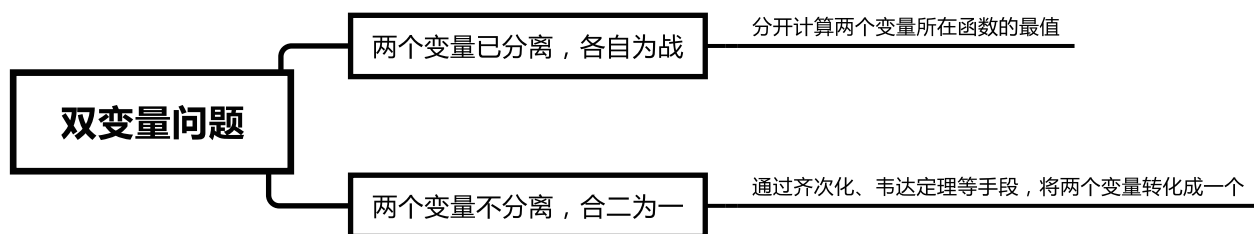


02恒成立能成立综合问题

一、双变量的恒成立与能成立问题

能成立与恒成立问题，一般来说都是双参数问题，双参数问题的特点就是字母特别多，一般含有三个字母，两个变量，一个参数，我们一定要学会分辨参数与变量，一般来说，题目中给了范围的都是自变量，要求的范围的字母是参数，这是一个分辨的方法。



【方法点睛】

当两个变量各自为战时，只需要两边分开处理即可；

如果两边都有恒能成立问题，那么遵循下面的原则：

- (1) $\forall x_1 \in [a, b], \forall x_2 \in [c, d], f(x_1) > g(x_2) \text{ 成立} \Leftrightarrow f(x)_{\min} > g(x)_{\max}$
- (2) $\forall x_1 \in [a, b], \exists x_2 \in [c, d], f(x_1) > g(x_2) \text{ 成立} \Leftrightarrow f(x)_{\min} > g(x)_{\min}$
- (3) $\exists x_1 \in [a, b], \forall x_2 \in [c, d], f(x_1) > g(x_2) \text{ 成立} \Leftrightarrow f(x)_{\max} > g(x)_{\max}$
- (4) $\exists x_1 \in [a, b], \exists x_2 \in [c, d], f(x_1) > g(x_2) \text{ 成立} \Leftrightarrow f(x)_{\max} > g(x)_{\min}$
- (5) $\forall x_1 \in [a, b], \exists x_2 \in [c, d], f(x_1) = g(x_2) \text{ 成立} \Leftrightarrow f(x) \text{ 的值域} \subseteq g(x) \text{ 的值域}.$

1. 分别求最值型

例1 (题型1)

1. 已知函数 $f(x) = \ln(2x+1) + kx^2 - 2x, k \in \mathbf{R}.$

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

(2) 已知 $m > 0$ ，若当 $k \in [1, b]$ 时，不等式 $f(x) \leq m + \frac{4}{m} + \ln 3$ 在 $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 上恒成立。求实数 b 的最大值。

【答案】(1) 答案见解析

(2) 6

【解析】(1)(II)(1) 当 $k=0$ 时, $f'(x) = \frac{-4x}{2x+1}$, 列表

x	$\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$	0	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	增	极大值	减

$f(x)$ 在 $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ 是增函数, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 是减函数.

(2) 当 $0 < k < 2$ 时, $0 < \frac{2-k}{2k}$. 列表

x	$\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$	$\left(0, \frac{2-k}{2k}\right)$	$\left(\frac{2-k}{2k}, +\infty\right)$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	增	减	增

$f(x)$ 在 $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, $\left(\frac{2-k}{2k}, +\infty\right)$ 是增函数; $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{2-k}{2k}\right)$ 是减函数.

(3) 当 $k=2$ 时, $f'(x) = \frac{8x^2}{2x+1} \geq 0$. $f(x)$ 在 $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 是增函数.

(4) 当 $k > 2$ 时, $0 > \frac{2-k}{2k} = \frac{1}{k} - \frac{1}{2} > -\frac{1}{2}$, 列表

x	$\left(-\frac{1}{2}, \frac{2-k}{2k}\right)$	$\left(\frac{2-k}{2k}, 0\right)$	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	增	减	增

$f(x)$ 在 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{2-k}{2k}\right)$, $(0, +\infty)$ 是增函数; $f(x)$ 在 $\left(\frac{2-k}{2k}, 0\right)$ 是减函数.

