

02含参函数的极值与最值讨论练习题

一、含参函数极值的分类讨论

1. 已知 $x=1$ 是函数 $f(x)=(ax-2)e^x$ 的一个极值点. ($a \in \mathbf{R}$)

(1) 求 a 的值;

【答案】 (1) 1

【解析】 (1) 已知 $f'(x)=(ax+a-2)e^x$,

$$f'(1)=0, \therefore a=1.$$

当 $a=1$ 时, $f'(x)=(x-1)e^x$, 在 $x=1$ 处取得极小值.

【标注】【知识点】利用导数求单调性证不等式; 已知极值情况求参数值

2. 已知函数 $f(x)=e^x - a \ln x, a \in \mathbf{R}$.

(1) 若 $x=1$ 是 $f(x)$ 的极值点, 求 a 的值:

【答案】 (1) $a=e$

【解析】 (1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$.

$$\text{因为 } f'(x) = e^x - \frac{a}{x},$$

又 $x=1$ 是 $f(x)$ 的极值点, 所以 $f'(1)=e-a=0$, 解得 $a=e$.

经检验, $x=1$ 是 $f(x)$ 的极值点,

所以 a 的值为 e .

【标注】【知识点】利用导数求单调性证不等式

3. 已知函数 $f(x)=x + \frac{a}{x} + \ln x, a \in \mathbf{R}$.

(1) 若 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极值, 求 a 的值.

【答案】 (1) $a=2$.

【解析】 (1) 因为 $f'(x)=1 - \frac{a}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x^2+x-a}{x^2}$,

由已知 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极值, 所以 $f'(1)=0$.

解得 $a = 2$ ，经检验 $a = 2$ 时， $f(x)$ 在 $x = 1$ 处取得极小值，所以 $a = 2$ 。

【标注】【知识点】求函数零点（含参二次型导函数）；区间上恒单调

4. 已知函数 $f(x) = ax^3 - \frac{3}{2}(a+2)x^2 + 6x - 3$
(1) 当 $a > 2$ 时，求函数 $f(x)$ 的极小值；

【答案】(1) $f(1) = -\frac{a}{2}$ 。

【解析】(1) $f'(x) = 3ax^2 - 3(a+2)x + 6 = 3a\left(x - \frac{2}{a}\right)(x - 1)$ ， $f(x)$ 极小值为 $f(1) = -\frac{a}{2}$ 。

【标注】【知识点】求函数零点（含参二次型导函数）；含参导数的零点（利用极限判断）

5. 函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + 3x - 9$ ，已知 $f(x)$ 在 $x = -3$ 处取得极值，则 $a = ()$ 。
A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

【答案】D

【解析】 $f'(x) = 3x^2 + 2ax + 3$ ，
 $f'(-3) = 27 - 6a + 3 = 0$ ，解得 $a = 5$ 。

【标注】【知识点】已知极值情况求参数值

6. 若 $f(x) = x^3 + 3ax^2 + 3(a+2)x + 1$ 有极大值和极小值，则 a 的取值范围是()。
A. $-1 < a < 2$ B. $a > 2$ 或 $a < -1$ C. $a \geq 2$ 或 $a \leq -1$ D. $a > 1$ 或 $a < -2$

【答案】B

【解析】由 $f(x) = x^3 + 3ax^2 + 3(a+2)x + 1$ 得 $f'(x) = 3x^2 + 6ax + 3(a+2)$ ，
若函数 $f(x)$ 有极大值和极小值，则 $f'(x) = 0$ 有两个不相等的实数根，即方程
 $x^2 + 2ax + a + 2 = 0$ 有两个不相等的实数根，
 $\therefore \Delta = 4a^2 - 4(a+2) > 0$ ，
解得 $a > 2$ 或 $a < -1$ 。

【标注】【知识点】利用公式和四则运算法则求导

7. 已知函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + (a+6)x + 1$ 有极大值和极小值，则实数 a 的取值范围是()。

A. $(-1, 2)$ B. $(-\infty, -3) \cup (6, +\infty)$ C. $(-3, 6)$ D. $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$ **【答案】** B**【解析】** $f'(x) = 3x^2 + 2ax + (a+6)$, 因为 $f(x)$ 有极大值和极小值,所以 $\Delta = 4a^2 - 12(a+6) > 0$, 解得 $a > 6$ 或 $a < -3$.

