

01恒成立问题与能成立问题练习题

一、恒能成立不含参

1. 已知函数 $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$.

(1) 求证: 当 $x \in (0, 1)$ 时, $f(x) > 2(x + \frac{x^3}{3})$;

【答案】(1) 证明见解析.

【解析】(1) $F(x) = f(x) - 2x - \frac{2}{3}x^3 = \ln(1+x) - \ln(1-x) - 2x - \frac{2}{3}x^3$

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} - 2 - 2x^2 \\ &= \frac{2}{(1+x)(1-x)} - 2(1+x^2) \\ &= \frac{2 - 2(1+x^2)(1-x^2)}{1-x^2} \\ &= \frac{2x^4}{1-x^2} \end{aligned}$$

又因为 $0 < x < 1$, 所以 $F'(x) > 0$

所以 $F(x)$ 在 $(0, 1)$ 上是增函数

又 $F(0) = 0$, 故 $F(x) > F(0)$

所以 $f(x) > 2(x + \frac{x^3}{3})$.

【标注】【知识点】利用导数解决不等式恒成立问题

二、恒能成立(分参)

2. 设函数 $f(x) = ae^x - x - 1$, $a \in \mathbb{R}$.

(1) 当 $a = 1$ 时, 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f(x) > 0$ 恒成立, 求 a 的取值范围;

(3) 求证: 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $\ln \frac{e^x - 1}{x} > \frac{x}{2}$.

【答案】(1) 当 $x < 0$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减;

当 $x > 0$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

当 $x = 0$ 时, $f(x)_{\min} = f(0) = 0$.

(2) $a \in [1, +\infty)$.

(3) 证明见解析;

【解析】(1) 当 $a = 1$ 时, 则 $f(x) = e^x - x - 1$, 则 $f'(x) = e^x - 1$.

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = 0$.

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

所以当 $x < 0$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减;

当 $x > 0$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

当 $x = 0$ 时, $f(x)_{\min} = f(0) = 0$.

(2) 因为 $e^x > 0$,

所以 $f(x) = ae^x - x - 1 > 0$ 恒成立, 等价于 $a > \frac{x+1}{e^x}$ 恒成立.

设 $g(x) = \frac{x+1}{e^x}$, $x \in [0, +\infty)$,

得 $g'(x) = \frac{e^x - (x+1)e^x}{e^{2x}} = \frac{-x}{e^x}$,

当 $x \in [0, +\infty)$ 时, $g'(x) \leq 0$,

所以 $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递减,

所以 $x \in [0, +\infty)$ 时, $g(x) < g(0) = 1$.

因为 $a > \frac{x+1}{e^x}$ 恒成立,

所以 $a \in [1, +\infty)$.

(3) 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $\ln \frac{e^x - 1}{x} > \frac{x}{2}$, 等价于 $e^x - xe^{\frac{x}{2}} - 1 > 0$.

设 $h(x) = e^x - xe^{\frac{x}{2}} - 1$, $x \in (0, +\infty)$

所以 $h'(x) = e^x - e^{\frac{x}{2}} - \frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}} = e^{\frac{x}{2}}(e^{\frac{x}{2}} - \frac{x}{2} - 1)$.

由 (1) 可知, $x \in (0, +\infty)$ 时, $e^x - x - 1 > 0$ 恒成立.

所以 $x \in (0, +\infty)$ 时, $\frac{x}{2} \in (0, +\infty)$, 有 $e^{\frac{x}{2}} - \frac{x}{2} - 1 > 0$.

所以 $h'(x) > 0$.

所以 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $h(x) > h(0) = 0$

因此当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $\ln \frac{e^x - 1}{x} > \frac{x}{2}$.

【标注】【知识点】利用导数解决不等式恒成立问题; 通过构造函数证明不等式

三、恒能成立(不分参)

3. 已知函数 $f(x) = (x-a)^2 e^x$, $a \in \mathbf{R}$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间.

(2) 若对于任意的 $x \in (-\infty, 1]$, 都有 $f(x) \leq 4e$, 求 a 的取值范围.