(5) 当 $k < 0$ 时, $\frac{1}{k} - \frac{1}{2} < -\frac{1}{2}$, 列表

x	$\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$	0	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	增	极大值	减

$f(x)$ 在 $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ 是减函数.

(2) 当 $1 \leq k < 2$ 时, $\frac{2-k}{2k} = \frac{1}{k} - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$,

由 (II) 中 (2) 可知 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 上是增函数,

当 $k \geq 2$ 时, 由 (I) 中 (3) (4) 可知, 也有 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 上是增函数,

所以对于 $k \in [1, b]$, $f(x)$ 的最大值为 $f(1) = \ln 3 + k - 2$.

要使不等式 $f(x) < m + \frac{4}{m} + \ln 3$ 在 $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 上恒成立.

即 $\ln 3 + k - 2 < m + \frac{4}{m} + \ln 3$,

即 $k < m + \frac{4}{m} + 2$ 对于 $m > 0$ 恒成立.

记 $g(m) = m + \frac{4}{m} + 2$, 由于 $m > 0$,

所以 $g(m) \geq \sqrt{m \times \frac{4}{m}} + 2 = 6$.

数 b 的最大值为 6.

【标注】【知识点】求函数单调区间（含参二次型导函数）；利用导数解决不等式恒成立问题

练1

2. 已知曲线 $C: y = e^{ax}$.

(1) 对任意实数 a , 曲线 C 总在直线 $l: y = ax + b$ 的上方, 求实数 b 的取值范围 .

【答案】(1) 实数 b 的取值范围是 $b < 1$.

【解析】(1) 法1:

对于任意实数 a , 曲线 C 总在直线的 $y = ax + b$ 的上方, 等价于

$\forall x, a \in \mathbf{R}$, 都有 $e^{ax} > ax + b$,

即 $\forall x, a \in \mathbf{R}$, $e^{ax} - ax - b > 0$ 恒成立 ,

令 $g(x) = e^{ax} - ax - b$,

①若 $a = 0$, 则 $g(x) = 1 - b$,

所以实数 b 的取值范围是 $b < 1$;

②若 $a \neq 0$, $g'(x) = a(e^{ax} - 1)$,

由 $g'(x) = 0$ 得 $x = 0$,

$g'(x), g(x)$ 的情况如下:

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$		极小值	

所以 $g(x)$ 的最小值为 $g(0) = 1 - b$,

所以实数 b 的取值范围是 $b < 1$;

综上, 实数 b 的取值范围是 $b < 1$.

法2: 对于任意实数 a , 曲线 C 总在直线的 $y = ax + b$ 的上方, 等价于

$\forall x, a \in \mathbf{R}$, 都有 $e^{ax} > ax + b$, 即

$\forall x, a \in \mathbf{R}$, $b < e^{ax} - ax$ 恒成立 ,

令 $t = ax$, 则等价于 $\forall t \in \mathbf{R}$, $b < e^t - t$ 恒成立 ,

令 $g(t) = e^t - t$, 则 $g'(t) = e^t - 1$,

由 $g'(t) = 0$ 得 $t = 0$,

$g'(t), g(t)$ 的情况如下:

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$		极小值	

所以 $g(t) = e^t - t$ 的最小值为 $g(0) = 1$,

实数 b 的取值范围是 $b < 1$.

【标注】【知识点】利用导数解决不等式恒成立问题；已知切线方程求参数

3. 已知 $a > 0$, 函数 $f(x) = \frac{ax}{x^2 + 1} + 2a$, $g(x) = a \ln x - x + a$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间；

(2) 求证：对于任意的 $x_1, x_2 \in (0, e)$, 都有 $f(x_1) > g(x_2)$.

【答案】 (1) $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-1, 1)$, 单调递减区间为 $(-\infty, -1), (1, +\infty)$;

(2) 证明见解析.

【解析】 (1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f'(x) = \frac{a(1-x^2)}{(x^2+1)^2} = \frac{a(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}$, 因为 $a > 0$,

所以, 当 $x < -1$, 或 $x > 1$ 时, $f'(x) < 0$;

当 $-1 < x < 1$ 时, $f'(x) > 0$.

所以, $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-1, 1)$, 单调递减区间为 $(-\infty, -1), (1, +\infty)$.

(2) 因为 $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 上单调递增, 在区间 $(1, e)$ 上单调递减,

又 $f(0) = 2a$, $f(e) = \frac{ea}{e^2+1} + 2a > 2a$,

所以, 当 $x \in (0, e)$ 时, $f(x) > 2a$.