故选B.

【标注】【素养】数学运算

二、含参函数最值的分类讨论

8. 已知函数 $f(x) = x - \ln(x+a)$ 的最小值为0, 其中 $a > 0$.(1) 求 a 的值;**【答案】** (1) $a = 1$.**【解析】** (1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-a, +\infty)$, $f'(x) = 1 - \frac{1}{x+a} = \frac{x+a-1}{x+a}$.当 $x > 1-a$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $-a < x < 1-a$ 时, $f'(x) < 0$. 所以当 $x = 1-a$ 时, $f(x)$ 取到最小值. $f(x)_{\min} = f(1-a) = 1-a = 0$, 解得 $a = 1$.**【标注】**【知识点】利用导数求函数的最值; 导数与极值; 利用导数证明不等式恒成立问题; 利用导数求函数的单调性、单调区间; 数学归纳法; 数列与不等式综合9. 已知 $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + m$ (m 为常数在 $[-2, 2]$ 上有最大值3, 那么此函数在 $[-2, 2]$ 上的最小值为().

A. -37

B. -29

C. -5

D. -11

【答案】 A**【解析】** $f'(x) = 6x^2 - 12x$, 令 $f'(x) = 0$ 得 $x = 0$ 或 $x = 2$.当 $x \in (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$ 时, $f'(x) \geq 0$, $f(x)$ 单调递增;当 $x \in (0, 2)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减;当 $x = 0$ 时, $f(0)$ 为函数 $f(x)$ 的极大值;当 $x = 2$ 时, $f(2)$ 为函数 $f(x)$ 的极小值;在区间 $[-2, 2]$ 上, 由 $f(0) = 3$ 得, $m = 3$, $f(-2) = -37$, $f(2) = -5$, 故最小值为-37.

【标注】【知识点】已知最值情况求参数值或解析式

10. 已知函数 $f(x) = x^2 - a \ln x (a \in \mathbf{R})$, 求 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上的最小值 .

【答案】当 $a \leq 2$ 时, $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上的最小值为 1 ,

当 $a > 2$ 时, $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上的最小值为 $\frac{a}{2} - \frac{a}{2} \ln \frac{a}{2}$.

【解析】 $f'(x) = \frac{2x^2 - a}{x} (x > 0)$,

当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) > 0$,

$f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增, 最小值为 $f(1) = 1$.

当 $a > 0$, 当 $x \in \left(0, \sqrt{\frac{a}{2}}\right)$ 时, $f(x)$ 单调递减, 当 $x \in \left(\sqrt{\frac{a}{2}}, +\infty\right)$ 时, $f(x)$ 单调递增 .

若 $\sqrt{\frac{a}{2}} \leq 1$, 即 $0 < a \leq 2$ 时, $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增 ,

又 $f(1) = 1$, 所以 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上的最小值为 1 .

若 $\sqrt{\frac{a}{2}} > 1$, 即 $a > 2$ 时, $f(x)$ 在 $\left[1, \sqrt{\frac{a}{2}}\right)$ 上单调递减, 在 $\left(\sqrt{\frac{a}{2}}, +\infty\right)$ 上单调递增 .

又 $f\left(\sqrt{\frac{a}{2}}\right) = \frac{a}{2} - \frac{a}{2} \ln \frac{a}{2}$,

所以 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上的最小值为 $\frac{a}{2} - \frac{a}{2} \ln \frac{a}{2}$.

综上, 当 $a \leq 2$ 时, $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上的最小值为 1 ,

当 $a > 2$ 时, $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上的最小值为 $\frac{a}{2} - \frac{a}{2} \ln \frac{a}{2}$.

