

01恒成立问题与能成立问题

考点分析

高频考点

- ①恒、能成立问题的转化
- ②(转化后)函数的极最值的求法
- ③参变分离的方法运用
- ④分类讨论思想

考试难点

- ①原命题的化归与转化
- ②含参问题的分类讨论

易错点

- ①定义域限制的自变量范围需注意,特别是给定范围上的恒/能成立问题
- ②如需分类讨论时,讨论需要不重不漏

一、单变量的恒成立与能成立问题

1. 恒成立问题、能成立问题与函数最值的关系

先说一下,单变量的恒能成立问题,一定要先把它变成咱们熟悉的极最值问题再说~
那么怎么变呢?请看下面

- (1) $\forall x \in (a, b), f(x) > k$ 恒成立 $\Leftrightarrow f(x)_{\min} > k$
- (2) $\forall x \in (a, b), f(x) > g(x)$ 恒成立 $\Leftrightarrow [f(x) - g(x)]_{\min} > 0$
- (3) $\forall x \in (a, b), f(x) < k$ 恒成立 $\Leftrightarrow f(x)_{\max} < k$
- (4) $\forall x \in (a, b), f(x) < g(x)$ 恒成立 $\Leftrightarrow [f(x) - g(x)]_{\max} < 0$
- (5) $\exists x_0 \in (a, b), f(x_0) > k$ 能够成立 $\Leftrightarrow f(x)_{\max} > k$
- (6) $\exists x_0 \in (a, b), f(x_0) > g(x_0)$ 能够成立 $\Leftrightarrow [f(x) - g(x)]_{\max} > 0$
- (7) $\exists x_0 \in (a, b), f(x_0) < k$ 能够成立 $\Leftrightarrow f(x)_{\min} < k$
- (8) $\exists x_0 \in (a, b), f(x_0) < g(x_0)$ 能够成立 $\Leftrightarrow [f(x) - g(x)]_{\min} < 0$

把这些恒能成立的话翻译成最值，接下来就求导列表找最值就OK了

2. 恒成立、能成立证明题（不含参）

例1

1. 已知函数 $f(x) = e^x - x^2$.

(1) 求曲线 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线方程 .

(2) 求证：当 $x > 0$ 时， $\frac{e^x + (2 - e)x - 1}{x} \geq \ln x + 1$.

练1

2. 已知函数 $f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x} (x > 0)$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间 .

(2) 求证： $f(x) > e^{-\frac{x}{2}} (x > 0)$.

二、单变量的恒成立与能成立（分离参数）

1. 简单分离参数型

当一个函数中的参数在函数中以**加减法**的形式孤立存在时，可以直接把它移到不等号一侧 .

这样就完成了参变分离的过程，而此时另一侧留下的是一个不含参的函数 .

不用分类讨论，多开心啊 .

PS：其实这种问题，因为形式比较简单，无论是否做了参变分离，结果是一样的 .

例1

3. 已知函数 $f(x) = 2 \ln x + \frac{1}{x} - mx (m \in \mathbf{R})$.

若 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为单调递减，求 m 的取值范围 .

2. 整理分离型

①如果一个函数中的参数和函数中的变量**乘/除在一起**，但很容易能够分离开来；

②且在分离时，要乘/除的部分的**符号**是确定**无需讨论**的；

③而且，乘/除过去的部分**不太复杂**；

那么仍然可以完成参变分离的过程，一侧留下参数，一侧留下不含参的函数 .

又不用分类讨论了，还是很开心嘛 .

例2

4. 已知函数 $f(x) = 1 + \ln x - a \cdot e^x$.

(1) 若曲线 $y = f(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线与 x 轴平行, 求实数 a 的值.

(2) 若对任意 $x \in (0, +\infty)$, 不等式 $f(x) \leq 0$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

练2

5. 已知函数 $f(x) = x \ln x$.

(1) 若对于任意 $x \in [\frac{1}{e}, e]$, 都有 $f(x) \leq ax - 1$, 求实数 a 的取值范围.

例3 (隐零点)

6. 已知函数 $f(x) = \frac{\ln x - 1}{x} - ax$.

若 $1 < a < 2$, 求证: $f(x) < -1$.