由 $g(x) = a \ln x - x + a$, 可得 $g'(x) = \frac{a}{x} - 1 = \frac{a-x}{x}$.

所以当 $a \geq e$ 时, 函数 $g(x)$ 在区间 $(0, e)$ 上是增函数,

所以, 当 $x \in (0, e)$ 时, $g(x) < g(e) = 2a - e < 2a$.

所以, 当 $x \in (0, e)$ 时,

对于任意的 $x_1, x_2 \in (0, e)$, 都有 $f(x_1) > 2a$, $g(x_2) < 2a$, 所以 $f(x_1) > g(x_2)$.

当 $0 < a < e$ 时, 函数 $g(x)$ 在区间 $(0, a)$ 上是增函数, 在区间 (a, e) 上是减函数,

所以, 当 $x \in (0, e)$ 时, $g(x) \leq g(a) = a \ln a < 2a$.

所以, 当 $x \in (0, e)$ 时,

对于任意的 $x_1, x_2 \in (0, e)$, 都有 $f(x_1) > 2a$, $g(x_2) < 2a$, 所以 $f(x_1) > g(x_2)$.

综上, 对于任意的 $x_1, x_2 \in (0, e)$, 都有 $f(x_1) > g(x_2)$.

【标注】【知识点】利用导数解决不等式恒成立问题

例2 (题型3)

4.

已知函数 $f(x) = e^x - x - 2$, 若对任意的 $a \in [-1, 1]$, 总存在 $x \in [-1, 1]$ 使得 $f(x) \leq t^2 - 2at - 4$ 恒成立 , 则 t 的取值范围是 _____ .

【答案】 $(-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$

【解析】 $f(x)_{\min} \leq t^2 - 2at - 4$, 对 $\forall a \in [-1, 1]$ 恒成立 ,

$$f'(x) = e^x - 1 , (-1, 0) \downarrow , (0, +\infty) \uparrow , f(x)_{\min} = f(0) = -1 ,$$

$$f(x)_{\min} = f(0) = -1 ,$$

$$t^2 - 2at - 4 \geq -1 \text{ 对 } \forall a \in [-1, 1] \text{ 恒成立 ,}$$

$$t^2 - 2at - 3 \geq 0 , \text{ 对 } \forall a \in [-1, 1] \text{ 恒成立 ,}$$

$$2t \cdot a + t^2 - 3 \geq 0 \text{ 对 } \forall a \in [-1, 1] \text{ 恒成立 ,}$$

$$\text{令 } \varphi(x) = -2t \cdot x + t^2 - 3 ,$$

$$\text{则 } \varphi(x) \text{ 对 } \forall x \in [-1, 1] \text{ 恒成立 ,}$$

$$\therefore \begin{cases} \varphi(-1) > 0 \\ \varphi(1) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2t + t^2 - 3 \geq 0 \\ 2t + t^2 - 3 \geq 0 \end{cases} ,$$

$$\therefore t \leq -3 \text{ 或 } t \geq 3 .$$

【标注】 **【知识点】** 利用导数证明不等式恒成立与能成立综合问题

(1) $a = 0$ 时 , $f'(x) = (-x^2 + 2x) \cdot e^{-x}$,

-----1分

$$f(-1) = e , f'(-1) = -3e ,$$

-----2分

所以曲线在点处的切线方程为 $y - e = -3e(x + 1)$ 即 $y = -3ex - 2e$.

-----3分

(2)

依题即 $f(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上的最大值 $f(x)_{\max}$ 大于或等于 $g(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上的最大值 $g(x)_{\max}$.

-----4分

易知 $g(x) = x^2 - x - 1$ 在区间 $[0, 2]$ 上的最大值为 $g(2) = 1$.

-----5分

$$f'(x) = [-x^2 + (2-a)x + 2a]e^{-x} = -(x-2)(x+a)e^{-x} .$$

-----6分

令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = 2$ 或 $x = -a$.

