

01恒成立问题与能成立问题练习题

一、恒能成立不含参

1. 已知函数 $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$.
(1) 求证：当 $x \in (0, 1)$ 时, $f(x) > 2(x + \frac{x^3}{3})$;

二、恒能成立（分参）

2. 设函数 $f(x) = ae^x - x - 1$, $a \in \mathbf{R}$.
(1) 当 $a = 1$ 时, 求 $f(x)$ 的单调区间 ;
(2) 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f(x) > 0$ 恒成立, 求 a 的取值范围 ;
(3) 求证：当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $\ln \frac{e^x - 1}{x} > \frac{x}{2}$.

三、恒能成立（不分参）

3. 已知函数 $f(x) = (x - a)^2 e^x$, $a \in \mathbf{R}$.
(1) 求 $f(x)$ 的单调区间 .
(2) 若对于任意的 $x \in (-\infty, 1]$, 都有 $f(x) \leq 4e$, 求 a 的取值范围 .
4. 已知函数 $f(x) = e^x - a(x + 1)$.
(1) 若 $f(x) \geq 0$ 恒成立, 求 a 的取值范围 .
(2) 证明：当 $a = 0$ 时, 曲线 $y = f(x)$ ($x > 0$) 总在曲线 $y = 2 + \ln x$ 的上方 .
5. 已知函数 $f(x) = x^2 - 2(a + 1)x + 2a \ln x$ ($a > 0$) .
(1) 求 $f(x)$ 的单调区间 ;
(2) 若 $f(x) \leq 0$ 在区间 $[1, e]$ 上恒成立, 求实数 a 的取值范围 .