3. 变形题：构造新函数

例4

7. 已知函数 $f(x) = (a + 1) \ln x + ax^2 + 1$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性.

(2) 设 $a < -1$. 如果对任意 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, $|f(x_1) - f(x_2)| \geq 4|x_1 - x_2|$, 求 a 的取值范围.

三、单变量的恒成立与能成立 (不分参)

在恒能成立问题中, 当一个函数中的某个参数

不能够被通过各种手段, 移到等号或不等号的一侧;

或移动过程中涉及分类讨论 or 出现 $0/0$ 型的端点问题

或移动的部分很复杂

那么就可以不考虑参变分离了, 正常分类讨论也是可以解决问题的.

其中, 端点问题的处理手段比较特殊, 我们会在下面再详加总结!

1. 函数单调性可确定

例1

8. 已知函数 $f(x) = ax \ln x$, 当 $a < 0$ 时, 若对于任意的 $x \in (0, +\infty)$, 都有 $f(x) < 3ax + 1$ 成立, 求 a 的取值范围.

练1

9. 设函数 $f(x) = (x - a) \cdot e^x$.

(1) 当 $a = 1$ 时, 求证: 对于 $\forall x \in [-5, +\infty)$, $f(x) + x + 5 \geq -\frac{6}{e^5}$ 恒成立.

2. 端点值特殊型

端点问题

定义: 当 $f(x) > (<) 0$ 在某区间 (a, b) 上恒/能成立, 或者 $f(x) \geq (\leq) 0$ 在某区间 $[a, b]$ 上恒成立, 但 $f(a) = 0$ 或 $f(b) = 0$ 时.

此时它的端点值恰好贴着恒成立限制条件的边界, 因此会对原函数的端点处的导数符号有一个限制条件.

做法: 以下以 $f(x) > 0$ 在 (a, b) 上恒成立且 $f(a) = 0$ 为例, 来看一下解题步骤

(1) 正常求导, 求出导函数的零点

(2) 进行零点位置的分类讨论:

① 当 $f(x)$ 在 (a, b) 上恒单调递增时, 即 $f'(x) \geq 0$ 在 $[a, b]$ 上恒成立时, 由于 $f(a) = 0$, 结论显然成立;

② 如果有个 x_0 使得 $f(x)$ 在 (a, x_0) 上单调递减时, 象征性的列个表~

然后, 根据单调性, $f(x_0) < f(a) = 0$, 所以一定不成立!

这样, 综上①②取值范围就求出来了.

换言之, $f(x_0)$ 是几, 根本不用算!!

只要极值点和端点位置一做比较, 问题就能迎刃而解, 这就是这类问题的优势所在.

例2

10. 已知函数 $f(x) = x^2 - 2ax + 4(a - 1) \ln(x + 1)$, 其中实数 $a < 3$.

(1) 若 $f(x) \leq 0$ 在区间 $[0, 1]$ 上恒成立, 求 a 的取值范围.

练2

11. 已知函数 $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$.

(1) 设实数 k 使得 $f(x) > k(x + \frac{x^3}{3})$ 对 $x \in (0, 1)$ 恒成立, 求 k 的最大值.

12. 已知函数 $f(x) = x \cos x - \sin x, x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

(1) 求证: $f(x) \leq 0$;

(2) 若 $a < \frac{\sin x}{x} < b$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上恒成立, 求 a 的最大值与 b 的最小值.

3. 含参的分类讨论

例3 (恒成立)

13. 已知函数 $f(x) = ax - \frac{1}{x} - (a+1)\ln x, a \in \mathbf{R}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 当 $a \geq 1$ 时, 若 $f(x) > 1$ 在区间 $[\frac{1}{e}, e]$ 上恒成立, 求 a 的取值范围.

练3

14. 已知函数 $f(x) = x + a \ln x$, 其中 a 为常数, 且 $a \leq -1$, 若 $f(x) \leq e - 1$ 对任意 $x \in [e, e^2]$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

例4 (能成立)

15. 已知函数 $f(x) = e^x(x^2 + ax + a)$.

(1) 若关于 x 的不等式 $f(x) \leq e^a$ 在 $[a, +\infty)$ 上有解, 求实数 a 的取值范围;