① 当 $-a \leq 0$, 即 $a \geq 0$ 时 ,

$f'(x) \geq 0$ 在区间 $[0, 2]$ 上恒成立 ,

-----7分

故在 $[0, 2]$ 上 $f(x)$ 单调递增,

$$\text{所以, } f(x)_{\max} = f(2) = \frac{4+a}{e^2} \geq 1$$

$$\text{解得 } a \geq e^2 - 4;$$

-----8分

②当 $-a \geq 2$, 即 $a \leq -2$ 时

$f'(x) \leq 0$ 在区间 $[0, 2]$ 上恒成立, 故在 $[0, 2]$ 上 $f(x)$ 单调递减,

-----9分

$$\text{所以, } f(x)_{\min} = f(0) = -a \geq 1$$

$$\text{解得 } a \leq -1;$$

故 $a \leq -2$ 满足条件;

-----10分

③当 $0 < -a < 2$, 即 $-2 < a < 0$ 时, 列表如下:

x	$(0, -a)$	$-a$	$(-a, 2)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

$$\text{故 } f(x)_{\max} = f(0) \text{ 或 } f(x)_{\max} = f(2),$$

-----11分

$$\text{所以 } f(0) \geq 1 \text{ 或 } f(2) \geq 1,$$

$$\text{解得 } -2 < a \leq -1 \text{ 满足条件,}$$

-----12分

$$\text{综合①②③得 } a \geq e^2 - 4 \text{ 或 } a \leq -1.$$

-----13分

练2

5. 已知函数 $f(x) = \frac{1+\ln x}{x}$.

(1) 设 $g(x) = \frac{1+x}{a(1-x)}[xf(x)-1]$, 对 $\forall x_1 \in (0, 1)$, $\exists x_2 \in (0, e^{-3}]$, $g(x_1) < x_2 f(x_2)$, 求实数 a 的取值范围.

【答案】 (1) $a \in [0, 1]$.

【解析】 (1) $g(x) = \frac{1+x}{a(1-x)} \ln x$, 欲使 $\forall x_1, \exists x_2$ 使得 $g(x_1) < x_2 f(x_2)$,

令欲 $g(x)_{\max} < xf(x)_{\max}$, 求即 $g(x) < -2$ 对 $x \in (0, 1)$ 成立,

当 $a < 0$ 时, $\frac{1+x}{1-x} \ln x < 0$, $g(x) > 0$, 不合题意,

当 $a > 0$ 时, 由 $g(x) < -2$, 可得 $\ln x + \frac{2a(1-x)}{1+x} < 0$ 恒成立,

设 $\ln(x) = \ln x + \frac{2a(1-x)}{1+x}$, $h'(x) = \frac{x^2 + (2-4a)x + 1}{x(1+x^2)}$,

令 $t(x) = x^2 + (2-4a)x + 1$, $\Delta = 16a(a-1)$,

①当 $0 < a \leq 1$ 时, $\Delta \leq 0$, 此时 $t(x) \geq 0$, $h'(x) \geq 0$,

于是 $h(x) < h(1) = 0$, 符合条件;

②当 $a > 1$ 时, $\Delta > 0$, 此时 $t(0) = 1$, $t(1) = 4(1-a) < 0$,

存在 $x_0 \in (0, 1)$.

使得 $t(x_0) = 0$, 于是对任意 $x \in (x_0, 1)$, $t(x) < 0$, $h'(x) < 0$,

于是当 $x \in (x_0, 1)$ 时, $h(x) > 0$, 不合条件,

综上: $a \in [0, 1]$.

【标注】【知识点】利用导数解决不等式恒成立与能成立综合问题; 已知极值情况求参数范围

例3 (题型4)

6. 已知函数 $f(x) = \frac{x}{\ln x} - ax$, 若存在 $x_1, x_2 \in [e, e^2]$, 使得 $f(x_1) \leq f'(x_2) + a$ 成立, 求 a 的取值范围.

【答案】 $\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4e^2}, +\infty\right)$.

【解析】 由分析可知 $f(x_1)_{\min} \leq f'(x_2)_{\max} + a$ 即可, 下面开始研究 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 的最值.

$$f'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} - a = -\left(\frac{1}{\ln x}\right)^2 + \frac{1}{\ln x} - a = -\left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} - a \leq \frac{1}{4} - a,$$

当且仅当 $\frac{1}{\ln x} = \frac{1}{2}$ 时等号成立,

$\therefore$ 当 $x = e^2$ 时, $f'(x)$ 取到最大值 $f'(x)_{\max} = f'(e^2) = \frac{1}{4} - a$.

若 $a \geq \frac{1}{4}$, 则 $f'(x) \leq f'(x)_{\max} = \frac{1}{4} - a \leq 0$,

故 $f(x)$ 在 $[e, e^2]$ 上单调递减, $f(x)_{\min} = f(e^2) = \frac{e^2}{2} - ae^2$,

$\therefore \frac{e^2}{2} - ae^2 \leq \frac{1}{4} - a + a$, 解得 $a \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{4e^2}$.