【标注】【知识点】求函数最值 (含参二次型导函数)

11. 已知函数 $f(x) = 2 \ln x - ax (a \in \mathbf{R})$.

(1) 当 $x \in [1, 2]$ 时, 求 $f(x)$ 的最大值 .

【答案】(1) 当 $a \leq 1$ 时, $f(x)_{\max} = 2 \ln 2 - 2a$.

当 $1 < a < 2$ 时, $f(x)_{\max} = 2 \ln \frac{2}{a} - 2$.

当 $a \geq 2$ 时, $f(x)_{\max} = -a$.

【解析】(1) $f(x) = 2 \ln x - ax$,

$f'(x) = \frac{2}{x} - a, x \in [1, 2]$,

则 $1 - a \leq f'(x) \leq 2 - a$,

① 当 $2 - a \leq 0$ 即 $a \geq 2$ 时,

$f'(x) \leq 0$ 恒成立,

$\therefore f(x)$ 在 $x \in [1, 2]$ 单调递减,

$$f(x)_{\max} = f(1) = -a .$$

②当 $1 - a \geq 0$, 即 $a \leq 1$ 时 ,

$f'(x) > 0$ 恒成立 ,

$\therefore f(x)$ 在 $x \in [1, 2]$ 递增 ,

$$f(x)_{\max} = f(2) = 2 \ln 2 - 2a .$$

③当 $1 < a < 2$ 时 ,

$$f'(x) = \frac{2}{x} - a = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{a} ,$$

1>: $1 \leq x \leq \frac{2}{a}$, $f'(x) \geq 0$, $f(x)$ 在 $\left[1, \frac{2}{a}\right]$ 上单调递增 ,

2> : $\frac{2}{a} < x \leq 2$, $f'(x) \leq 0$, $f(x)$ 在 $\left(\frac{2}{a}, 2\right]$ 上单调递减 .

$$\therefore f(x)_{\max} = f\left(\frac{2}{a}\right) = 2 \ln \frac{2}{a} - 2 .$$

综上所述 : 当 $a \leq 1$ 时 , $f(x)_{\max} = 2 \ln 2 - 2a$.

当 $1 < a < 2$ 时 , $f(x)_{\max} = 2 \ln \frac{2}{a} - 2$.

当 $a \geq 2$ 时 , $f(x)_{\max} = -a$.

【标注】【知识点】利用导数证明不等式恒成立问题

12. 已知函数 $f(x) = -x^2 + mx - 3 (m \in \mathbf{R})$, $g(x) = x \ln x$.

(1) 求函数 $g(x)$ 在 $[a, a+2] (a > 0)$ 上的最小值.

【答案】 (1) 当 $0 < a < \frac{1}{e}$ 时 , 最小值 $g\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$;

当 $a \geq \frac{1}{e}$ 时 , 最小值 $g(a) = a \ln a$.

【解析】 (1) $g'(x) = 1 + \ln x$,

令 $g'(x) = 0$, 得 $x = \frac{1}{e}$,

x	$\left(0, \frac{1}{e}\right)$	$\frac{1}{e}$	$\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	单调递减	极小值	单调递增

因为 $a > 0$, $a+2 - a = 2$,

当 $0 < a < \frac{1}{e}$ 时 , $g(x)$ 在 $\left[a, \frac{1}{e}\right]$ 单调递减 , 在 $\left[\frac{1}{e}, a+2\right]$ 上单调递增 ,

所以函数 $g(x)$ 在 $[a, a+2]$ 上的最小值 $g\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$;

当 $a \geq \frac{1}{e}$ 时 , $g(x)$ 在 $[a, a+2]$ 上单调递增 ,

所以函数 $g(x)$ 在 $[a, a+2]$ 上的最小值 $g(a) = a \ln a$.

【标注】【知识点】直接求函数的最值 (不含参) ; 利用导数解决不等式恒成立问题

