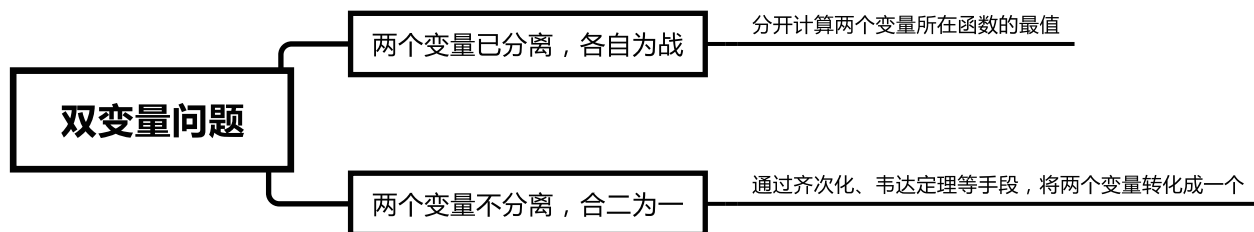


02恒成立能成立综合问题

一、双变量的恒成立与能成立问题

能成立与恒成立问题，一般来说都是双参数问题，双参数问题的特点就是字母特别多，一般含有三个字母，两个变量，一个参数，我们一定要学会分辨参数与变量，一般来说，题目中给了范围的都是自变量，要求的范围的字母是参数，这是一个分辨的方法。



【方法点睛】

当两个变量各自为战时，只需要两边分开处理即可；

如果两边都有恒能成立问题，那么遵循下面的原则：

- (1) $\forall x_1 \in [a, b], \forall x_2 \in [c, d], f(x_1) > g(x_2)$ 成立 $\Leftrightarrow f(x) \underline{\hspace{1cm}} > g(x) \underline{\hspace{1cm}}$
- (2) $\forall x_1 \in [a, b], \exists x_2 \in [c, d], f(x_1) > g(x_2)$ 成立 $\Leftrightarrow f(x) \underline{\hspace{1cm}} > g(x) \underline{\hspace{1cm}}$
- (3) $\exists x_1 \in [a, b], \forall x_2 \in [c, d], f(x_1) > g(x_2)$ 成立 $\Leftrightarrow f(x) \underline{\hspace{1cm}} > g(x) \underline{\hspace{1cm}}$
- (4) $\exists x_1 \in [a, b], \exists x_2 \in [c, d], f(x_1) > g(x_2)$ 成立 $\Leftrightarrow f(x) \underline{\hspace{1cm}} > g(x) \underline{\hspace{1cm}}$
- (5) $\forall x_1 \in [a, b], \exists x_2 \in [c, d], f(x_1) = g(x_2)$ 成立 $\Leftrightarrow f(x)$ 的值域 $\subseteq g(x)$ 的值域。

1. 分别求最值型

🔗 例1 (题型1)

1. 已知函数 $f(x) = \ln(2x+1) + kx^2 - 2x, k \in \mathbf{R}$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

(2) 已知 $m > 0$, 若当 $k \in [1, b]$ 时, 不等式 $f(x) \leq m + \frac{4}{m} + \ln 3$ 在 $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 上恒成立. 求实数 b 的最大值.

🔗 练1

2. 已知曲线 $C: y = e^{ax}$.

(1) 对任意实数 a , 曲线 C 总在直线 $l: y = ax + b$ 的上方, 求实数 b 的取值范围.

3. 已知 $a > 0$, 函数 $f(x) = \frac{ax}{x^2 + 1} + 2a$, $g(x) = a \ln x - x + a$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 求证: 对于任意的 $x_1, x_2 \in (0, e)$, 都有 $f(x_1) > g(x_2)$.

例2 (题型3)

4. 已知函数 $f(x) = e^x - x - 2$, 若对任意的 $a \in [-1, 1]$, 总存在 $x \in [-1, 1]$ 使得 $f(x) \leq t^2 - 2at - 4$ 恒成立, 则 t 的取值范围是 _____.

练2

5. 已知函数 $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$.

(1) 设 $g(x) = \frac{1+x}{a(1-x)}[xf(x) - 1]$, 对 $\forall x_1 \in (0, 1)$, $\exists x_2 \in (0, e^{-3}]$, $g(x_1) < x_2 f(x_2)$, 求实数 a 的取值范围.

例3 (题型4)

6. 已知函数 $f(x) = \frac{x}{\ln x} - ax$, 若存在 $x_1, x_2 \in [e, e^2]$, 使得 $f(x_1) \leq f'(x_2) + a$ 成立, 求 a 的取值范围.

例4 (题型5)

7. 已知函数 $f(x) = (2-a)(x-1) - 2 \ln x$, $g(x) = xe^{1-x}$ ($a \in \mathbf{R}$, e 为自然对数的底数).

(1) 若函数 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{2})$ 上无零点, 求 a 的最小值.

(2) 若对任意给定的 $x_0 \in (0, e]$, 在 $(0, e]$ 上总存在两个不同的 x_i ($i = 1, 2$), 使得 $f(x_i) = g(x_0)$ 成立, 求 a 的取值范围.

练4

8. 已知函数 $f(x) = \frac{4x}{3x^2 + 3}$, 函数 $g(x) = \frac{1}{3}ax^3 - a^2x$ ($a \neq 0$), 若对任意 $x_1 \in [0, 2]$, 总存在

$x_2 \in [0, 2]$, 使 $f(x_1) = g(x_2)$, 则实数 a 的取值范围是 ().

- A. $(0, +\infty)$ B. $(0, 1]$ C. $[\frac{1}{3}, +\infty)$ D. $[\frac{1}{3}, 1]$

2. 合二为一型

【方法点睛】

当题目中出现两个变量纠缠在一起时, 需要我们想办法把这两个变量合并成同一个.

下面的问题处理过程中，由于它是_____的，我们可以通过两侧_____ a 的方式，让两边都变成关于 $\frac{b}{a}$ 的函数，再进行处理。

这种处理手段，在正余弦相关的齐次分式（如：已知 $\tan x = 3$ ，求 $\frac{\sin x + 2 \cos x}{2 \sin x - 3 \cos x}$ 的值，上下同除 $\cos x$ ）中，已经见过一次。它们的方法本质上是同源的。

例5

9. 已知函数 $f(x) = 2 \ln x + \frac{1}{x} - mx$ ($m \in \mathbf{R}$)。

(1) 当 $m = -1$ 时，求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程。

(2) 若 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为单调递减，求 m 的取值范围。

(3) 设 $0 < a < b$ ，求证：
$$\frac{\ln b - \ln a}{b - a} < \frac{1}{\sqrt{ab}}.$$

练5

10. 设函数 $f(x) = (mx + n) \ln x$ 。若曲线 $y = f(x)$ 在点 $P(e, f(e))$ 处的切线方程为 $y = 2x - e$ (e 为自然对数的底数)。

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间。

(2) 若 $a, b \in \mathbf{R}^+$ ，试比较 $\frac{f(a) + f(b)}{2}$ 与 $f(\frac{a+b}{2})$ 的大小，并予以证明。