若 $a \leq 0$, 设 $t = \frac{1}{\ln x} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$,

则 $f'(x) = -\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} - a \geq -\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} - a = -a \geq 0$,

$f(x)$ 在 $[e, e^2]$ 上单调递增, $f(x)_{\min} = f(e) = \frac{1}{e} - ae$,

$\therefore \frac{1}{e} - ae \leq \frac{1}{4} - a + a$, 解得 $a \geq \frac{1}{e^2} - \frac{1}{4e} > 0$, 与 $a \leq 0$ 矛盾, 故此时 a 不存在.

若 $0 < a < \frac{1}{4}$, 则令 $f'(x) > 0$, 解得: $x > e^{2 + \sqrt{1-4a}}$.

$\therefore$ 当 $e < x < e^{\frac{4}{2+\sqrt{1-4a}}}$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减;

当 $e^{\frac{4}{2+\sqrt{1-4a}}} < x < e^2$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增.

$$\therefore f(x)_{\min} = f\left(e^{\frac{4}{2+\sqrt{1-4a}}}\right) = \frac{e^{\frac{4}{2+\sqrt{1-4a}}}}{\frac{4}{2+\sqrt{1-4a}}} - ae^{\frac{4}{2+\sqrt{1-4a}}}$$

$$= e^{\frac{4}{2+\sqrt{1-4a}}} \cdot \frac{2+\sqrt{1-4a}-4a}{4},$$

$$\therefore e^{\frac{4}{2+\sqrt{1-4a}}} \cdot \frac{2+\sqrt{1-4a}-4a}{4} \leq \frac{1}{4} - a + a = \frac{1}{4}.$$

但由 $0 < a < \frac{1}{4}$ 可知, $e^{\frac{4}{2+\sqrt{1-4a}}} > e^{\frac{4}{2+\sqrt{1-0}}} = e^{\frac{3}{2}}$,

$$\frac{2+\sqrt{1-4a}-4a}{4} > \frac{2+\sqrt{1-4 \cdot \frac{1}{4}}-4 \cdot \frac{1}{4}}{4} = \frac{1}{4},$$

$$\therefore e^{\frac{4}{2+\sqrt{1-4a}}} \cdot \frac{2+\sqrt{1-4a}-4a}{4} > e^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{4} > \frac{1}{4}, \text{ 与 } e^{\frac{4}{2+\sqrt{1-4a}}} \cdot \frac{2+\sqrt{1-4a}-4a}{4} \leq \frac{1}{4}$$

矛盾,

故此时 a 不存在.

综上所述, $a \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{4e^2}$.

【标注】【知识点】导数与最值

例4 (题型5)

7. 已知函数 $f(x) = (2-a)(x-1) - 2\ln x$, $g(x) = xe^{1-x}$ ($a \in \mathbf{R}$, e 为自然对数的底数).

(1) 若函数 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{2})$ 上无零点, 求 a 的最小值.

(2) 若对任意给定的 $x_0 \in (0, e]$, 在 $(0, e]$ 上总存在两个不同的 x_i ($i = 1, 2$), 使得 $f(x_i) = g(x_0)$ 成立, 求 a 的取值范围.

【答案】 (1) $2 - 4\ln 2$.

$$(2) \left(-\infty, 2 - \frac{3}{e-1}\right]$$

【解析】 (1) 因为 $f(x) < 0$ 在 $x \in (0, \frac{1}{2})$ 上恒成立不可能, 故要使函数 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{2})$ 上无零点, 只要对任意的 $x \in (0, \frac{1}{2})$, $f(x) > 0$ 恒成立, 即对 $x \in (0, \frac{1}{2})$, $a > 2 - \frac{2\ln x}{x-1}$ 恒成立.

$$\text{令 } l(x) = 2 - \frac{2\ln x}{x-1}, x \in \left(0, \frac{1}{2}\right),$$

$$l'(x) = -\frac{\frac{2}{x}(x-1) - 2\ln x}{(x-1)^2} = \frac{\frac{2}{x} + 2\ln x - 2}{(x-1)^2},$$

$$\text{再令 } m(x) = \frac{2}{x} + 2\ln x - 2,$$

$$\text{则 } m'(x) = -\frac{2}{x^2} + \frac{2}{x} = \frac{-2(1-x)}{x^2} < 0,$$

所以 $m(x)$ 在 $(0, \frac{1}{2})$ 上为减函数, 于是 $m(x) > m(\frac{1}{2}) = 2 - 2\ln 2 > 0$,

从而, $l'(x) > 0$, 于是 $l(x)$ 在 $(0, \frac{1}{2})$ 上为增函数, $l(x) < l(\frac{1}{2}) = 2 - 4\ln 2$.