【答案】 (1) 单增区间为 $(-\infty, a-2)$, $(a, +\infty)$, 单减区间为 $(a-2, a)$.

(2) $[-1, 3]$.

【解析】 (1) $\because f(x) = (x-a)^2 e^x$, $\therefore f'(x) = 2(x-a)e^x + (x-a)^2 e^x = (x-a)[x-(a-2)] \cdot e^x$

$\therefore f'(x) = 0$ 时 $x_1 = a-2$, $x_2 = a$,

x	$(-\infty, a-2)$	$a-2$	$(a-2, a)$	a	$(a, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	极大值	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

$\therefore f(x)$ 的单调增区间为 $(-\infty, a-2)$, $(a, +\infty)$, 单减区间为 $(a-2, a)$.

(2) 由 (1) 中 $f(x)$ 的单调性可知:

① 当 $a-2 \geq 1$ 即 $a \geq 3$ 时, $f(x)_{\max} = f(1)$,

② 当 $a-2 < 1 < a$ 即 $1 < a < 3$ 时, $f(x)_{\max} = f(a-2)$,

③ 当 $a \leq 1$, $f(x)_{\max} = f(a-2)$ 或 $f(1)$,

$$\therefore \begin{cases} f(a-2) \leq 4e \\ f(1) \leq 4e \end{cases} \Rightarrow -1 \leq a \leq 3.$$

【标注】【知识点】不等式中的恒成立与能成立问题

4. 已知函数 $f(x) = e^x - a(x+1)$.

(1) 若 $f(x) \geq 0$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

(2) 证明: 当 $a = 0$ 时, 曲线 $y = f(x)$ ($x > 0$) 总在曲线 $y = 2 + \ln x$ 的上方.

【答案】 (1) $[0, 1]$.

(2) 证明见解析.

【解析】 (1) $f'(x) = e^x - a$ ($x \in \mathbf{R}$).

① 当 $a > 0$ 时, 令 $f'(x) = 0$ 得 $x = \ln a$.

$x < \ln a$ 时, $f'(x) < 0$; $x > \ln a$ 时, $f'(x) > 0$.

$f(x)$ 在 $(-\infty, \ln a)$ 上单调递减, 在 $(\ln a, +\infty)$ 上单调递增.

所以当 $x = \ln a$ 时, $f(x)$ 有最小值 $f(\ln a) = a - a(1 + \ln a) = -a \ln a$.

“ $f(x) \geq 0$ 恒成立”等价于“ $f(x)$ 最小值大于等于 0”, 即 $-a \ln a \geq 0$.

因为 $a > 0$, 所以 $0 < a \leq 1$.

② 当 $a = 0$ 时, $f(x) = e^x > 0$ 符合题意;

③ 当 $a < 0$ 时, 取 $x_0 = -1 + \frac{1}{a}$,

则 $f(x_0) = e^{-1+\frac{1}{a}} - a \left(-1 + \frac{1}{a} + 1 \right) = e^{-1+\frac{1}{a}} - 1 < 0$, 不符合题意 .

综上 , 若 $f(x) \geq 0$ 对 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立 , 则 a 的取值范围为 $[0, 1]$.

(2) 当 $a = 0$ 时 , 令 $h(x) = f(x) - (2 + \ln x) = e^x - \ln x - 2 (x > 0)$,

可求 $h'(x) = e^x - \frac{1}{x}$. 因为 $h'\left(\frac{1}{2}\right) = e^{\frac{1}{2}} - 2 < 0$, $h'(1) = e - 1 > 0$,

且 $h'(x) = e^x - \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增 ,

所以在 $(0, +\infty)$ 上存在唯一的 x_0 , 使得 $h'(x_0) = e^{x_0} - \frac{1}{x_0} = 0$,

即 $e^{x_0} = \frac{1}{x_0}$, 且 $\frac{1}{2} < x_0 < 1$.