故要使 $a > 2 - \frac{2\ln x}{x-1}$ 恒成立, 只要 $a \in [2 - 4\ln 2, +\infty)$.

综上, 若函数 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{2})$ 上无零点, 求 a 的最小值为 $2 - 4\ln 2$.

$$(2) \quad g'(x) = e^{1-x} - xe^{1-x} = (1-x)e^{1-x}.$$

当 $x \in (0, 1)$ 时, $g'(x) > 0$, 函数 $g(x)$ 单调递增;

当 $x \in (1, e]$ 时, $g'(x) < 0$, 函数 $g(x)$ 单调递减.

$\because g(0) = 0, g(1) = 1, g(e) = e \cdot e^{1-e} > 0$, 所以函数 $g(x)$ 在 $(0, e]$ 上的值域为 $(0, 1]$.

当 $a = 2$ 时, $f(x) = -2\ln x$, 不合题意;

$$\text{当 } a \neq 2 \text{ 时, } f'(x) = 2 - a - \frac{2}{x} = \frac{(2-a)x - 2}{x} = \frac{(2-a)(x - \frac{2}{2-a})}{x}, \quad x \in (0, e],$$

故必须满足 $0 < \frac{2}{2-a} < e, a < 2 - \frac{2}{e}$. ①

当 x 变化时, $f'(x), f(x)$ 的变化情况如下:

x	$(0, \frac{2}{2-a})$	$\frac{2}{2-a}$	$(\frac{2}{2-a}, e]$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	单调递减	最小值	单调递增

$$\because x \rightarrow 0, f(x) \rightarrow +\infty, f\left(\frac{2}{2-a}\right) = a - 2\ln \frac{2}{2-a},$$

$$f(e) = (2-a)(e-1) - 2,$$

$\therefore$ 对任意给定的 $x_0 \in (0, e]$, 在区间 $(0, e]$ 上总存在两个不同的 $x_i (i = 1, 2)$, 使得

$f(x_i) = g(x_0)$ 成立,

当且仅当满足下列条件 $\begin{cases} f(\frac{2}{2-a}) \leq 0, \\ f(e) \geq 1, \end{cases}$

$$\text{即 } a - 2\ln \frac{2}{2-a} \leq 0, \quad \text{②}$$

$$(2-a)(e-1) - 2 \geq 1, \quad \text{③}$$

$$\text{令 } h(a) = a - 2\ln \frac{2}{2-a}, \quad a \in \left(-\infty, 2 - \frac{2}{e}\right),$$

$$h'(a) = 1 - 2[\ln 2 - \ln(2-a)]' = 1 - \frac{2}{2-a} = \frac{a}{a-2}.$$

令 $h'(a) = 0$, 得 $a = 0$,

当 $a \in (-\infty, 0)$ 时, $h'(a) > 0$, 函数 $h(a)$ 单调递增;

当 $a \in (0, 2 - \frac{2}{e})$ 时, $h'(a) < 0$, 函数 $h(a)$ 单调递减.

所以, 对任意 $a \in \left(-\infty, 2 - \frac{2}{e}\right)$, 有 $h(a) \leq h(0) = 0$, 即②对任意 $a \in \left(-\infty, 2 - \frac{2}{e}\right)$ 恒成立.

由③式解得 $a \leq 2 - \frac{3}{e-1}$. ④

综合①④可知, 当 $a \in \left(-\infty, 2 - \frac{3}{e-1}\right]$ 时, 对任意给定的 $x_0 \in (0, e]$, 在 $(0, e]$ 上总存在两个不同的 x_i ($i = 1, 2$), 使得 $f(x_i) = g(x_0)$ 成立.

【标注】【知识点】函数零点的概念; 已知零点或根情况求参数范围; 利用导数解决不等式能成立问题; 导数与最值

练4

8. 已知函数 $f(x) = \frac{4x}{3x^2 + 3}$, 函数 $g(x) = \frac{1}{3}ax^3 - a^2x$ ($a \neq 0$), 若对任意 $x_1 \in [0, 2]$, 总存在 $x_2 \in [0, 2]$, 使 $f(x_1) = g(x_2)$, 则实数 a 的取值范围是 ().

A. $(0, +\infty)$

B. $(0, 1]$

C. $\left[\frac{1}{3}, +\infty\right)$

D. $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$

【答案】 D

【解析】 根据所给条件,

函数 $f(x) = \frac{4x}{3x^2 + 3}$ 在 $[0, 2]$ 上的值域 $[b, c]$,

$$f(x) = \frac{4x}{3x^2 + 3}, \text{ 当且仅当 } x = 1 \text{ 时取等号,}$$

$$= \frac{4}{3x + \frac{3}{x}} \leq \frac{4}{2 \cdot \sqrt{3x \cdot \frac{3}{x}}} = \frac{2}{3},$$

$x = 0$ 时, $f(0) = 0$, $x = 2$ 时, $f(2) = \frac{8}{15}$,

则有 $b = 0$ 且 $c = \frac{2}{3}$, 函数的值域为 $\left[0, \frac{2}{3}\right]$,

则 $g(x)$ 的值域包含 $\left[0, \frac{2}{3}\right]$,

函数 $g(x) = \frac{1}{3}ax^3 - a^2x$ ($a \neq 0$), 则 $g'(x) = ax^2 - a^2 = 0$, $a > 0$ 时, 解得 $x = \sqrt{a}$,

当 $4 > a > 0$ 时, $g'(x) > 0$,

$\therefore \sqrt{a} < x \leq 2$, $g'(x) < 0$,

$\therefore 0 \leq x < \sqrt{a}$,

$\therefore g(x)$ 在 $[0, \sqrt{a})$ 上单调递减, 在 $(\sqrt{a}, 2]$ 上单调递增,

显然 $g(\sqrt{a}) < g(0) = 0$,

由题意可知, $g(2) \geq \frac{2}{3}$,

即 $3a^2 - 4a + 1 \leq 0$,

$\therefore \frac{1}{3} \leq a \leq 1$,

当 $a \geq 4$ 时, $g'(x) \leq 0$,

$\therefore g(x)$ 在 $[0, 2]$ 上单调递减, $g(x) \leq g(0)$, 不合题意,

当 $a \leq 0$ 时, $x \in [0, 2]$, $g(x) = \frac{1}{3}ax^3 - a^2x \leq 0$,

不满足 $y = g(x)$ 的值域 $\in \left[0, \frac{2}{3}\right]$,

综上 $\frac{1}{3} \leq a \leq 1$.

故选 D.

【标注】【知识点】利用导数解决不等式恒成立与能成立综合问题

2. 合二为一型

【方法点睛】

当题目中出现两个变量纠缠在一起时, 需要我们想办法把这两个变量合并成同一个.

下面的问题处理过程中, 由于它是齐次的, 我们可以通过两侧同除 a 的方式, 让两边都变成关于 $\frac{b}{a}$ 的函数, 再进行处理.

这种处理手段, 在正余弦相关的齐次分式 (如: 已知 $\tan x = 3$, 求 $\frac{\sin x + 2 \cos x}{2 \sin x - 3 \cos x}$ 的值, 上下同除 $\cos x$) 中, 已经见过一次. 它们的方法本质上是同源的.

例5

9. 已知函数 $f(x) = 2 \ln x + \frac{1}{x} - mx$ ($m \in \mathbf{R}$).

(1) 当 $m = -1$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程.

(2) 若 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为单调递减, 求 m 的取值范围.

(3) 设 $0 < a < b$, 求证: $\frac{\ln b - \ln a}{b - a} < \frac{1}{\sqrt{ab}}$.

【答案】 (1) 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $2x - y = 0$.

(2) m 的取值范围为 $[1, +\infty)$.

(3) 证明见解析.

【解析】 (1) $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$.

当 $m = -1$ 时, $f(x) = 2 \ln x + \frac{1}{x} + x$,

所以 $f'(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + 1$.

因为 $f(1) = 2$ 且 $f'(1) = 2$,

所以曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $2x - y = 0$.

(2) 若函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为单调递减,

则 $f'(x) \leq 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立.

即 $\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} - m \leq 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立.

即 $\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \leq m$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立 .

设 $g(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} (x > 0)$,

则 $m \geq [g(x)]_{\max}$.

因为 $g(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} = -\left(\frac{1}{x} - 1\right)^2 + 1 (x > 0)$,

所以当 $x = 1$ 时 , $g(x)$ 有最大值 1 .

所以 m 的取值范围为 $[1, +\infty)$.

(3) 因为 $0 < a < b$, 不等式 $\frac{\ln b - \ln a}{b - a} < \frac{1}{\sqrt{ab}}$ 等价于 $\ln b - \ln a < \frac{b - a}{\sqrt{ab}}$.