当 x 变化时 , $h(x)$ 与 $h'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的情况如下 :

x	$(0, x_0)$	x_0	$(x_0, +\infty)$
$h'(x)$	-	0	+
$h(x)$	$\searrow$	极小	$\nearrow$

则当 $x = x_0$ 时 , $h(x)$ 存在最小值 $h(x_0)$,

且 $h(x_0) = e^{x_0} - \ln x_0 - 2 = \frac{1}{x_0} + x_0 - 2$.

因为 $x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, 所以 $h(x_0) = \frac{1}{x_0} + x_0 - 2 > 2\sqrt{\frac{1}{x_0} \cdot x_0} - 2 = 0$.

所以当 $a = 0$ 时 , $f(x) > 2 + \ln x (x > 0)$,

所以当 $a = 0$ 时 , 曲线 $y = f(x) (x > 0)$ 总在曲线 $y = 2 + \ln x$ 的上方 .

【标注】【知识点】利用导数解决不等式恒成立问题

5. 已知函数 $f(x) = x^2 - 2(a+1)x + 2a \ln x (a > 0)$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间 ;

(2) 若 $f(x) \leq 0$ 在区间 $[1, e]$ 上恒成立 , 求实数 a 的取值范围 .

【答案】 (1) ① 当 $a = 1$ 时 , $f(x)$ 的单调增区间是 $(0, +\infty)$;

② 当 $0 < a < 1$ 时 , $f(x)$ 的单调增区间是 $(0, a)$ 和 $(1, +\infty)$, 单调减区间是 $(a, 1)$;

③ 当 $a > 1$ 时 , $f(x)$ 的单调增区间是 $(0, 1)$ 和 $(a, +\infty)$, 单调减区间是 $(1, a)$.

(2) $a \geq \frac{e^2 - 2e}{2e - 2}$.

【解析】 (1) 求导得 ,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x - 2(a+1) + \frac{2a}{x} = \frac{2x^2 - 2(a+1)x + 2a}{x} \\ &= \frac{2(x-1)(x-a)}{x} (x > 0) , \end{aligned}$$

① 当 $a = 1$ 时 , $f'(x) \geq 0$ 且 $f'(x)$ 不恒为 0 ,

则 $f(x)$ 的单调增区间是 $(0, +\infty)$;

② 当 $0 < a < 1$ 时 , 令 $f'(x) > 0$, 得 $0 < x < a$ 或 $x > 1$,

所以 $f(x)$ 的单调增区间是 $(0, a)$ 和 $(1, +\infty)$ ，单调减区间是 $(a, 1)$ ；

③当 $a > 1$ 时，令 $f'(x) > 0$ ，得 $0 < x < 1$ 或 $x > a$ ，

所以 $f(x)$ 的单调增区间是 $(0, 1)$ 和 $(a, +\infty)$ ，单调减区间是 $(1, a)$ 。

(2) ①当 $a = 1$ 时，由(1)知函数 $f(x)$ 在区间 $[1, e]$ 单调递增，

$f(x)_{\max} = f(e) = e^2 - 4e + 2 < 0$ ，满足题意，

②当 $0 < a < 1$ 时，函数 $f(x)$ 在区间 $[1, e]$ 单调递增，

$f(x)_{\max} = f(e) = e^2 - 2(a+1)e + 2a \leq 0 \Rightarrow a \geq \frac{e^2 - 2e}{2e - 2} < 1$ ，

a 的范围是 $\frac{e^2 - 2e}{2e - 2} \leq a < 1$ ；

③当 $a > 1$ 时，函数 $f(x)$ 在区间 $[1, e]$ 只可能有极小值点，

所以 $f(x)$ 在区间 $[1, e]$ 上最大值在区间的端点处取到，

即有 $f(e) = e^2 - 2(a+1)e + 2a \leq 0 \Rightarrow a \geq \frac{e^2 - 2e}{2e - 2} < 1$ ，

且 $f(1) = -1 - 2a \leq 0 \Rightarrow a \geq -\frac{1}{2}$ ，

解得 $a > 1$ ，

综上，实数 a 的取值范围 $a \geq \frac{e^2 - 2e}{2e - 2}$ 。

【标注】【知识点】求函数单调区间（含参一次型导函数）；利用导数解决不等式恒成立问题