即 $\ln \frac{b}{a} < \sqrt{\frac{b}{a}} - \sqrt{\frac{a}{b}}$, 令 $\sqrt{\frac{b}{a}} = t (t > 1)$, 原不等式转化为 $2 \ln t < t - \frac{1}{t}$.

令 $h(t) = 2 \ln t + \frac{1}{t} - t$,

由 (2) 知 $f(x) = 2 \ln x + \frac{1}{x} - x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减 ,

所以 $h(t) = 2 \ln t + \frac{1}{t} - t$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减 .

所以 , 当 $t > 1$ 时 , $h(t) < h(1) = 0$.

即当 $t > 1$ 时 , $2 \ln t + \frac{1}{t} - t < 0$ 成立 .

所以 , 当 $0 < a < b$ 时 , 不等式 $\frac{\ln b - \ln a}{b - a} < \frac{1}{\sqrt{ab}}$ 成立 .

【标注】【知识点】通过构造函数证明不等式 ; 区间上恒单调

练5

10. 设函数 $f(x) = (mx + n) \ln x$. 若曲线 $y = f(x)$ 在点 $P(e, f(e))$ 处的切线方程为 $y = 2x - e$ (e 为自然对数的底数) .

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间 .

(2) 若 $a, b \in \mathbf{R}^+$, 试比较 $\frac{f(a) + f(b)}{2}$ 与 $f(\frac{a+b}{2})$ 的大小 , 并予以证明 .

【答案】 (1) 单调递减区间是 $(0, \frac{1}{e})$, 单调递增区间是 $(\frac{1}{e}, +\infty)$.

(2) $\frac{f(a) + f(b)}{2} \geq f(\frac{a+b}{2})$ (当且仅当 $a = b$ 时取等号) . 证明见解析 .

【解析】 (1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$.

$$f'(x) = m \ln x + \frac{mx + n}{x} .$$

依题意得 $f(e) = e$, $f'(e) = 2$, 即 $\begin{cases} me + n = e \\ m + \frac{me+n}{e} = 2 \end{cases}$,

$$\therefore m = 1, n = 0 .$$

$$\therefore f(x) = x \ln x, f'(x) = \ln x + 1 .$$

当 $x \in (0, \frac{1}{e})$ 时 , $f'(x) < 0$; 当 $x \in (\frac{1}{e}, +\infty)$ 时 , $f'(x) > 0$.

所以函数 $f(x)$ 的单调递减区间是 $(0, \frac{1}{e})$, 单调递增区间是 $(\frac{1}{e}, +\infty)$.

(2) 当 $a, b \in \mathbf{R}^+$ 时, $\frac{f(a)+f(b)}{2} \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right) \text{ 等价于 } \frac{a \ln a + b \ln b}{2} \geq \frac{a+b}{2} \ln \frac{a+b}{2},$$

$$\text{也等价于 } \frac{a}{b} \ln \frac{2a}{b} - \left(1 + \frac{a}{b}\right) \ln\left(1 + \frac{a}{b}\right) + \ln 2 \geq 0.$$

不妨设 $a \geq b$,

$$\text{设 } g(x) = x \ln(2x) - (1+x) \ln(1+x) + \ln 2, \quad x \in [1, +\infty),$$

$$\text{则 } g'(x) = \ln(2x) - \ln(1+x).$$

当 $x \in [1, +\infty)$ 时, $g'(x) \geq 0$, 所以函数 $g(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上为增函数,

$$\text{即 } g(x) = x \ln 2x - (1+x) \ln(1+x) + \ln 2 \geq g(1) = 0,$$

故当 $x \in [1, +\infty)$ 时, $g(x) = x \ln 2x - (1+x) \ln(1+x) + \ln 2 \geq 0$ (当且仅当 $x=1$ 时取等号).

$$\text{令 } x = \frac{a}{b} \geq 1, \text{ 则 } g\left(\frac{a}{b}\right) \geq 0,$$

$$\text{即 } \frac{a}{b} \ln \frac{2a}{b} - \left(1 + \frac{a}{b}\right) \ln\left(1 + \frac{a}{b}\right) + \ln 2 \geq 0 \text{ (当且仅当 } a=b \text{ 时取等号)},$$

$$\text{综上所述, 当 } a, b \in \mathbf{R}^+ \text{ 时, } \frac{f(a)+f(b)}{2} \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right) \text{ (当且仅当 } a=b \text{ 时取等号)}.$$

【标注】【知识点】双变量问题；通过构造函数证明不等式；直接求函数的单调性（不含参）